ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ № 7 «Показникові рівняння та системи показникових рівнянь»

1. Розв'язати рівняння:

1) $5^x = 25$. ОДЗ: $x \in R$.

Розв'язання. Зведемо ліву та праву частини заданого рівняння до однієї основи:

$$5^x = 5^2 \Rightarrow x = 2.$$

Відповідь. $x = 2$.

2) Розв'язати рівняння $0{,}25^{2x-6} = 16$. ОДЗ: $x \in R$.

Розв'язання. Права частина є додатною, тому переходимо до рівносильного рівняння

$$2x - 6 = \log_{0,25} 16,$$
$$2x - 6 = -2,$$
$$2x = 4, \,|:2$$
$$x = 2.$$

Відповідь. $x = 2$.

3) $\sqrt{3}^{7x+11} = \sqrt{3}^{6x-8}$. ОДЗ: $x \in R$.

Розв'язання. Рівні основи, тому рівні й степені:

$$7x + 11 = 6x - 8,$$
$$x = -19.$$

Відповідь. $x = -19$.

4) $2^{x-3} \cdot 4^x = \dfrac{\sqrt{2}}{16^x}$. ОДЗ: $\underset{>0 \forall x}{16^x} \neq 0 \Rightarrow x \in R$.

Розв'язання. Зведемо ліву та праву частини заданого рівняння (тобто кожний вираз у цих частинах) до основи 2:

$$2^{x-3} \cdot \left(2^2\right)^x = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\left(2^4\right)^x}.$$

Перетворимо отриманий вираз за властивостями степенів:

$$2^{x-3} \cdot 2^{2x} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{4x}},$$
$$2^{x-3+2x} = 2^{\frac{1}{2}-4x},$$
$$2^{3x-3} = 2^{\frac{1}{2}-4x}.$$

Прирівнюючи степені, будемо мати:

$$3x - 3 = \frac{1}{2} - 4x,$$
$$7x = \frac{7}{2},$$

$$x=\frac{1}{2}.$$

Відповідь. $x=\frac{1}{2}$.

5) $\left(2^{x+4}\right)^{x-3}=0{,}5^{x}\cdot 4^{x-4}$;

6) $2^{\sin x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ОДЗ: $x\in R$.

Розв'язання. Зведемо ліву та праву частини заданого рівняння до однієї основи:

$\sin x=a,\ |a|\le 1$
$x=(-1)^k\arcsin a+\pi k,\ k\in Z$

$$2^{\sin x}=\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{1}},$$

$$2^{\sin x}=2^{\frac{1}{2}-1}\Rightarrow 2^{\sin x}=2^{-\frac{1}{2}}.$$

Прирівнюючи степені, отримаємо тригонометричне рівняння

$$\sin x=-\frac{1}{2},$$

розв'язками якого є

$\arcsin(-a)=-\arcsin a$

$$x=(-1)^k\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi k,\ k\in Z,$$

$$x=(-1)^k(-1)\arcsin\frac{1}{2}+\pi k,\ k\in Z,$$

$$x=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z.$$

Відповідь. $x=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$.

7) $3^{\left|x^2-x\right|}=9$; 8) $\frac{3^{2x+1}\cdot 9^{x+2}}{27^{x}}=243$;

9) $\left(\sqrt{5}\right)^{2+4+6+\ldots+2x}=5^{45},\ x\in N$. ОДЗ: $x\in N$

Розв'язання. Сума $2+4+6+\ldots+2x$ представляє собою суму перших k членів арифметичної прогресії $\{a_n\}=\{2,4,6,\ldots,2x,\ldots\}$, для якої $a_1=2,\ d=2,\ a_k=2x$. Знайдемо цю суму:

$$k=\frac{a_k-a_1}{d}+1=\frac{2x-2}{2}+1=x,$$

$$S_k=S_x=\frac{a_1+a_k}{2}\cdot k=\frac{2+2x}{2}\cdot x=x(x+1).$$

Отже, задане рівняння приймає вигляд:

$$\sqrt{5}^{x(x+1)}=5^{45},$$

$$\left(5^{1/2}\right)^{x(x+1)}=5^{45},$$

$$5^{\frac{x^2+x}{2}}=5^{45}\Rightarrow$$

$$\frac{x^2+x}{2}=45 \text{ або } x^2+x-90=0.$$

Його корені

$$x_1=-10\notin \text{ОДЗ};\ x_2=9.$$

Відповідь. $x=9$.

