ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ № 2 «Логарифмічна функція, її властивості»

1. Зростаючою чи спадною є функція:

1) $y=\log_{0,5} x$; 2) $y=\log_{\frac{1}{10}} x$; 3) $y=\log_{\sqrt{5}} x$; 4) $y=\log_{\sqrt{2}-1} x$;

5) $y=\log_2 x$; 6) $y=\log_{\frac{\pi}{3}} x$; 7) $y=\lg x$; 8) $y=\log_{\frac{\pi}{6}} x$?

Розв'язання. 3) $y=\log_{0,5} x$.

Монотонність логарифмічної функції залежить від значення під логарифмічного виразу. Оскільки для заданої функції $a=\sqrt{5}>1$, то функція є зростаючою.

Відповідь. Функція зростаюча.

2. Порівняти:

1) $\log_{12} 5$ і $\log_{12} 6$; 2) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{4}{5}$ і $\log_{\frac{1}{9}} \frac{5}{6}$; 3) $\log_5 \frac{1}{2}$ і $\log_5 \frac{1}{3}$;

4) $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,7$ і $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,6$; 5) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ і $\log_{\frac{1}{3}} 4$; 6) $\log_{\frac{2\pi}{5}} 8,4$ і $\log_{\frac{2\pi}{5}} 8,3$.

Розв'язання. 1) $\log_{12} 5$ і $\log_{12} 6$.

Функція $y=\log_{12} x$ є зростаючою (оскільки основа логарифма $a=12>1$), тоді меншому значенню аргументу відповідає менше значення функції. Тобто для $5<6$ маємо, що

$$\log_{12} 5<\log_{12} 6.$$

Відповідь. $\log_{12} 5<\log_{12} 6$.

3. Порівняти з одиницею основу a логарифма, якщо:

1) $\log_a 0,5>\log_a 0,4$; 2) $\log_a \sqrt{5}<\log_a \sqrt{6}$; 3) $\log_a \frac{2}{3}>\log_a 1$; 4) $\log_a \frac{\pi}{4}<\log_a \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання. 1) $\log_a 0,5>\log_a 0,4$.

Оскільки більшому значенню аргументу $(0,5>0,4)$ відповідає більше значення функції, то це означає, що задана функція є зростаючою, а тоді

$$a>1.$$

Відповідь. $a>1$.

4. Порівняти з нулем вираз:

$$1)\ \log_{0,5} 0{,}6; \quad 2)\ \log_{0,3} 3; \quad 3)\ \log_2 0{,}27; \quad 4)\ \log_\pi 3;$$

$$5)\ \log_5 4; \quad 6)\ \log_2 \frac{1}{3}; \quad 7)\ \log_{\frac{1}{3}} 0{,}5; \quad 8)\ \log_2 \frac{\pi}{3}.$$

Розв'язання. 1) $\log_{0,5} 0{,}6$.

Функція $y = \log_{0,5} x$ є спадною ($0 < a = 0{,}5 < 1$), тому меншому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Отже, має місце нерівність:

$$\log_{0,5} 0{,}6 > \log_{0,5} 1 = 0 \Rightarrow \log_{0,5} 0{,}6 > 0.$$

Відповідь. $\log_{0,5} 0{,}6 > 0$.

5. Знайти область визначення функції:

$$1)\ y = \log_3(x+1); \quad 2)\ y = \log_5\left(x^2 + x + 1\right); \quad 3)\ y = \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 + 1\right);$$

$$4)\ y = \log_{0,6}\left(5x - 6 - x^2\right); \quad 5)\ y = 2\lg x + 3\lg(2-x); \quad 6)\ y = \lg x^2;$$

$$7)\ y = \log_{12}|x|; \quad 8)\ y = \log_{\frac{\pi}{3}}\left(x^2 - 1\right); \quad 9)\ y = \lg\frac{2x+1}{x-1}.$$

Розв'язання. 5) $y = 2\lg x + 3\lg(2-x)$.

Підлогарифмічний вираз повинен бути невід'ємним, тому область визначення функції задається системою

$$D(y): \begin{cases} x > 0, \\ 2 - x > 0 \end{cases} \begin{cases} x > 0, \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow x \in (0; 2).$$

Відповідь. $D(y): x \in (0; 2)$.

6. Указати проміжок, якому належить число:

1) $\log_5 4$:

а) $(0;1)$ б) $(1;2)$ в) $(2;3)$ г) $(3;4)$ д) $(4;5)$

Розв'язання. Оскільки для підлогарифмічного виразу має місце нерівність

$$1 < 4 < 5$$

та функція $y = \log_5 x$ є зростаючою на всій області визначення (тобто меншому значенню аргументу відповідає менше значення функції), то

$$\log_5 1 < \log_5 4 < \log_5 5 \Leftrightarrow 0 < \log_5 4 < 1 \Rightarrow \log_5 4 \in (0;1).$$

Відповідь. а).

2) $\log_{\frac{1}{3}} 2$:

а) $(-\infty; -3)$ б) $(-1;1)$ в) $(-3; -1)$ г) $(1;3)$ д) $(3; +\infty)$