

ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦЮВАННЯ

Розглянемо функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$, які є диференційовними в точці x_0 , тоді відповідно функції $y = f(x) \pm g(x)$, $y = f(x)g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ та $y = f(g(x))$ визначені на деякому проміжку, що містить точку x_0 .

Теорема (Похідна суми). У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$, також є диференційованою функція $y = f(x) + g(x)$, причому для всіх точок виконується рівність

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x).$$

Зауваження. Коротко говорять: *похідна суми дорівнює сумі похідних.*

Зауваження. Використовують і такий спрощений запис:

$$(f + g)' = f' + g'.$$

Зауваження. Формулу похідної суми можна узагальнити для будь якої скінченної кількості доданків:

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)' = f_1' + f_2' + \dots + f_n'.$$

Теорема (Похідна добутку). У тих точках, у яких є диференційованими функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$, також є диференційованою функція $y = f(x)g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Зауваження. Спрощений запис:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Наслідок 1. У тих точках, у яких є диференційовною функція $y = f(x)$, також є диференційовною функція $y = kf(x)$, де k – деяке число (постійний множник, константа, стала), причому для всіх таких точок виконується рівність

$$[kf(x)]' = kf'(x).$$

Зауваження. Коротке формулювання теореми: *постійний множник можна виносити за знак похідної.*

Зауваження. Спрощений запис:

$$(kf)' = kf'.$$

Наслідок 2. У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x) - g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x).$$

Теорема (Похідна частки). У тих точках, у яких функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$ є диференційовними та значення функції $g(x)$ не дорівнюють нулю, функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ також є диференційовною, причому для всіх таких точок виконується рівність

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Зауваження. Спрощений запис:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Приклад 1. Використовуючи теорему про похідну частки, знайти

$$1) (\operatorname{tg} x)'; \quad 2) (\operatorname{ctg} x)'.$$

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } 1) (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь. } (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Якщо для будь-якого $x \in M$ усі значення функції $t = g(x)$ є значеннями аргументу функції $y = f(t)$, то говорять, що задано **складену функцію** $y = f(g(x))$ з областю визначення M .

Приклад 2. Нехай задано функції $f(t)=t+3$ та $g(x)=x^2-2x-5$. Розглянемо складену функцію

$$f(g(x)) = g(x) + 3 = x^2 - 2x - 5 + 3 = x^2 - 2x - 2.$$

Отже, формула $y = x^2 - 2x - 2$ задає складену функцію $y = f(g(x))$.

Теорема (Похідна складеної функції). Якщо функція $t = g(x)$ диференційована в точці x_0 , а функція $y = f(t)$ диференційована в точці $t_0 = g(x_0)$, то складена функція $h(x) = f(g(x))$ є диференційовною в точці x_0 , причому

$$h'(x_0) = f'(t_0) \cdot g'(x_0).$$

Приклад 3. Знайти похідну функції:

- 1) $f(x) = 2 + \frac{3}{x}$; 4) $f(x) = \cos x \cdot \operatorname{tg} x - x^2$; 7) $f(x) = x^3 - 3x$;
2) $f(x) = x(x^3 + 1)$; 5) $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$; 8) $f(x) = \frac{x^2 - 5}{3x}$;
3) $f(x) = 6x^2 + 4\sqrt{x} + 3$; 6) $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{x^3} + \ln 3$; 9) $f(x) = \frac{x^3}{\cos x}$.

Розв'язання. 2) Перетворимо вираз функції, розкриємо дужки:

$$f(x) = x(x^3 + 1) = x^4 + x^3.$$

Тоді шукана похідна згідно з теоремою про похідну суми:

$$f'(x) = (x^4 + x^3)' = (x^4)' + (x^3)' = 4x^3 + 3x^2 = x^2(4x + 3).$$

Відповідь. $f'(x) = x^2(4x + 3)$.

б) Користуючись теоремою про похідну суми, наслідками про похідну добутку та таблицею похідних, маємо:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2x^3 - \frac{1}{x^3} + \ln 3 \right)' = (2x^3)' - \left(\frac{1}{x^3} \right)' + (\ln 3)' = 2(x^3)' - (x^{-3})' + 0 = \\ &= 2 \cdot 3x^2 - (-3x^{-4}) = 6x^2 + \frac{3}{x^4}. \end{aligned}$$

Відповідь. $f'(x) = 6x^2 + \frac{3}{x^4}$.

Приклад 4. Обчислити значення похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0 :

- 1) $f(x) = 6x - 2\cos x, x_0 = \frac{\pi}{2};$
- 2) $f(x) = 5x^2 - 3\sqrt{x} + 8, x_0 = 9;$
- 3) $f(x) = \sqrt{x}(6x - 5), x_0 = \frac{1}{9};$
- 4) $f(x) = 81\sqrt{x} - \frac{81}{x} + \ln 5, x_0 = 9;$
- 5) $f(x) = x(4 - x), x_0 = 5;$
- 6) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 10\sqrt[5]{x}, x_0 = 1;$
- 7) $f(x) = \frac{\cos x}{1 - x}, x_0 = 0;$
- 8) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x + 1}, x_0 = 1.$

