ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ № 3 «Логарифмічні рівняння, системи логарифмічних рівнянь»

1. Розв'язати рівняння:

1) $\log_3 x = 2$. ОДЗ: $x > 0 \Rightarrow x \in (0; +\infty)$

Розв'язання. Згідно з означенням логарифма, розв'язком заданого рівняння є значення

$$x = 3^2 = 9.$$

Відповідь. $x = 9$.

2) $\log_3(x^2 - 3) = 0$.

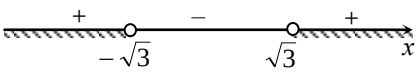
Розв'язання. Рівняння такого виду рівносильне наступній системі:

$$\begin{cases} x^2 - 3 > 0, \\ x^2 - 3 = 3^0. \end{cases}$$

Розв'яжемо спочатку нерівність, для цього до лівої частини застосуємо формулу скороченого множення «різниця квадратів», а потім отриману нерівність розв'яжемо за допомогою метода інтервалів:

$$x^2 - 3 > 0 \Rightarrow (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) > 0.$$

Наносимо нулі кожного із множників в лівій частині останньої нерівності на координатну пряму та визначаємо знак нерівності на кожному з отриманих проміжків.



Таким чином, розв'язок нерівності –

$$x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty).$$

Розв'яжемо тепер рівняння $x^2 - 3 = 1$:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2.$$

Тобто система приймає вигляд:

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty), \\ \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x = \pm 2.$$

Відповідь. $x = \pm 2$.

3) $\log_2(8 - x) = \log_2(x + 12)$.

Розв'язання. Від розв'язання заданого рівняння перейдемо до розв'язування еквівалентної йому системи

$$\begin{cases} 8 - x > 0, \\ 8 - x = x + 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 > x, \\ -2x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 8, \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow x = -2.$$

Відповідь. $x = -2$.

4) $\log_{x+1}(x^2 + 2x) = \log_{x+1} 3$. ОДЗ: $\begin{cases} x^2 + 2x > 0, \\ x + 1 > 0, \\ x + 1 \neq 1 \end{cases}$

Розв'язання. Задане рівняння еквівалентне $\Rightarrow \begin{cases} x(x + 2) > 0, \\ x > -1, \\ x \neq 0 \end{cases}$

рівнянню (враховуючи ОДЗ) $\Rightarrow \begin{cases} x(x+2)>0, \\ x>-1, \\ x\neq 0 \end{cases}$

$x^2+2x=3 \Rightarrow x^2+2x-3=0.$ $\Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty), \\ x\in(-1;+\infty), \\ x\neq 0 \end{cases}$

За теоремою Вієта отримуємо, що $\Rightarrow x\in(0;+\infty)$

$x_1=1,\ x_2=-3\notin$ ОДЗ.

Відповідь. $x=1.$

5) $\sqrt{\log_2\left(2x^2\right)\cdot\log_4(16x)}=\log_4 x^3.$ ОДЗ: $\begin{cases} 2x^2>0, \\ 16x>0, \\ x^3>0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x\neq 0, \\ x>0, \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow$

Розв'язання. Задане рівняння є ірраціональним, $x\in(0;+\infty)$

рівносильна йому система $\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} g(x)\geq 0, \\ f(x)=[g(x)]^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \log_4 x^3\geq 0, \\ \log_2\left(2x^2\right)\cdot\log_4(16x)=\left(\log_4 x^3\right)^2. \end{cases}$$

Розв'яжемо нерівність та рівняння окремо.

Використовуючи властивість логарифма, нерівність $\log_4 x^3\geq 0$ перепишемо у вигляді

$\log_a f(x)\geq b \overset{a>1}{\Leftrightarrow} f(x)\geq a^b$

$3\log_4 x\geq 0 \,|:3,$

$\log_4 x\geq 0,$

оскільки функція $y=\log_4$ є зростаючою на всій області визначення, то

$$x\geq 4^0 \Rightarrow x\geq 1,$$
$$x\in[1;+\infty).$$

У рівнянні всі логарифми зведемо до однієї основи 2 та перетворимо логарифми згідно з властивостями:

$$\log_2\left(2x^2\right)\cdot\log_{2^2}(16x)=\left(3\log_{2^2} x\right)^2,$$
$$\left(\log_2 2+\log_2 x^2\right)\cdot\frac{1}{2}\log_2(16x)=\left(\frac{3}{2}\log_2 x\right)^2,$$
$$\left(1+2\log_2|x|\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\log_2 16+\log_2 x\right)=\frac{9}{4}\log_2^2 x, \,\Big|\times\frac{1}{4}$$
$$2(1+2\log_2 x)\cdot(4+\log_2 x)=9\log_2^2 x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8+2\log_2 x+16\log_2 x+4\log_2^2 x=9\log_2^2 x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5\log_2^2 x-18\log_2 x-8=0.$$

