ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ № 4 «Логарифмічні нерівності»

1. Розв'язати нерівність:

1) $\log_5(x+1)>2$.

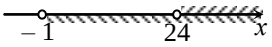
Розв'язання. ОДЗ: підлогарифмічний вираз додатній, тобто

$$x+1>0 \Rightarrow x>-1 \Rightarrow x\in(-1;+\infty).$$

Задана нерівність відноситься до найпростіших логарифмічних нерівностей. Її розв'язок

$$x+1>5^2 \Rightarrow x+1>25 \Rightarrow x>24 \Rightarrow x\in(24;+\infty).$$

Знаходимо перетин з ОДЗ.



Тоді остаточно маємо, що $x\in(24;+\infty)$.

Відповідь. $x\in(24;+\infty)$.

2) $\log_4(x+1)<\log_4(2x+3)$.

Розв'язання. Задана нерівність еквівалентна системі

$$\begin{cases} x+1<2x+3, \\ x+1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2, \\ x>-1 \end{cases} \Rightarrow x>-1 \Rightarrow x\in(-1;+\infty).$$

Відповідь. $x\in(-1;+\infty)$.

3) $\log_x(x+4)<1$.

Розв'язання. ОДЗ: підлогарифмічний вираз повинен бути додатним, а основа логарифма – більшою нуля та не дорівнювати одиниці:

$$\begin{cases} x+4>0, \\ x>0, \\ x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-4, \\ x>0, \\ x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow x\in(0;1)\cup(1;+\infty).$$

Розглянемо два випадки щодо основи логарифма.

I. $x\in(0;1) \Rightarrow \bigcap$ОДЗ: $x\in(0;1)$.

Тоді нерівність:

$$\log_x(x+4)<1 \Rightarrow x+4>x^1 \Rightarrow \cancel{x}+4>\cancel{x} \Rightarrow 4>0.$$

У результаті перетворень отримали правильну числову нерівність, отже, вона має розв'язки $\forall x\in R$. Перетинаємо з проміжком, на якому розглядаємо: $x\in(0;1)$.

II. $x\in(1;+\infty) \Rightarrow \bigcap$ОДЗ: $x\in(1;+\infty)$.

Для такої основи нерівність еквівалентна наступній алгебраїчній нерівності:

$$\log_x(x+4)<1 \Rightarrow x+4<x^1 \Rightarrow \cancel{x}+4<\cancel{x} \Rightarrow 4<0.$$

Отримали неправильну числову нерівність, отже, розв'язків немає. Перетин з проміжком дає $x\in\varnothing$.

Розв'язок заданої нерівності:

$$\begin{bmatrix} x\in(0;1), \\ x\in\varnothing \end{bmatrix} \Rightarrow x\in(0;1).$$

Відповідь. $x\in(0;1)$.

4) $\log_3\dfrac{1+2x}{x+1}<1$; 5) $\log_{\frac{1}{5}}\left(2x^2+5x+1\right)<0$;

6) $\log_{\frac{1}{3}}(20-x) \le \log_{\frac{1}{3}}\left(2(x+1)^2\right)$; 7) $\log_{x+1}\dfrac{3x}{5x-8} > 1$;

8) $\log_{x+1} 12 > \log_{x+1} 2$.

Розв'язання. Знаходимо ОДЗ:

$$\begin{cases} x+1>0, \\ x+1\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1>0, \\ x+1\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1, \\ x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow x\in(-1;0)\cup(0;+\infty).$$

Для розв'язування заданої нерівності розглянемо два випадки щодо основи логарифма.

I. $x+1\in(0;1)$ або $x\in(-1;0) \Rightarrow \bigcap$ ОДЗ: $x\in(-1;0)$.

У цьому випадку приходимо до нерівності:

$$12<2.$$

Отримали неправильну числову нерівність, отже, $x\in\varnothing$. Перетинаємо з проміжком $x\in(-1;0)$, на якому розглядаємо: $x\in\varnothing$.

