Логічна складова підготовки викладача середньої школи

План.

1) **Історичний шлях розвитку логіки**
2) **Що треба знати з логіки вчителю математики середньої школи**
3) **Основні формально-логічні закони**

1) Історичний шлях розвитку логіки



Джерело:

Випуск 70 Серія: Математичні науки *НАУКОВІ ЗАПИСКИ*
УДК 517.95

СУЧАСНІ НАПРЯМИ РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

В.М. ЄВЛАДЕНКО

Логіка (грецьк. **loqos** – слово, думка, розум) сукупність наук про закони і форми людського мислення, про математико-логічні закони числень (**формалізованих мов**), про найбільш загальні **(діалектичні)** закони мислення. Всі ці науки вивчають одне і те ж людське мислення, але відрізняються тим, які саме закони мислення складають їх предмет. Так, у **формальній логіці** досліджуються закони **вивідного знання**, тобто знання, одержаного із раніше встановлених і перевірених істин, опираючись тільки на закони і правила мислення. Формальна логіка складається із двох наук: **традиційної логіки** і **математичної логіки**.

Традиційна логіка [1] - це перша ступінь логіки вивідного знання, ніби арифметика логіки. Вона вивчає загальнолюдські закони логіки (**тотожності, протиріччя, виключеного третього, достатньої основи**), та досліджує їх застосування в процесі побудови **умовиводів**. Вона також вивчає загальнолюдські форми мислення (**судження** і **поняття**) та форми зв'язку думок в умовиводі (**індукція, дедукція, традукція, аналогія** і ін.), які об'єктивно відображають існуючі логічні закони і зв'язки між предметами і явищами реального світу.

Другою, вищою ступінню вивідного знання, ніби алгеброю формальної логіки, є **математична логіка** [2], в якій широко застосовуються математичні методи і спеціальний апарат формалізованих мов, так звані **числення**. Математична логіка вивчає в основному ті ж закони мислення, що й традиційна логіка, досліджуючи операції з тими ж самими формами міркувань, але іде істотно далі по шляху їх абстрагування. Це відкриває широкі можливості для пізнання нових закономірностей мислення, з якими приходиться зустрічатися при розв'язуванні складних логічних задач у математиці, кібернетиці, інформатиці, при проектуванні різного роду автоматів та ЕОМ.

***Джерело*: Конверський А. Є. Логіка (традиційна та сучасна): Підручник для студентів вищих навчальних закладів. – К.: Центр учбової літератури, 2008. – 536 с.**

Сучасна формальна логіка —другий етап у розвитку логіки як науки

Логіка як наука є єдиною теорією. Ця єдність обумовлена тим, що і для традиційної, і для сучасної логіки предмет і метод залишаються одними і тими самими. Відмінність полягає лише в тому, що в сучасній логіці метод формалізації застосовується послідовніше. Це й стало однією з підстав називати сучасну логіку математичною.

Коли ж ми даємо визначення традиційної логіки, то зазначаємо, що це такий розділ логіки як науки про мислення, в якому застосовується метод формалізації у напівформальному вигляді (тобто, поряд із штучною символікою використовуються фрагменти природної мови, наприклад, ***«Будь-яке S є P»***). ***Сучасна логіка застосовує метод формалізації в чистому вигляді, виключаючи будь-які засоби природної мови.***

У сучасній логіці умовно можна виділити такі історичні періоди:

— ***передісторія сучасної логіки;***

— ***період алгебри логіки;***

— ***період розробки логіки як теорії обгрунтування математики;***

— ***період розробки металогіки, логічної семантики, некласичної логіки.***

Передісторія сучасної логіки пов'язана з діяльністю ***Т. Гоббса, Р. Декарта, і особливо Г. Лейбніца.***

У ***Т. Гоббса*** виникла ідея розглядати процес міркування як числення, ***Р. Декарт*** ввів і обгрунтував такі важливі для сучасної логіки поняття, як *«змінна величина» і «функція»*, ***Г. Лейбніц*** вводить символи для позначення логічних постійних.