10) $\frac{3^x}{2^x}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{3}{2}\right)^9$;

11) $3^{x+1}=27^{x-1}$; 12) $0{,}2^{x^2+4x-5}=1$;

13) $4^{x+1}=5^{x-1}$. ОДЗ: $x\in R$

Розв'язання. Прологарифмуємо ліву та праву частини, наприклад, за основою 4:

$$\log_4 4^{x+1}=\log_4 5^{x-1},$$
$$(x+1)\log_4 4=(x-1)\log_4 5,$$
$$x+1=x\log_4 5-\log_4 5,$$
$$x-x\log_4 5=-\log_4 5-1,$$
$$x(1-\log_4 5)=-(\log_4 5+1),$$
$$x=-\frac{\log_4 5+1}{1-\log_4 5}=\frac{\log_4 5+1}{\log_4 5-1}.$$

Відповідь. $x=\frac{\log_4 5+1}{\log_4 5-1}$.

14) $5^x-2\cdot 5^{x-2}=23$. ОДЗ: $x\in R$.

Розв'язання. Виносимо 5 у найменшому степені, тобто в степеню $(x-2)$. При винесенні спільного множника потрібно кожний доданок в лівій частині поділити на цей множник:

$$5^{x-2}\cdot\left(5^{x-(x-2)}-2\right)=23,$$
$$5^{x-2}\cdot\left(5^{x-x+2}-2\right)=23,$$
$$5^{x-2}\cdot(25-2)=23,$$
$$5^{x-2}\cdot 23=23,\ |:23$$
$$5^{x-2}=1.$$

Прийшли до показникового рівняння $a^{f(x)}=b$:

$$x-2=\log_5 1\Rightarrow x-2=0\Rightarrow x=2.$$

Зауваження. Рівняння $5^{x-2}=1$ можна було б звести й до показникового рівняння типу 3 – $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, врахувавши, що $1=a^0$, тобто

$$5^{x-2}=1\Rightarrow 5^{x-2}=5^0\Rightarrow x-2=0\Rightarrow x=2.$$

Відповідь. $x=2$.

15) $2\cdot 7^{x+1}-6\cdot 7^{x-1}-7^x=85$; 16) $2^{x+1}-2^x+2^{x-2}-2^{x-3}=9$;

17) $2^{x+1}-2^{x+2}-2^{x+3}=5^x-5^{x+1}$; 18) $2^{x+3}-2^{x+1}=12$.

19) $4^{x+1}-3\cdot 2^x=10$. ОДЗ: $x\in R$.

Розв'язання. Зведемо рівняння до однієї основи, а саме 2, використовуючи властивості степенів:

$$4^x \cdot 4 - 3 \cdot 2^x - 10 = 0,$$
$$4 \cdot \left(2^2\right)^x - 3 \cdot 2^x - 10 = 0,$$
$$4 \cdot \left(2^x\right)^2 - 3 \cdot 2^x - 10 = 0.$$

Зробимо заміну

$$2^x = t,\ t > 0,$$

тоді в результаті дістанемо:

$$4t^2 - 3t - 10 = 0.$$

Розв'язок отриманого квадратного рівняння

$$t_1 = \frac{8}{4} = 2,\ t_2 = -\frac{5}{4} < 0 \notin \text{ОДЗ}.$$

Після оберненої заміни приходимо до найпростішого показникового рівняння:

$$2^x = 2,$$
$$2^x = 2^1 \Rightarrow x = 1.$$

Відповідь. $x = 1.$

20) $3 \cdot 81^x - 10 \cdot 9^x + 3 = 0$; 21) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$;

22) $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$; 23) $4 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 1 = 0.$

24) $3^x + 3^{2-x} = 10.$ ОДЗ: $x \in R.$

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді:

$$3^x + 3^2 \cdot 3^{-x} = 10.$$

Помножимо почленно обидві частини останнього рівняння на $3^x > 0$, в результаті дістанемо рівняння

$$\left(3^x\right)^2 + 9 = 10 \cdot 3^x \Rightarrow \left(3^x\right)^2 - 10 \cdot 3^x + 9 = 0.$$

Робимо заміну

$$3^x = t,\ t > 0,$$

в результаті отримаємо квадратне рівняння

$$t^2 - 10t + 9 = 0,$$

корні якого, згідно з теоремою Вієта, $t_1 = 9, t_2 = 1$; обидва значення належать ОДЗ $t > 0$ щодо змінної t.