II. $x+1\in(1;+\infty)\Rightarrow x\in(0;+\infty) \Rightarrow \bigcap$ ОДЗ: $x\in(0;+\infty)$.

Задану нерівність можна привести до нерівності

$$12>2 -$$

правильна числова нерівність, а отже, $x\in R$.

Перетинаємо з проміжком II: $x\in(0;+\infty)$.

Випадки I, II не виконуються одночасно, а тому розв'язок вихідної нерівності є їх об'єднанням:

$$\begin{bmatrix} x\in\varnothing, \\ x\in(0;+\infty) \end{bmatrix} \Rightarrow x\in(0;+\infty).$$

Відповідь. $x\in(0;+\infty)$.

9) $\log_x^2 5^{\sqrt{2}} - \log_x 5 \ge 0$; 10) $\log_{\frac{1}{6}}(x+4) > \log_{\frac{1}{6}}\left(x^2+2x-2\right)$;

11) $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 8 \ge 0$. ОДЗ: $x>0\Rightarrow x\in(0;+\infty)$

Розв'язання. Задана нерівність є квадратною відносно $\log_3 x$. Розв'яжемо її спочатку відносно цього логарифма (оскільки знак нерівності $\ge$, то розв'язки лежать поза коренями). За теоремою Вієта маємо, що $\log_3 x_1 = -2, \log_3 x_2 = 4$, тоді

$$\log_3 x\in(-\infty;-2]\cup[4;+\infty)$$

або у вигляді сукупності

$$\begin{bmatrix} \log_3 x\in(-\infty;-2] \\ \log_3 x\in[4;+\infty) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \log_3 x\le -2 \\ \log_3 x\ge 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x\le 3^{-2} \\ x\ge 3^4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x\le \dfrac{1}{9} \\ x\ge 81 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{9}\right] \\ x\in[81;+\infty) \end{bmatrix} \Rightarrow x\in\left(-\infty;\frac{1}{9}\right]\cup[81;+\infty).$$

$\bigcap$ ОДЗ: $x\in\left(0;\dfrac{1}{9}\right]\cup[81;+\infty)$.

Відповідь. $x\in\left(0;\dfrac{1}{9}\right]\cup[81;+\infty)$.

12) $\log_8\left(x^2-4x+3\right)<1$; 13) $\log_{0,5}\log_8\dfrac{x^2-2x}{x-3}<0$;

14) $\sqrt{\log_{0,5}\left(x^2+4x-4\right)}<1$; 15) $\log_{0,5}x+\log_{0,5}(x+1)\geq 1$;

16) $\log_2\log_{\frac{1}{3}}\log_5 x>0$.

Розв'язання. Знаходимо ОДЗ:

$$\begin{cases} x>0, \\ \log_5 x>0, \\ \log_{\frac{1}{3}}\log_5 x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ x>5^0, \\ \log_5 x<\left(\dfrac{1}{3}\right)^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ x>1, \\ \log_5 x<1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x>1, \\ x<5^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1, \\ x<5 \end{cases} \Rightarrow x\in(1;5).$$

Переходимо до розв'язування нерівності:

$$\log_{\frac{1}{3}}\log_5 x>2^0 \text{ або } \log_{\frac{1}{3}}\log_5 x>1,$$

$$\log_5 x<\left(\frac{1}{3}\right)^1 \Rightarrow \log_5 x<\frac{1}{3},$$

$$x<5^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x<\sqrt[3]{5} \Rightarrow x\in\left(-\infty;\sqrt[3]{5}\right).$$

$\bigcap$ ОДЗ: $x\in\left(1;\sqrt[3]{5}\right)$.

Відповідь. $x\in\left(1;\sqrt[3]{5}\right)$.

