ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ № 1 «Поняття логарифма та його властивості»

1. Обчислити:

1) $\log_3 9$.

Розв'язання. $\log_3 9$ – це показник степеня, до якого потрібно піднести число 3 (основу логарифма), щоб отримати число 9 (підлогарифмічний вираз). Маємо, що $\log_3 9 = 2$, оскільки $3^2 = 9$.

Відповідь. 2.

2) $\log_2 \frac{1}{8}$; 3) $\log_5 25$; 4) $\log_{17} 17$; 5) $\log_{100} 1$; 6) $\log_{\frac{1}{6}} 6$; 7) $\log_8 2$; 8) $\lg 100$.

2. Встановити, чи є правильною рівність. У разі негативної відповіді, записати правильну рівність:

1) $\log_7 49 = -2$.

Розв'язання. Згідно з означенням логарифму

$$\log_7 49 = -2 \Leftrightarrow 49 = 7^{-2} \Rightarrow 49 = \frac{1}{7^2} \Rightarrow 49 = \frac{1}{49}.$$

Остання рівність неправильна, а тому й вихідна рівність $\log_7 49 = -2$ є неправильною.

Запишемо відповідну правильну рівність:

$$\log_7 49 = 2, \text{ оскільки } 49 = 7^2.$$

Відповідь. Рівність неправильна, правильною є рівність $\log_7 49 = 2$.

2) $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$; 3) $\log_5 125 = -3$; 4) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$; 5) $\log_{\frac{1}{9}} \left(3 \cdot \sqrt[3]{3}\right) = \frac{2}{3}$; 6) $\lg 0{,}0001 = 4$.

3. Знайти значення виразу:

1) $\log_2 16 \cdot \log_6 36 + \log_{0,25} 2 - \log_4 8$.

Розв'язання. Перетворюючи заданий вираз та використовуючи властивості логарифмів, будемо мати:

$$\log_2 16 \cdot \log_6 36 + \log_{0,25} 2 - \log_4 8 =$$

$$= \log_2 2^4 \cdot \log_6 6^2 + \log_{2^{-2}} 2 - \log_{2^2} 2^3 =$$

$$= 4 \cdot \log_2 2 \cdot 2 \cdot \log_6 6 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \log_2 2 - \frac{3}{2} \log_2 2 =$$

$$= 8 \cdot 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{3}{2} \cdot 1 = 8 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 8 - 2 = 6.$$

Відповідь. 6.

2) $\log_5 60 - \log_5 12 + \log_5 0{,}2 + \log_{0,5} 4 + \frac{\log_7 13}{\log_{49} 13} + \log_5 9 \cdot \log_3 25 +$

$$+ \frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}} (1 - \log_2 12)(1 - \log_6 12);$$

3) $2^{\log_{\sqrt{2}} 2{,}5} - 7^{\log_{343} 7{,}25^3} - 3^{4\log_9 2{,}5}$; 4) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_{1023} 1024$;

5) $\frac{\log_6 30}{\log_{30} 6} - \frac{\log_6 180}{\log_5 6} + \frac{(\log_{100} 81 + \log_{1000} 64)(\ln 5 + \ln 2)}{\ln 21 + \ln 10 - \ln 5 - \ln 7}$;

6) $\dfrac{\left(81^{\frac{1}{\log_5 9}}+3^{\frac{3}{\log_{\sqrt{6}} 3}}\right)\left(\sqrt{7}^{\frac{2}{\log_{25} 7}}-125^{\log_{25} 6}\right)}{409}$.

8) $\log_{\frac{a^2}{b^2}} b-\log_{\frac{a}{b}} \sqrt{a}+\log_b a^2$, якщо $\log_b a=5$.