Повертаючись до початкової змінної x, отримуємо найпростіші показникові рівняння

$$3^x = 9, \quad \text{або} \quad 3^x = 1,$$
$$3^x = 3^2, \qquad 3^x = 3^0,$$
$$x = 2; \qquad x = 0.$$

Відповідь. $x_1 = 2, x_2 = 0.$

25) $\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right)^x = 10;$

26) $\left(4 + \sqrt{15}\right)^x + \left(4 - \sqrt{15}\right)^x = 62.$ ОДЗ: $x \in R$

Розв'язання. Перевіримо, чи не є основи степеня взаємно оберненими виразами (якщо так, то їх добуток повинен дорівнювати одиниці):

$$\left(4 + \sqrt{15}\right)\left(4 - \sqrt{15}\right) = 4^2 - \sqrt{15}^2 = 16 - 15 = 1 \Rightarrow 4 - \sqrt{15} = \frac{1}{4 + \sqrt{15}}.$$

Отже, вихідне рівняння перепишеться у вигляді:

$$\left(4+\sqrt{15}\right)^x+\left(\frac{1}{4+\sqrt{15}}\right)^x=62 \text{ або } \left(4+\sqrt{15}\right)^x+\frac{1}{\left(4+\sqrt{15}\right)^x}=62.$$

Зробимо заміну:

$$\left(4+\sqrt{15}\right)^x=t, t>0,$$

тоді прийдемо до рівняння

$$t+\frac{1}{t}=62 \qquad \text{ОДЗ: } t\in(0;+\infty)$$

або $$t^2-62t+1=0;$$

$$D=(-62)^2-4\cdot1\cdot1=3840,\ \sqrt{D}=\sqrt{3840}=\sqrt{256\cdot15}=16\sqrt{15},$$

$$t_1=\frac{62-16\sqrt{15}}{2}=31-8\sqrt{15}=16-8\sqrt{15}+15=$$

$$=4^2-2\cdot4\cdot\sqrt{15}+\sqrt{15}^2=\left(4-\sqrt{15}\right)^2=\left(\frac{1}{4+\sqrt{15}}\right)^2=\left(4+\sqrt{15}\right)^{-2},$$

$$t_2=\frac{62+16\sqrt{15}}{2}=31+8\sqrt{15}=\left(4+\sqrt{15}\right)^2.$$

Обернена заміна:

$$\left(4+\sqrt{15}\right)^x=\left(4+\sqrt{15}\right)^{-2}, \quad x_1=-2; \qquad \text{або} \qquad \left(4+\sqrt{15}\right)^x=\left(4+\sqrt{15}\right)^2, \quad x_2=2.$$

Відповідь. $x_{1,2}=\pm2$.

27) $\log_2\left(2^x-2\right)=5-x$; 28) $5^{1+\log_4 x}+5^{\log_{\frac{1}{4}} x-1}=\frac{15}{6}$; 29) $2^x+2^{2-x}=5$;

30) $2^{x+1}=3^{x+1}$. ОДЗ: $x\in R$.

Розв'язання. Поділимо обидві частини заданого рівняння на $3^{x+1}>0$, в результаті дістанемо

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}=1,$$

тоді

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^0,$$

$$x+1=0\Rightarrow x=-1.$$

Відповідь. $x=-1$.

31) $4^x+6^x=2\cdot9^x$. ОДЗ: $x\in R$.

Розв'язання. Перенесемо всі доданки в ліву частину рівняння та запишемо їх у вигляді:

$$\left(2^2\right)^x+(2\cdot3)^x-2\cdot\left(3^2\right)^x=0,$$

$$\left(2^x\right)^2+2^x\cdot3^x-2\cdot\left(3^x\right)^2=0,\ \Big|:3^{2x}>0$$

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^x-2=0.$$

Уведемо заміну

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=t,\ t>0,$$

тоді отримаємо квадратне рівняння

$$t^2+t-2=0,$$

корені якого за теоремою Вієта

$$t_1=-2<0\notin \text{ОДЗ},\ t_2=1.$$

Після оберненої заміни маємо найпростіше показникове рівняння

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=1\Rightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^0\Rightarrow x=0.$$

Відповідь. $x=0.$

32) $6\cdot 25^x-5\cdot 10^x-4^x=0$; 33) $64\cdot 9^x+27\cdot 16^x=84\cdot 12^x$;