Розв'язання. 3) Знайдемо похідну заданої функції, скориставшись теоремою про похідну добутку:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{x}(6x - 5))' = (\sqrt{x})'(6x - 5) + \sqrt{x}(6x - 5)' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (6x - 5) + \sqrt{x} \cdot 6 = \frac{6x - 5}{2\sqrt{x}} + 6\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Значення похідної в заданій точці x_0 :

$$f'\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{6 \cdot \frac{1}{9} - 5}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{9}}} + 6 \cdot \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{3} - 5}{\frac{2}{3}} + 6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2 - 15}{2} + 2 = -\frac{13}{2} + 2 = -6,5 + 2 = -4,5.$$

Відповідь. $f'\left(\frac{1}{9}\right) = -4,5.$

7) Використовуючи похідну частки, отримаємо:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\cos x}{1 - x}\right)' = \frac{(\cos x)'(1 - x) - \cos x(1 - x)'}{(1 - x)^2} = \\ &= \frac{-\sin x(1 - x) - \cos x(-1)}{(1 - x)^2} = \frac{-\sin x(1 - x) + \cos x}{(1 - x)^2}. \end{aligned}$$

В точці $x_0 = 0$ будемо мати:

$$f'(0) = \frac{-\sin 0 \cdot (1 - 0) + \cos 0}{(1 - 0)^2} = \frac{0 + 1}{1} = 1.$$

Відповідь. $f'(0) = 1.$

Приклад 5. Задати формулою складені функції $y = f(g(x))$ та $y = g(f(x))$:

1) $f(x) = \sin x, g(x) = x^2 - 1$; 4) $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = 2x^2 - 3x + 1$;

2) $f(x) = x^4, g(x) = 5x + 2$; 5) $f(x) = \operatorname{tg} x, g(x) = x^2$;

3) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \frac{x}{x-1}$; 6) $f(x) = \sqrt[3]{x}, g(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

Розв'язання. 1) $y = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = \sin(x^2 - 1)$;

$$y = g(f(x)) = g(\sin x) = (\sin x)^2 - 1 = \sin^2 x - 1.$$

Відповідь. $f(g(x)) = \sin(x^2 - 1)$; $g(f(x)) = \sin^2 x - 1$.

6) $y = f(g(x)) = f\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 3\sqrt[3]{\frac{x+1}{x+2}}$;

$$y = g(f(x)) = g(\sqrt[3]{x}) = \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x} + 2}.$$

Відповідь. $f(g(x)) = 3\sqrt[3]{\frac{x+1}{x+2}}$, $g(f(x)) = \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x} + 2}$.

Приклад 6. Знайти похідну функції:

1) $y = (3x - 7)^6$; 4) $y = \operatorname{tg}^3 5x$; 7) $y = \frac{1}{4x + 5}$;

2) $y = \sqrt{4x^2 + 1}$; 5) $y = \sin^2 x$; 8) $y = \left(\frac{x^2}{2} + 4x - 1\right)^{-6}$;

3) $y = \sin \frac{x}{2}$; 6) $y = \sqrt[3]{1 - x}$; 9) $y = \sqrt{\cos x}$.

Розв'язання. 1) Дана функція $y = (3x - 7)^6$ – складена функція $y = f(g(x))$, причому $f(t) = t^6$, $g(x) = 3x - 7$. Оскільки $f'(t) = 6t^5$, $g'(x) = 3$, тоді за теоремою про похідну складеної функції маємо:

$$y'(x) = f'(t)g'(x) = 6t^5 \cdot 3, \text{ де } t = 3x - 7,$$

тоді

$$y'(x) = 6(3x - 7)^5 \cdot 3 = 18(3x - 7)^5.$$

Зауваження. Хід розв'язання задачі можна оформити й більш компактно:

$$y'(x) = \left((3x - 7)^6\right)' = 6(3x - 7)^5 \cdot (3x - 7)' = 6(3x - 7)^5 \cdot 3 = 18(3x - 7)^5.$$

Відповідь. $y'(x) = 18(3x - 7)^5$.

$$\begin{aligned}
 8) \ y'(x) &= \left(\left(\frac{x^2}{2} + 4x - 1 \right)^{-6} \right)' = -6 \left(\frac{x^2}{2} + 4x - 1 \right)^{-7} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + 4x - 1 \right)' = \\
 &= -6 \left(\frac{x^2}{2} + 4x - 1 \right)^{-7} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2x + 4 \cdot 1 - 0 \right) = -6 \left(\frac{x^2}{2} + 4x - 1 \right)^{-7} \cdot (x + 4) = \\
 &= -6(x + 4) \left(\frac{x^2}{2} + 4x - 1 \right)^{-7}.
 \end{aligned}$$

Відповідь. $y'(x) = -6(x + 4) \left(\frac{x^2}{2} + 4x - 1 \right)^{-7}.$

Приклад 7. Знайти значення похідної функції в точці x_0 :

- 1) $f(x) = \sqrt{9 - 4x}, x_0 = 2;$ 3) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2x-1}}, x_0 = 0;$
 2) $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}, x_0 = \frac{\pi}{6};$ 4) $f(x) = (\cos 3x + 6)^3, x_0 = 0.$

Розв'язання. 2) Спростимо функцію, для цього застосуємо формулу косинуса подвійного аргументу:

$$f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = \cos x.$$

Тоді

$$f'(x) = \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right)' = (\cos x)' = -\sin x.$$

В точці $x_0 = \frac{\pi}{6}$ маємо:

$$f' \left(\frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} = -0,5.$$

Відповідь. $f' \left(\frac{\pi}{6} \right) = -0,5.$