Таким чином, прийшли до квадратного рівняння відносно $\log_2 x$. Для його

розв'язання зробимо заміну $\log_2 x = t$, тоді останнє рівняння прийме вигляд

$$5t^2 - 18t - 8 = 0.$$ ОДЗ: $t \in R$

Його дискримінант

$$D = (-18)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-8) = 484 = 22^2$$

та корені

$$t_{1,2} = \frac{18 \pm 22}{10} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 4, \\ t_2 = -\frac{2}{5}. \end{array}\right.$$

Робимо обернену заміну й повертаємось до початкової змінної x:

$$\begin{array}{ll} \log_2 x = 4, & \log_2 x = -\frac{2}{5}, \\ x = 2^4, & x = 2^{-\frac{2}{5}}, \\ x = 16; & x = \frac{1}{\sqrt[5]{4}}. \end{array}$$

Отже, система набуває вигляду

$$\left\{\begin{array}{l} x \geq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x = 16, \\ x = \frac{1}{\sqrt[5]{4}} \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow x = 16.$$

Відповідь. $x = 16$.

6) $\log_{2x+1}\left(2x^2 - 8x + 15\right) = 2$.

Розв'язання. ОДЗ: $\left\{\begin{array}{l} 2x^2 - 8x + 15 > 0, \\ 2x + 1 > 0, \\ 2x + 1 \neq 1. \end{array}\right.$

Для розв'язання першої нерівності застосуємо метод інтервалів. Для цього її ліву частину потрібно розкласти на множники:

$$2x^2 - 8x + 15 = 0;$$

дискримінант

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 15 = -56 < 0.$$

Оскільки старший коефіцієнт $a = 2 > 0$, а дискримінант від'ємний, то вираз $2x^2 - 8x + 15 > 0$ для будь-якого $x \in R$.

Розв'язком другої нерівності $2x + 1 > 0$ є всі такі значення x, що $x > -\frac{1}{2}$, тобто $x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Третя умова рівносильна тому, що $x \neq 0$ або $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Отже, система для ОДЗ приймає вигляд

$$\begin{cases} x \in (-\infty; +\infty), \\ x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right), \\ x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty); \end{cases}$$

тобто остаточно маємо, що

$$\text{ОДЗ: } x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (0; +\infty).$$

Задане рівняння, згідно з означенням логарифма, рівносильне рівнянню

$$2x^2 - 8x + 15 = (2x+1)^2,$$

після спрощення будемо мати:

$$2x^2 - 8x + 15 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 2x^2 + 12x - 14 = 0 \,\big|: 2 \Rightarrow x^2 + 6x - 7 = 0.$$

Корені отриманого квадратного рівняння знайдемо за допомогою теореми Вієта:

$$x_1 = -7 \notin \text{ОДЗ}; \; x_2 = 1.$$

Відповідь. $x = 1$.

7) $\log_3(3x-1) + \log_3(x+1) = 1 + \log_3(x+3)$; 8) $\log_5^2 x + 3\log_5 x = 4$;

9) $\log_2|x| + \log_2(-x) = \log_2 16$; 10) $x^{1+\lg x} = 100$; 11) $\dfrac{\log_4(x^2+x-4)}{\log_4(x-1)} = 0$;

12) $\log_3^2(27x) + \log_3 \dfrac{x^3}{9} = 17$; 13) $\log_x(125x) \cdot \log_5^2 x = 4$; 14) $2\log_4 x + 3\log_x 4 = 5$;

15) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{8x} 2$; 16) $\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1$;

17) $\log_{49} x^2 + \log_7(x-1) = \log_7 \log_{\sqrt{3}} 3$; 18) $\log_x 3 \cdot \log_{3x} 3 = \dfrac{1}{6}$;