34) $9\cdot 2^{2x+2}-45\cdot 6^x=3^{2x+4}$;

35) $8^x-5^x=39.$

Розв'язання. ОДЗ: $x\in R.$

Перетворимо праву частину заданого показникового рівняння:

$$8^x-5^x=3\cdot 13,$$

$$8^x-5^x=(8-5)\cdot(8+5).$$

До правої частини застосовуємо формулу скороченого множення «різниця квадратів», отримаємо:

$$8^x-5^x=8^2-5^2.$$

Порівнюючи ліву та праву частини, робимо висновок, що

$$x=2.$$

Відповідь. $x=2.$

36) $5^{4^{\sqrt{2}^x}}=25.$

Розв'язання. ОДЗ: $x\in R.$

Зводимо ліву та праву частини до однієї основи 5:

$$5^{4^{\sqrt{2}^x}}=5^2,$$

$$4^{\sqrt{2}^x}=2.$$

Далі зводимо в лівій та правій частині отриманого рівняння до основи 2:

$$\left(2^2\right)^{\sqrt{2}^x}=2^1,$$

$$2^{2\sqrt{2}^x}=2^1,$$

$$2\sqrt{2}^x=1,$$

$$2^1\cdot\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x=2^0,$$

$$2^1 \cdot 2^{\frac{x}{2}} = 2^0,$$

$$2^{1+\frac{x}{2}} = 2^0,$$

$$1+\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = -1 \text{ або } x = -2.$$

Відповідь. $x = -2$.

37) $3^x + 9^x + 27^x = 14$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \in R$.

Зробимо заміну:

$$3^x = t, t > 0.$$

Тоді рівняння приймає вигляд:

$$t + t^2 + t^3 = 14 \qquad \text{ОДЗ: } t \in (0; +\infty)$$

або

$$t^3 + t^2 + t - 14 = 0.$$

Цілі розв'язки цього рівняння будемо шукати серед дільників вільного коефіцієнта:

$$14 : \pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14.$$

Застосуємо схему Горнера:

	1	1	1	– 14	
1	1	2	3	$-11 \neq 0$	– не є коренем
– 1	1	0	1	$-15 \neq 0$	– не є коренем
2	1	3	7	0	$\Rightarrow t_1 = 2$

Тоді

$$t^3 + t^2 + t - 14 = (t-2)\left(t^2 + 3t + 7\right).$$

Знайдемо корені квадратного рівняння $t^2 + 3t + 7 = 0$:

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 9 - 28 = -19 < 0.$$

Отже, рівняння має єдиний дійсний корінь $\Rightarrow t = 2$.

Обернена заміна:

$$3^x = 2,$$
$$x = \log_3 2.$$

Відповідь. $x = \log_3 2$.

38) $5^{7^x} = 7^{5^x}$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \in R$.

Прологарифмуємо ліву та праву частини заданого рівняння:

$$\ln 5^{7^x} = \ln 7^{5^x}.$$

Далі робимо перетворення, використовуючи властивості логарифмів:

$$7^x \ln 5 = 5^x \ln 7,$$
$$\ln\left(7^x \cdot \ln 5\right) = \ln\left(5^x \cdot \ln 7\right),$$
$$\ln 7^x + \ln\ln 5 = \ln 5^x + \ln\ln 7,$$
$$x\ln 7 + \ln\ln 5 = x\ln 5 + \ln\ln 7,$$
$$x\ln 7 - x\ln 5 = \ln\ln 7 - \ln\ln 5,$$
$$x(\ln 7 - \ln 5) = \ln\ln 7 - \ln\ln 5.$$

Отже,

$$x=\frac{\ln\ln 7-\ln\ln 5}{\ln 7-\ln 5}.$$

Відповідь. $x=\dfrac{\ln\ln 7-\ln\ln 5}{\ln 7-\ln 5}$.

39) $3^x+9^x=27^x$;

40) $x^{2x+1}=x^{3x-4}$. ОДЗ: $x\in R$.

Розв'язання. Дане рівняння еквівалентне сукупності

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0,\\2x+1>0,\\3x-4>0\end{cases}\\ \begin{cases}x>0,\\x\neq 1,\\2x+1=3x-4,\end{cases}\\ \begin{cases}x=1,\\x\in \text{ОДЗ},\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0,\\x>-1/2,\\x>4/3,\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(0;1)\cup(1;+\infty),\\-x=-5,\end{cases}\\ \begin{cases}x=1,\\x\in R,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing\\x=5,\\x=1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=1,\\x=5.\end{array}\right.$$

Відповідь. $x_1=1,\ x_2=5$.