Період алгебри логіки починається з опублікування ***в 1847 р.*** англійським логіком ***Дж. Булем*** книжки «Математичний аналіз логіки». Дж. Буль вводить у логіку алгебраїчну символіку для побудови логічних числень, розглядає процес умовиводу як розв'язання логічних рівностей.

Розробка логіки як теорії обгрунтування математики пов'язана з кризовими ситуаціями, що в науці і, зокрема в математиці, мали місце на межі ***XIX—XX ст.*** Коли виявилося, що в основі теорії множин, яка застосовувалася для обгрунтування математики, містяться нерозв'язні суперечності, виникла необхідність звернення до логіки, оскільки в ній сподівалися знайти засоби усунення кризових ситуацій у підвалинах математики. Але для цього потрібно було, щоб логіка мала досить ефективний інструментарій для вивчення логічної структури наукової теорії. Це й зумовило розробку німецьким логіком ***Готлобом Фреге*** аксіоматичної побудови числення висловлювань, теорії квантифікації, основних принципів логічної семантики.

Сама теорія логічного обгрунтування математики була викладена англійськими логіками **Бертраном Расселом** і ***Альфредом Уайтхедом*** в їхній спільній праці *«Принципи математики»*.

Нарешті, період розробки металогіки, логічної семантики пов'язаний з діяльністю ***Львівсько-Варшавської школи*, працями *Р. Карнапа, А. Тарського, Я. Лукасевича, К. Льюїса та ін.***

У кожному з цих періодів можна знайти продовження і поглиблення тих проблем, які були порушені у традиційній логіці. Це також є підставою розглядати логіку як єдину систему.

2) Що треба знати з логіки вчителю математики середньої школи

Знання законів логіки забезпечує вміння цілеспрямовано організовувати процес мислення. Ясність думки приводить до ясності її викладення. Це важливо для тих, что вивчає математику, але вкрай важливо для тих, хто вчить математики інших. Закони логіки сприяли створенню ЕОМ у XX столітті, забезпечили стрімкий стрибок науково-технічного прогресу. Саме тому вчителі математики, інформатики повинні мати достатню логічну підготовку.

Огляд від ШІ

Учитель математики повинен володіти логікою на двох рівнях: **предметному** (щоб правильно викладати математику) та **методичному** (щоб будувати зрозумілий навчальний процес).

Ось основні напрями логіки, якими має володіти сучасний учитель:

1. Формальна (математична) логіка

Це безпосередній фундамент математики. Учитель має вільно оперувати такими поняттями:

- **Логічні операції:** кон'юнкція (і), диз'юнкція (або), заперечення (ні), імплікація (якщо..., то...) та еквівалентність.
- **Квантори:** квантор загальності (для всіх) та квантор існування (існує). Учитель повинен вміти грамотно читати й записувати математичні твердження.
- **Закони логіки:** закон виключеного третього, закон суперечності, закони Де Моргана тощо.

2. Логіка математичного доведення

Вчитель математики — це людина, яка вчить доводити істину. Він повинен знати та вміти пояснити:

- **Пряме доведення:** виведення твердження крок за кроком з аксіом чи раніше доведених теорем.
- **Доведення від супротивного:** припущення хибності тези з метою знайти логічну суперечність.
- **Метод математичної індукції:** алгоритм доведення тверджень для всього ряду натуральних чисел.
- **Роботу з контрприкладами:** вміння спростувати хибне загальне твердження одним правильним прикладом.

3. Логіка побудови математичних понять

Учитель має розуміти, як влаштована структура математичної теорії, щоб не допускати логічних помилок («порочного кола» у визначеннях):

- **Структура визначення:** розуміння різниці між родовими ознаками та видовими відмінностями (наприклад, квадрат — це *прямокутник* (рід), у якого *всі сторони рівні* (видова відмінність)).
- **Необхідні та достатні умови:** вміння чітко розмежовувати ці поняття (наприклад, «ділення числа на 2 є *необхідною*, але *недостатньою* умовою для того, щоб воно ділилося на 6»).
- **Пряма, обернена, протилежна та протилежна до оберненої теореми:** розуміння того, які з цих тверджень є еквівалентними (якщо пряма теорема істинна, то протилежна до оберненої завжди істинна, а от просто обернена — не обов'язково).