17) $3+\log_2 x^2-\log_2^2(-x)\geq 0$. ОДЗ: $\begin{cases} x^2>0, \\ -x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 0, \\ x<0 \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;0)$

Розв'язання. До другого доданку лівої частини застосуємо властивість логарифмів:

$$3+2\log_2|x|-\log_2^2(-x)\geq 0.$$

Оскільки, згідно з ОДЗ, $x<0$, то $|x|=-x$, тоді нерівність приймає вигляд:

$$3+2\log_2(-x)-\log_2^2(-x)\geq 0.$$

Отримуємо квадратну нерівність відносно $\log_2(-x)$:

$$-\log_2^2(-x)+2\log_2(-x)+3\geq 0, \Big| :(-1)$$

$$\log_2^2(-x)-2\log_2(-x)-3\leq 0.$$

Розв'язки лежать між коренями $\log_2(-x)_1=-1$ та $\log_2(-x)_2=3$, тобто

$$\log_2(-x)\in[-1;3]\Rightarrow \begin{cases} \log_2(-x)\geq -1, \\ \log_2(-x)\leq 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x\geq 2^{-1}, \\ -x\leq 2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x\geq \dfrac{1}{2}, \\ -x\leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leq -\dfrac{1}{2}, \\ x\geq -8 \end{cases} \Rightarrow x\in\left[-8;-\frac{1}{2}\right].$$

$\bigcap$ ОДЗ: $x \in \left[-8; -\frac{1}{2}\right]$.

Відповідь. $x \in \left[-8; -\frac{1}{2}\right]$.

18) $\log_3 x + \log_x 9 > 2$; 19) $\frac{1}{3-\lg x} < 1 - \frac{1}{2\lg x}$; 120) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$;

21) $\log_{3-x}(x-2{,}5) > 0$; 22) $x^{\lg x - 1} \le 100$; 23) $x^{\lg x} > 10$; 24) $\log_{x-3}\left(x^2 - 4x + 3\right) < 0$;

25) $\log_{2x-5}(5x-1) \ge 1$.

ОДЗ: $\begin{cases} 5x-1>0, \\ 2x-5>0, \\ 2x-5 \ne 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0{,}2, \\ x > \frac{5}{2}, \\ x \ne 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (2{,}5; 3) \bigcup (3; +\infty)$

Розв'язання. Для розв'язування нерівності розглянемо два випадки стосовно основи логарифма.

I. $0 < 2x-5 < 1 \Rightarrow 2{,}5 < x < 3 \Rightarrow \bigcap$ ОДЗ: $x \in (2{,}5; 3)$.

У цьому випадку вихідна нерівність приймає вигляд:

$$5x-1 \le (2x-5)^1 \text{ або } 5x-1 \le 2x-5,$$
$$3x \le -4, \mid :3$$
$$x \le -\frac{4}{3} \Rightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right].$$

$\bigcap$ I: $x \in \varnothing$.

II. $2x-5 > 1 \Rightarrow x > 3 \Rightarrow \bigcap$ ОДЗ: $x \in (3; +\infty)$.

Задана нерівність приймає вигляд:

$$5x-1 \ge (2x-5)^1 \text{ або } 5x-1 \ge 2x-5,$$
$$3x \ge -4, \mid :3$$
$$x \ge -\frac{4}{3} \Rightarrow x \in \left[-\frac{4}{3}; +\infty\right).$$

$\bigcap$ II: $x \in (3; +\infty)$.

Таким чином, розв'язок заданої нерівності задається сукупністю

$$\begin{bmatrix} x \in \varnothing, \\ x \in (3; +\infty) \end{bmatrix} \Rightarrow x \in (3; +\infty).$$

Відповідь. $x \in (3; +\infty)$.

26) $\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(2x^2 + x - 1\right) \ge \log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(11x - 6 - 3x^2\right)$; 27) $\log_{x^2+1} 10 < 1$;

28) $\log_{3x-3} 3 + \log_{(x-1)^2} 27 \ge 2$; 29) $\log_x 3 + 2\log_{3x} 3 - 6\log_{9x} 3 \le 0$;

30) $\log_{x-1,8}(2x-2) > \log_{x-1,8}(12-2x)$; 31) $\log_{\sqrt{2}}\left(x^2 + 13x\right) \ge \log_{\sqrt{2}}(x-20)$;

32) $\log_{\frac{1}{4}} x - \log_{\frac{1}{4}} 40 \le \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{8}$; 33) $\log_{|x-1|} 2^{-1} > \frac{1}{2}$;