41) $(\log_4 x)^{x+1}=(\log_4 x)^{2x-3}$.

2. Розв'язати систему рівнянь:

1) $\begin{cases}x+2y=-1,\\4^{x+y^2}=16;\end{cases}$

2) $\begin{cases}3^{y+1}-2^x=5,\\4^x-6\cdot 3^y+2=0.\end{cases}$ ОДЗ: $x,\ y\in R$

Розв'язання. Перепишемо систему наступним чином:

$$\begin{cases}3\cdot 3^y-2^x=5,\\2^{2x}-6\cdot 3^y+2=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^x=3\cdot 3^y-5,\\\left(2^x\right)^2-6\cdot 3^y+2=0.\end{cases}$$

Друге рівняння системи приймає вигляд:

$$\left(3\cdot 3^y-5\right)^2-6\cdot 3^y+2=0,$$
$$9\cdot\left(3^y\right)^2-30\cdot 3^y+25-6\cdot 3^y+2=0,$$
$$9\cdot\left(3^y\right)^2-36\cdot 3^y+27=0,\ \Big|:9,$$
$$\left(3^y\right)^2-4\cdot 3^y+3=0.$$

Розв'язуючи отримане рівняння як квадратне відносно 3^y, будемо мати:

$$3^y=3,\quad \text{або}\quad 3^y=1,$$
$$y_1=1;\qquad\qquad y_2=0.$$

А тоді

$$2^x = 3\cdot 3 - 5, \quad \text{або} \quad 2^x = 3\cdot 1 - 5,$$
$$2^x = 4, \qquad\qquad 2^x = -2,$$
$$x_1 = 2; \qquad\qquad x \in \varnothing.$$

Відповідь. $(2;1)$.

3) $\begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 162, \\ 3^x \cdot 4^y = 48. \end{cases}$ ОДЗ: $x, y \in R$

Розв'язання. Поділимо перше рівняння системи на друге:

$$\frac{2^x \cdot 9^y}{3^x \cdot 4^y} = \frac{162}{48},$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^y = \frac{27}{8},$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{2^2}{3^2}\right)^{-y} = \frac{2^{-3}}{3^{-3}},$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2y} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3},$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2y} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \Rightarrow x - 2y = -3 \Rightarrow x = 2y - 3.$$

Отриманий вираз підставимо в систему, яка прийме вигляд:

$$\begin{cases} 2^{2y-3} \cdot 9^y = 162, \\ 3^{2y-3} \cdot 4^y = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2^{2y}}{2^3} \cdot 9^y = 162, \\ \dfrac{3^{2y}}{3^3} \cdot 4^y = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36^y = 1296, \\ 36^y = 1296 \end{cases} \Rightarrow$$
$$36^y = 36^2 \Rightarrow y = 2,$$

тобто $x = 2\cdot 2 - 3 = 1$.

Відповідь. $(1;2)$.

4) $\begin{cases} 2^x + 2^{y+1} = 10, \\ y - x = 1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4^{x+y} = 128, \\ 5^{3x-2y-3} = 1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 4^x \cdot 4^y = 64, \\ 4^x - 4^y = 63. \end{cases}$ ОДЗ: $x, y \in R$

Розв'язання. З другого рівняння системи отримаємо, що

$$4^x = 63 + 4^y,$$

тоді перше рівняння прийме вигляд:

$$4^y\left(4^y + 63\right) = 64.$$

Розкриємо дужки й в результаті прийдемо до квадратного рівняння відносно 4^y:

$$\left(4^y\right)^2 + 63 \cdot 4^y - 64 = 0,$$

коренями якого є

$$4^y = -64, \quad \text{або} \quad 4^y = 1,$$

$$y \in \varnothing; \qquad y = 0,$$

тобто

$$4^x = 63 + 1,$$
$$4^x = 4^3,$$
$$x = 3.$$

Відповідь. $(3; 0)$.

7) $\begin{cases} 4^x \cdot 2^y = 32, \\ 2^{2x} - 2^y = 14; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2^x \cdot 2^{-y} = \dfrac{1}{128}, \\ \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 2. \end{cases}$