4. Педагогічна та дидактична логіка

Це логіка викладання, яка допомагає учням засвоїти матеріал:

- **Перехід від конкретного до абстрактного (індукція):** вміння показати закономірність на життєвих прикладах, а потім вивести загальну формулу.
- **Перехід від загального до конкретного (дедукція):** вміння взяти готову теорему чи правило і застосувати її до розв'язання специфічної задачі.
- **Логічна послідовність курсу:** розуміння, чому не можна вивчати тему Б без знання теми А (наприклад, вивчення інтегралів неможливе без розуміння похідної).

5. Психологічна логіка (аналіз помилок)

Учитель повинен бачити «поламану» логіку в міркуваннях учнів:

- Вміти знаходити логічні помилки в роботах (наприклад, коли учень робить правильний висновок з хибної посилки, або використовує кругове обґрунтування).
- Розуміти когнітивні пастки, в які потрапляють діти, та допомагати їм вибудовувати чіткі причиново-наслідкові зв'язки.

Джерело: **Конверський А. Є. Логіка (традиційна та сучасна): Підручник для студентів вищих навчальних закладів. – К.: Центр учбової літератури, 2008. – 536 с.**

Є дві точки зору на природу і місію логіки як науки і навчальної дисципліни. Одна точка зору полягає в трактовці логіки як суми правил управління мисленнєвою діяльністю, а друга – в зведенні логіки до числень.



Логіка є **єдиною** наукою, не дивлячись на те, що в ній ми виділяємо традиційну логіку і сучасну. Традиційна логіка і сучасна логіка своїм предметом мають вивідне знання, а методом формалізацію. Існування двох хронологічних етапів цієї нау ки обумовлено ступенем досконалості методу формалізації.

В традиційній логіці метод формалізації застосовувався у напівформальному вигляді, а в сучасній логіці цей метод застосовується в чистому вигляді. Звідси і різниця в переліку центральних категорій у традиційній логіці і сучасній логіці. В традиційній логіці такими категоріями є “поняття”, “судження”, “умовивід”, а в сучасній логіці: висловлювання і терміни. Також вони відрізняються і завданнями, що розв’язують.

Традиційна логіка формує культуру мислення, а сучасна логіка досліджує функціонування мислення в мові науки, іншими словами аналізує принципи побудови наукових теорій, принципи трансформації наукових теорій, принципи обґрунтування наукових теорій. Коли ми зазначаємо, що традиційна логіка формує культуру мислення, то це означає, що вона є засобом побудови доведень, спростувань, засобом ведення дискусій, засобом боротьби проти еклектики і софістики, як це було і 2000 років потому.
Формування культури мислення є одним із чинників практичного значення логіки, і це, фактично, зумовило універсальність логіки як навчальної дисципліни.

Що ж означає поняття «культура мислення»? Насамперед – усвідомлене відношення до процесу міркування, тобто вміння правильно будувати доведення, спростування, проводити аналогії, висувати гіпотези, знаходити й усувати помилки у своїх і чужих міркуваннях.

Подібно до того, як знання правил граматики дає нам можливість досконало будувати слова, речення, фрази, так і знання правил та законів логіки, забезпечуючи культуру мислення, зумовлює необхідну систематичність, послідовність, обгрунтованість і переконливість наших міркувань.

Людина, яка не вивчала логіки, може «відчувати» логічні помилки в міркуваннях, свідомо ж і кваліфіковано їх позбутися вона не спроможна.

Складові логічного мислення (Ірина ЛОВ'ЯНОВА ФОРМУВАННЯ КОМПОНЕНТІВ ЛОГІЧНОГО МИСЛЕННЯ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ УЧНІВ ДОВЕДЕННЮ ТЕОРЕМ Наукові записки. – Випуск 82. Частина 2. – Серія: Педагогічні науки):