19) $\lg(10x) \cdot \lg(0{,}1x) = \lg x^3 - 3$; 20) $x^{\log_4 x - 2} = 2^{3(\log_4 x - 1)}$; 21) $x^{2-0{,}5\lg x} = 100$;

22) $\dfrac{4}{\log_3 x} + 1 = 0$; 23) $\log_{\frac{1}{2}}(1-x) = 2$; 24) $\log_x \sqrt{3} = -1$; 25) $\log_{\sqrt[3]{2}}\left(\sqrt[3]{4}(x-1)^2\right) = -4$;

26) $\log_2 \log_{x+1} 3 = -1$; 27) $\log_{2x}(x-1) = 0{,}5$; 28) $\log_2(2-x) - 2\log_4(x^2-10) = 0$;

29) $2\log_x 8 - 3\log_8 x = 1$; 30) $\log_{\sqrt{3}}(x^2-5) = \log_{\sqrt{3}}(3x^2-1)$;

31) $\log_4(2-x) \cdot \log_x 2 = 1$; 32) $3\log_5(-5x) - \log_5 x^2 = 2$.

2. Розв'язати рівняння:

1) $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5$;

2) $\log_{x^2+2}(4 - 5x^2 - 6x^3) = 2$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку ОДЗ: $\begin{cases} x^2 + 2 > 0, -(1) \\ x^2 + 2 \neq 1, -(2) \\ 4 - 5x^2 - 6x^3 > 0. -(3) \end{cases}$

(1): $\underbrace{x^2}_{\substack{\geq 0 \\ \geq 2>0\,\forall x}} + \underbrace{2}_{\geq 2} > 0 \Rightarrow x \in R$

(2): $\underbrace{x^2+2}_{\geq 2\,\forall x} \neq 1 \Rightarrow x \in R$

(3): $4-5x^2-6x^3>0$

$$4-5x^2-6x^3=0 \Rightarrow 6x^3+5x^2-4=0;$$

$$x_1=\frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$-6x^3-5x^2+4=\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(-6x^2-9x-6\right);$$

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(-6x^2-9x-6\right)>0 \Leftrightarrow$$

$$-6x^2-9x-6=0 \,\Big|:(-3)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2+3x+2=0, \\ D=9-16<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=-6<0, \\ D<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-6x^2-9x-6<0\,\forall x;$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{2}{3}<0 \Rightarrow x \in \left(-\infty;\frac{2}{3}\right)$$

Таким чином, ОДЗ: $x \in \left(-\infty;\frac{2}{3}\right)$.

Для розв'язування рівняння використаємо означення логарифма:

$$4-5x^2-6x^3=\left(x^2+2\right)^2$$

$$4-5x^2-6x^3=x^4+4x^2+4$$

$$x^4+6x^3+9x^2=0$$

$$x^2\left(x^2+6x+9\right)=0$$

$$x^2=0 \text{ або } (x+3)^2=0$$

$$x_{1,2}=0,\ x_{3,4}=-3.$$

Відповідь. $x_{1,2}=0,\ x_{3,4}=-3.$

3) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$; 4) $\log_{x^2-1} x + \log_x\left(x^2-1\right)=2$;

5) $\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}}(x-6)-\log_{x-6}\sqrt{x}=-2$.

ОДЗ: $\begin{cases} \underset{\geq 0}{\frac{1}{\sqrt{x}}>0}, \\ \underset{\geq 0}{\sqrt{x}} \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 1, \\ x-6>0, \\ x-6 \neq 1, \\ \underset{\geq 0}{\sqrt{x}>0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in R, \\ x \neq 0, \\ \sqrt{x} \neq 1, \\ x>6, \\ x \neq 7, \\ x \neq 0 \end{cases}$

Розв'язання. Згідно до властивостей $\Rightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 1, \\ x > 6, \\ x \neq 7, \end{cases} \Rightarrow x \in (6;7) \cup (7;+\infty)$

логарифма та степеня:

$$\log_{\sqrt{x}^{-1}}(x-6) - \frac{1}{\log_{\sqrt{x}}(x-6)} = -2$$

$$-\log_{\sqrt{x}}(x-6) - \frac{1}{\log_{\sqrt{x}}(x-6)} = -2 \Big| \times(-1)$$

$$\log_{\sqrt{x}}(x-6) + \frac{1}{\log_{\sqrt{x}}(x-6)} = 2$$

Заміна: $\log_{\sqrt{x}}(x-6) = t$:

$$t + \frac{1}{t} = 2 \qquad \text{ОДЗ: } t \neq 0$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$t_{1,2} = 1$$

Обернена заміна:

$$\log_{\sqrt{x}}(x-6) = 1$$

$$x - 6 = \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x}^2 - \sqrt{x} - 6 = 0$$

$$\sqrt{x} = -2 \qquad \sqrt{x} = 3$$

$$x \in \varnothing \qquad x_{1,2} = 9$$

Відповідь. $x_{1,2} = 9$.