34) $\log_x(x+4) - \log_{x^2}\left(x^2 - 10x + 21\right) \ge 0$; 35) $\sqrt{10\log_2 x + 14} > \log_2 x + 3$;

36) $\log_2 \log_{x+1}(3x+2) \le 0$; 37) $\log_x \dfrac{3x-1}{x^2+1} > 0$; 38) $\log_2\left(x^2+4x+3\right) > 3$;

39) $\log_{0,5}(2x-4) < \log_{0,5}(x+1)$; 40) $\log_2^4 x - \log_{\frac{1}{2}}^2 \dfrac{x^3}{8} + 9\log_2 \dfrac{32}{x^2} < 4\log_{\frac{1}{2}}^2 x$.

2. Методом раціоналізації розв'язати нерівність:

1) $\log_{x^2}(2-x) \le 1$.

Розв'язання. Знаходимо ОДЗ:

$$\begin{cases} 2-x>0, \\ x^2>0, \\ x^2 \ne 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2, \\ x \ne 0, \\ x \ne \pm 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty;-1) \cup (-1;0) \cup (0;1) \cup (1;2).$$

Застосуємо метод раціоналізації. Перейдемо в логарифмі до сталої основи (наприклад, до основи e), щоб можна було вказати характер монотонності логарифмічної функції:

$$\frac{\ln(2-x)}{\ln x^2} \le 1 \Rightarrow \frac{\ln(2-x)}{\ln x^2} - 1 \le 0 \Rightarrow \frac{\ln(2-x)-\ln x^2}{\ln x^2} \le 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(2-x)-\ln x^2}{\ln x^2 - 0} \le 0 \Rightarrow \frac{\ln(2-x)-\ln x^2}{\ln x^2 - \ln 1} \le 0.$$

Оскільки $e>1$, то функція $y=\ln x \uparrow$, а тоді після раціоналізації з урахуванням ОДЗ будемо мати:

$$\frac{2-x-x^2}{x^2-1} \le 0 \text{ або } \frac{x^2+x-2}{x^2-1} \ge 0.$$

Розв'язуємо останню нерівність методом інтервалів, для цього чисельник і знаменник представляємо у вигляді добутку лінійних множників:

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} \ge 0 \Rightarrow \frac{x+2}{x+1} \ge 0,\ x \ne 1.$$

Розв'язок останньої нерівності: $x \in (-\infty;-2] \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$.

$\cap$ОДЗ: $x \in (-\infty;-2] \cup (-1;0) \cup (0;1) \cup (1;2)$.

Відповідь. $x \in (-\infty;-2] \cup (-1;0) \cup (0;1) \cup (1;2)$.

2) $\log_{x^2}(2-x) \le 1$ (без переходу до нової основи).

Розв'язання. ОДЗ: $x \in (-\infty;-1) \cup (-1;0) \cup (0;1) \cup (1;2)$.

Перепишемо задану нерівність у вигляді:

$$\log_{x^2}(2-x) \le 1 \Rightarrow \log_{x^2}(2-x) - 1 \le 0 \Rightarrow \log_{x^2}(2-x) - \log_{x^2} x^2 \le 0.$$

Переходимо до еквівалентної нерівності:

$$\left(x^2-1\right)\left(2-x-x^2\right) \le 0$$

Розв'язуємо її методом інтервалів:

$$-(x-1)(x+1)(x-1)(x+2) \le 0 \Rightarrow (x-1)^2(x+1)(x+2) \ge 0,$$

$$x \in (-\infty;-2] \cup [-1;1] \cup [1;+\infty).$$

$\bigcap$ ОДЗ : $x \in (-\infty; -2] \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$.

Відповідь. $x \in (-\infty; -2] \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2)$.

3) $\log_{x^2}(2-x) \le 1$; 4) $\log_{2x-3}(10-3x) \ge 0$; 5) $\dfrac{\log_4(2^x-1)}{x-1} \le 0$;

6) $\log_x(x+2) < 2$; 7) $\dfrac{x^2-4}{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)} < 0$.