1) здатність абстрагувати поняття від дійсності, формувати і перебирати альтернативні гіпотези;
2) здатність робити предметом аналізу власну думку;
3) здатність відокремлювати логічні операції від тих об'єктів, над якими вони проводяться, класифікувати висловлювання за їх логічним типом;
4) уміння здійснювати формально-логічні операції;
5) уміння дати означення відомого поняття;
6) знання реального змісту слів «і», «або», «не» і словосполучень «якщо…, то…», «тоді і тільки тоді, коли…» як логічних зв'язків;
7) уміння виокремити логічну форму речення;
8) уміння сформулювати в стверджувальній формі заперечення складних речень із кванторами;
9) знання значень слів «слід», «рівнозначно», «необхідно», «достатньо»;
10) розуміння значень і навички правильного вживання словосполучень типу «не менш», «не більш», «один і тільки один»;
11) уміння перевірити правильність міркування, виявити грубу логічну помилку;
12) знання найбільш уживаних прийомів доведення.

3) Основні формально-логічні закони

***Джерело*: Конверський А. Є. Логіка (традиційна та сучасна): Підручник для студентів вищих навчальних закладів. – К.: Центр учбової літератури, 2008. – 536 с.**

А б с т р а к т н е мислення – це ступінь процесу пізнання, який слідує за чуттєвим пізнанням.

Абстрактне мислення має властиві йому форми і підпорядковується відповідним законам. Формами абстрактного мислення є поняття, судження, умовивід.

Кожна думка має форму і зміст. Змістом думки є те, про що ми мислимо. А формою думки є спосіб зв'язку структурних елементів або складових частин думки. Особливістю форми думки є те, що вона незалежна, інваріантна від змісту думки. Одна і та сама форма може містити різний зміст. У цій незалежності є водночас і перевага, і недолік. Перевага в тому, що різноманітний зміст ми можемо стандартизувати, а значить, подавати його у вигляді системи. Недоліком є те, що при цьому ми відсуваємо на задній план тонкощі змістовних відтінків одержаної інформації. Ця особливість форми думки (тобто її незалежність, інваріантність щодо змісту) визначає етимологію слова «логічний» (логічний аналіз, логічний підхід, логічна форма тощо). Логічний – означає «здатний утримувати незмінним, інваріантним зміст думки за усіх перетвореннь і перестановок». А оскільки (як ми зазначали раніше) будь-яка думка реалізується у мові, то властивість речень мови при будь-яких перетвореннях зберігати незмінними їх значення (це можуть бути оцінки: «істинно», «хибно». «правдоподібно», «правильно побудовано», «коректно» тощо) є їх логічною властивістю. У цьому розумінні ми говоримо: логіка мови, логіка теорії тощо.

Отже, л о г і ч н і ф о р м и – це види мисленнєвих структур, які незалежні від конкретного змісту думки. Вони – своєрідний будівельний матеріал, з якого будуються конкретні міркування. Це й зумовлює те, що логічні форми (або форми мислення) складають інформативний, змістовний бік міркування.

Основні формально-логічні закони

Варто зауважити, що логіку цікавлять не тільки форми мислення, а й ті суттєві відношення, які виникають між ними у процесі міркування. Іншими словами, не будь-яка сукупність понять, суджень, умовиводів дає нам ефективні міркування, а лише та сукупність, де між формами мислення є послідовний, несуперечливий, обгрунтований зв'язок. Ці ознаки ефективних міркувань забезпечують логічні закони.

Отже, л о г і ч н и м з а к о н о м називають, внутрішній суттєвий, необхідний зв'язок між логічними формами у процесі побудови міркувань.

Існує чотири головні логічні закони:

 А = А, або А ⊃ А **закон тотожності;** «Будь-яка думка протягом даного міркування (за будь-яких перетворень) повинна зберігати один і той самий зміст». Звідси випливає важлива вимога: забороняється тотожні думки приймати за різні, а різні – за тотожні.

Приклад. Поясніть, що порушено закон тотожності

Звернемося до відомого софізму:

6 і 3 є парне і непарне.
6 і 3 є дев'ять.
Отже, 9 є парне і непарне.