6) $\log_x 8 = \sqrt{\log_2 \frac{x^2}{32}}$;

7) $\log_{2x+1}(5+8x-4x^2) + \log_{5-2x}(1+4x+4x^2) = 4$. ОДЗ: $\begin{cases} 2x+1>0, \\ 2x+1 \neq 1, \\ 5+8x-4x^2>0, \\ 5-2x>0, \\ 5-2x \neq 1, \\ 1+4x+4x^2>0 \end{cases} \Rightarrow$

$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

Розв'язання. Перетворимо задане рівняння наступним чином:

$$\log_{2x+1}\left(-4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)\right) + \log_{5-2x}(1+2x)^2 = 4$$

$$\log_{2x+1}\left(2\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot(-2)\left(x-\frac{5}{2}\right)\right) + 2\log_{5-2x}|1+2x| = 4$$

$$\begin{cases} x > -\frac{1}{2}, \\ x \neq 0, \\ -4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right) > 0, \\ x < \frac{5}{2}, \\ x \neq 2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\log_{2x+1}\left((2x+1)(5-2x)\right)+2\log_{5-2x}(2x+1)=4$$
$$\log_{2x+1}(2x+1)+\log_{2x+1}(5-2x)+2\log_{5-2x}(2x+1)=4$$
$$1+\log_{2x+1}(5-2x)+2\log_{5-2x}(2x+1)=4$$
$$\frac{1}{\log_{5-2x}(2x+1)}+2\log_{5-2x}(2x+1)=3$$

Заміна: $\log_{5-2x}(2x+1)=t$

$$\frac{1}{t}+2t=3 \qquad \text{ОДЗ: } t\neq 0$$
$$2t^2-3t+1=0$$

$$t_1=\frac{1}{2} \qquad t_1=\frac{2}{2}=1$$

Обернена заміна:

$$\log_{5-2x}(2x+1)=\frac{1}{2} \qquad \log_{5-2x}(2x+1)=1$$
$$2x+1=\sqrt{5-2x} \qquad 2x+1=5-2x$$
$$(2x+1)^2=5-2x \qquad 4x=4$$
$$4x^2+4x+1=5-2x \qquad x_3=1$$
$$4x^2+6x-4=0 \,\big|:2$$
$$2x^2+3x-2=0$$
$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=\frac{-4}{2}=-2\notin \text{ОДЗ}$$

$$\begin{cases} x\in\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup(0;2)\cup\left(2;\frac{5}{2}\right), \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)<0, \\ 1+2x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x\in\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup(0;2)\cup\left(2;\frac{5}{2}\right), \\ x\in\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right), \\ x\neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x\in\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup(0;2)\cup\left(2;\frac{5}{2}\right)$$

Відповідь. $x_1=\frac{1}{2},\ x_2=1.$

8) $\frac{1}{4}\log_5^2(2x+3)^2+8\log_5^2\sqrt{x}=\log_5(2x+3)^3\cdot\log_5 x$; 9) $\log_4\log_2 x+\log_2\log_4 x=2$;

10) $\log_{4x}\frac{4x}{x+1}=\left|\log_{4x}(x+1)-1\right|.$ ОДЗ: $\begin{cases} 4x>0, \\ 4x\neq 1, \\ \frac{4x}{x+1}>0, \\ x+1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\neq\frac{1}{4}, \\ x\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty), \\ x>-1 \end{cases}$

$$\Rightarrow x\in\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$$

Розв'язання. Використовуємо властивість логарифма:

$$\log_{4x}4x-\log_{4x}(x+1)=\left|\log_{4x}(x+1)-1\right|$$
$$1-\log_{4x}(x+1)=\left|\log_{4x}(x+1)-1\right|$$
$$1-\log_{4x}(x+1)=\left|1-\log_{4x}(x+1)\right|$$