Розв'язання. Потрібно всі логарифми за допомогою властивостей звести до логарифма $\log_b a$. Перетворимо заданий вираз:

$$\log_{\frac{a^2}{b^2}} b-\log_{\frac{a}{b}} \sqrt{a}+\log_b a^2=\frac{1}{\log_b \frac{a^2}{b^2}}-\frac{1}{2}\log_{\frac{a}{b}} a+2\log_b a=$$

$$=\frac{1}{\log_b a^2-\log_b b^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\log_a \frac{a}{b}}+2\cdot 5=$$

$$=\frac{1}{2\log_b a-2\log_b b}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\log_a a-\log_a b}+10=\frac{1}{2\cdot 5-2\cdot 1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\log_b a}}+10=$$

$$=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}}+10=\frac{81}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{4}{5}}=\frac{81}{8}-\frac{5}{8}=\frac{76}{8}=\frac{19}{2}.$$

Відповідь. $\dfrac{19}{2}$.

9) $\log_{175} 56$, якщо $\log_{14} 7=a$, $\log_{14} 5=b$.

Розв'язання. Наша задача – виразити $\log_{175} 56$ через $\log_{14} 7$ та $\log_{14} 5$. Перетворимо $\log_{175} 56$ за властивостями логарифмів:

$$\log_{175} 56=\log_{175}(4\cdot 14)=\log_{175} 4+\log_{175} 14=\log_{175} 2^2+\frac{1}{\log_{14} 175}=$$

$$=2\log_{175} 2+\frac{1}{\log_{14}(25\cdot 7)}=\frac{2}{\log_2 175}+\frac{1}{\log_{14} 25+\log_{14} 7}=\frac{2}{\log_2(25\cdot 7)}+\frac{1}{\log_{14} 5^2+a}=$$

$$=\frac{2}{\log_2 25+\log_2 7}+\frac{1}{2\cdot\log_{14} 5+a}=\frac{2}{\log_2 5^2+\log_2 7}+\frac{1}{2b+a}=$$

$$=\frac{2}{2\log_2 5+\log_2 7}+\frac{1}{2b+a}.$$

Знайдемо вираз для $\log_2 5$ та $\log_2 7$ через відомі логарифми $\log_{14} 7$ та $\log_{14} 5$:

$$\log_{14} 5=b\Rightarrow\frac{1}{\log_5 14}=b\Rightarrow\frac{1}{\log_5(2\cdot 7)}=b\Rightarrow\frac{1}{\log_5 2+\log_5 7}=b\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\log_5 2+\log_5 7=\frac{1}{b}\Rightarrow\frac{1}{\log_2 5}=\frac{1}{b}-\log_5 7=\frac{1}{b}-\frac{\log_{14} 7}{\log_{14} 5}=\frac{1}{b}-\frac{a}{b}=\frac{1-a}{b}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\log_2 5=\frac{b}{1-a}.$$

Аналогічно

$$\log_{14} 7 = a \Rightarrow \frac{1}{\log_7 14} = a \Rightarrow \frac{1}{\log_7 (2\cdot 7)} = a \Rightarrow \frac{1}{\log_7 2 + \log_7 7} = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{\log_2 7} + 1} = a \Rightarrow \frac{1}{\log_2 7} + 1 = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{\log_2 7} = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1-a}{a} \Rightarrow \log_2 7 = \frac{a}{1-a}.$$

Отже,

$$\log_{175} 56 = \frac{2}{2\log_2 5 + \log_2 7} + \frac{1}{2b+a} = \frac{2}{2\cdot\frac{b}{1-a} + \frac{a}{1-a}} + \frac{1}{2b+a} =$$

$$= \frac{2}{\frac{2b+a}{1-a}} + \frac{1}{2b+a} = \frac{2(1-a)}{2b+a} + \frac{1}{2b+a} = \frac{2-2a+1}{a+2b} = \frac{3-2a}{a+2b}.$$

Відповідь. $\frac{3-2a}{a+2b}$.

10) $3\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} + \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} b$, якщо $\log_b a = 3$;

11) $4\log_{\sqrt{ab}} \frac{\sqrt{a}}{b} + 3\log_{\sqrt{ab}} b^2 - \frac{2}{\log_b a}$, якщо $\log_a b = 6$;

12) $\log_{\sqrt[3]{ab}} \frac{b}{\sqrt[3]{a}} - \frac{2}{\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt[3]{ab}} + 5\log_b \sqrt[5]{b}$, якщо $\log_a b = 7$.