Закон тотожності застерігає: перш ніж починати обговорення будь-якого питання, потрібно чітко визначити його зміст, а в процесі обговорення треба чітко витримувати головні визначення цього змісту, не підміняти даний зміст іншим, не змішувати понять, не припускати двозначностей. Тобто, думка, зафіксована в певному мовному виразі, за всіх перетворень повинна залишатися тотожною сама по собі в межах конкретного міркування

 $A \vee \overline{A}$ **закон виключеного третього;** закон виключеного третього є така вимога до процесу міркування, з якої випливає, що з двох суперечливих суджень, в одному з яких стверджується те, що заперечується у другому, – одне обов'язково істинне.

С у п е р е ч л и в и м и називаються судження, які не можуть бути одночасно ні істинними, ні хибними.

Зазначимо, що закон виключеного третього можна застосовувати лише до таких суджень:

а) одне судження щось стверджує щодо одиничного предмета, а друге – це ж саме заперечує щодо цього ж предмета, взятого в одному і тому ж самому відношенні, в один і той же самий час: «А є Р» і «А не є Р»;

б) одне судження щось стверджує відносно всього класу предметів, а друге – це саме заперечує відносно деякої частини цього класу предметів: «Всі S є Р» і «Деякі S не є Р»;

в) одне судження щось заперечує відносно всього класу предметів, а друге – це саме стверджує відносно деякої частини предметів цього класу: «Жодне S не є Р» і «Деякі S є Р».

 $\overline{A \wedge \overline{A}}$ **закон протиріччя;** не можуть бути одночасно істинними два судження, з яких одне дещо стверджує про предмет, а друге – заперечує те саме про цей же предмет, у той самий час, в одному і тому ж самому відношенні.

Розглянемо такі два судження:

1. Будь-який мешканець нашого будинку має вищу освіту;

і

2. Жоден із мешканців нашого будинку не має вищої освіти.

Щоб визначити, яке з них істинне необхідно звернутися до перевірки. Логіка ж у цій ситуації стверджує:

1) ці два судження не можуть бути одночасно істинними;

2) якщо встановлена істинність одного з протилежних суджень, то з цього обов’язково випливає хибність другого;

3) якщо встановлена хибність одного з них, то друге може бути будь-яким.

 $A \supset B$ **закон достатньої підстави**: «будь-яке істинне судження повинно бути обгрунтоване іншими судженнями, істинність яких уже встановлена»

Істинність і формальна правильність міркування

Загальновизнаним є положення, що для того, щоб у конкретному міркуванні вивідне знання було істинним, необхідно дотримуватися таких умов:

а) вихідні твердження обов'язково повині бути істинними;

б) під час міркування між вихідними твердженнями необхідно встановити зв'язок, який відповідає законам і правилам логіки.

Мова логіки – це насамперед її метод. Прийнято говорити не «штучна мова логіки», а «формалізована мова логіки». З легкої руки німецького філософа ХУШ ст. І.Канта логіці приписали прикметник «формальна», тому логіку стали називати формальною, а її метод – формалізацією.

Ф о р м а л і з а ц і я у логіці – це виявлення логічної структури наших думок. А логічною структурою думки є форма зв'язку понять у судженні, форма зв'язку суджень між собою у складніших судженнях, форма зв'язку суджень у складі умовиводу.

Природна мова не могла стати методом логіки з кількох причин. Головні з них такі:

а) багатозначність мовних виразів;

З ***багатозначністю виразів природної мови*** ми зустрічаємося постійно.

Розглянемо, наприклад, кілька суджень:

1. *Будь-який трикутник є геометричною фігурою.*

2. *Місяць є природним супутником Землі.*

3. *Є гіпотези, які не мають обгрунтування.*

4. *Платон є давньогрецьким філософом.*

Спільним для цих чотирьох суджень є те, що у них вживається слово ***«є»***, яке має, проте, різні значення. У першому судженні — слово ***«є»*** позначає відношення включення одного класу предметів до іншого, у другому — відношення рівності, тотожності двох предметів, у третьому — існування певного предмета, у четвертому — відношення належності індивідуального предмета до певного класу предметів. Тобто, з наведених прикладів стає очевидним, що виразам природної мови характерна ***багатозначність мовних виразів, коли одне і те саме слово вживається у різних смислах.***

б) семантична замкненість;
в) аморфність, невизначеність правил побудови мовних виразів і правил надання значень мовним виразам.