Заміна: $1-\log_{4x}(x+1)=t$

$$t=|t| \qquad \text{ОДЗ: } t\in R$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t\ge 0,\\ t=t\end{cases}\\ \begin{cases}t<0,\\ t=-t\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t\ge 0,\\ t\in R\end{cases}\\ \begin{cases}t<0,\\ t=0\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t\ge 0\\ t\in\varnothing\end{array}\right.\Rightarrow t\ge 0$$

Обернена заміна:

$$1-\log_{4x}(x+1)\ge 0\Rightarrow\log_{4x}(x+1)\le 1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<4x<1,\\ x+1\ge(4x)^1\end{cases}-(\mathrm{I})\\ \begin{cases}4x>1,\\ x+1\le(4x)^1\end{cases}-(\mathrm{II})\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

(I): $0<4x<1\Rightarrow 0<x<\frac{1}{4}$ $\quad\bigcap$ ОДЗ: $x\in\left(0;\frac{1}{4}\right)$

$$x+1\ge 4x$$
$$3x\le 1$$
$$x\le\frac{1}{3}$$
$$\bigcap \mathrm{I}: x\in\left(0;\frac{1}{4}\right)$$

(II): $4x>1\Rightarrow x>\frac{1}{4}$ $\quad\bigcap$ ОДЗ: $x\in\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$

$$x+1\le 4x$$
$$3x\ge 1$$
$$x\ge\frac{1}{3}$$
$$\bigcap \mathrm{II}: x\in\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in\left(0;\frac{1}{4}\right)\\ x\in\left[\frac{1}{3};+\infty\right)\end{array}\right.\Rightarrow x\in\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right).$$

Відповідь. $x\in\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$.

11) $\log_{x+19}\left(2x^2+36x+1\right)=\log_4 8+0{,}5$;

12) $\log_2(16x)-\log_{\frac{x}{2}}2\cdot\log_4\left(16x^4\right)=0$.

3. Розв'язати систему рівнянь:

1) $\begin{cases}\log_{0,2}(4x-2y)=-1,\\ \log_2(x+2y)=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}xy=2^4,\\ \log_2^2 x+\log_2^2 y=10;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\log_3 x+\log_3 y=2,\\ x^2y-2y+9=0;\end{cases}$

4) $\begin{cases}\lg(x-4y)=0,\\ \lg 2x+\lg y=1.\end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases}x-4y>0,\\ 2x>0,\\ y>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>4y,\\ x>0,\\ y>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>4y,\\ y>0\end{cases}$

Розв'язання. Згідно з означенням логарифма та властивостями:

$$\begin{cases}x-4y=10^0,\\ \lg 2xy=1;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-4y=1,\\ 2xy=10^1;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1+4y,\\ 2(1+4y)y=10;\end{cases}$$

З другого рівняння системи:

$$8y^2 + 2y - 10 = 0$$

$$y_1 = \frac{-10}{8} = -\frac{5}{4} \notin \text{ОДЗ} \qquad y_2 = \frac{8}{8} = 1$$

$$x_2 = 1 + 4 \cdot 1 = 5$$

Відповідь. $(5;1)$.

5) $\begin{cases} xy = 27, \\ \log_x y + \log_y x = \frac{5}{2}. \end{cases}$ ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ y > 0, \\ y \neq 1 \end{cases}$

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифма, перепишемо друге рівняння системи наступним чином:

$$\log_x y + \frac{1}{\log_x y} = \frac{5}{2}.$$

Заміна: $\log_x y = t$:

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$$

ОДЗ: $t \neq 0$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$t_1 = \frac{1}{2} \qquad t_2 = \frac{4}{2} = 2$$

Обернена заміна:

$$\log_x y = \frac{1}{2} \qquad \log_x y = 2$$

$$y = \sqrt{x} \qquad y = x^2$$

Перше рівняння системи:

$$x\sqrt{x} = 27 \qquad x \cdot x^2 = 27$$

$$x^{\frac{3}{2}} = 27 \qquad x^3 = 27$$

$$x_1 = \sqrt[3]{27^2} = 9 \qquad x_2 = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$y = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \qquad y_3 = 3^2 = 9$$

$$y_1 = 3,\ y_2 = -3 \notin \text{ОДЗ}$$

Відповідь. $(9;3), (3;9)$.