

Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет

М.І. Клименко, Ю.М. Стреляєв, Є.В. Панасенко, І.Г. Ткаченко,

МАТЕМАТИЧНА ЕКОНОМІКА

Навчально-методичний посібник
для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр»
напряму підготовки «Середня освіта. Математика»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол №
від

Запоріжжя
2020

УДК 511.2 + 512.62

ББК 22.132я73.

Клименко М.І., Стреляєв Ю.М., Панасенко Є.В., Ткаченко І.Г.
Математична економіка: навчально-методичний посібник для студентів
освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напряму підготовки «Середня
освіта. Математика». Запоріжжя: ЗНУ, 2020. 86с.

У посібнику викладено теоретичний матеріал та основні методи
розв'язання задач з математичної економіки. Текст містить достатню кількість
прикладів, які допоможуть студентам при вивченні даної дисципліни. Наведені
також варіанти індивідуальних типових завдань для самостійної роботи
студентів.

Навчальний посібник призначений для студентів освітньо-
кваліфікаційного рівня «бакалавр» напряму підготовки «Середня освіта.
Математика».

Рецензент: д. т. н., професор *С.М. Гребенюк*
Відповідальний за випуск *М.І. Клименко*

Зміст

ВСТУП

Тема 1. Загальні принципи економіко-математичного моделювання.
Модель Леонтьєва.

- 1.1 Предмет математичної економіки
- 1.2 Види економіко-математичних моделей
- 1.3 Статична модель міжгалузевого балансу (модель Леонтьєва)
- 1.4 Умова продуктивності у моделі Леонтьєва
- 1.5 Лінійна модель обміну (міжнародної торгівлі)

Запитання для самоперевірки

Задачі до теми 1

Тема 2. Поняття еластичності та її застосування. Співвідношення між сумарними, середніми та граничними величинами

- 2.1 Поняття та властивості еластичності
- 2.2 Види еластичності у економічних дослідженнях
- 2.3 Сумарні, середні та граничні величини у економіці

Запитання для самоперевірки

Задачі до теми 2

Тема 3. Макроекономічні виробничі функції

- 3.1 Поняття виробничої функції
- 3.2 Характеристики виробничої функції
- 3.3 Ізокванти та ізоклінали
- 3.4 Масштаб та ефективність виробництва
- 3.5 Однорідні виробничі функції. Виробничі функції зі сталою еластичністю
- 3.6 Побудова виробничих функцій. Метод найменших квадратів (МНК)
- 3.7 Побудова нелінійних моделей

3.8 Лінійна множинна регресія

Запитання для самоперевірки

Задачі до теми 3

Тема 4. Максимізація корисності та модель споживчого вибору

- 4.1 Функція корисності та задача споживчого вибору
- 4.2 Модель поведінки споживача

4.3 Залежність попиту споживача від зміни доходу

4.4 Залежність попиту від зміни цін

Запитання для самоперевірки

Задачі до теми 4

Тема 5. Диференціальні моделі економічної динаміки

5.1 Диференціальна модель насичення ринку

5.2 Модель природного зростання виробництва продукції

5.3 Моделі динаміки ринкової ціни та виробничих фондів

5.4 Модель економічного зростання Солоу

Запитання для самоперевірки

Задачі до теми 5

Тема 6. Різницеві рівняння та їх застосування до розв'язання задач економічної динаміки

6.1 Основні поняття та означення теорії різницевих рівнянь

6.2 Лінійні системи різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами

6.3 Динамічна модель Леонтьєва

Запитання для самоперевірки

Задачі до теми 6

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ЛІТЕРАТУРА

ВСТУП

Математична економіка є фундаментальною математичною дисципліною, у межах якої здійснюється кількісна оцінка економічних процесів, що відбуваються у межах деякої економічної системи. Ця наука орієнтована на системне вивчення економіки на різних рівнях з допомогою апарату математичного моделювання. Об'єктом дослідження тут є різноманітні економічні системи, предмет дослідження – математичні моделі реальних економічних об'єктів. Під економічною системою далі будемо розуміти сукупність взаємопов'язаних елементів, у межах якої здійснюються процеси виробництва, обміну, розподілу, споживання матеріальних та інших благ. Економічні системи відносять до кібернетичних, тобто керованих систем.

Метою викладання навчальної дисципліни «Математична економіка» є оволодіння студентами науковими основами та методикою математичного моделювання економічних систем та процесів. Основними завданнями вивчення дисципліни «Математична економіка» є формування у студентів уявлення про задачі розробки економіко-математичних моделей, надання їм знань про особливості застосування математичних моделей у економічних дослідженнях на мікро- та макрорівнях, навчання студентів ефективного застосування апарату сучасного економіко-математичного моделювання до розв'язання прикладних економічних задач; створення бази для подальшого вивчення курсів математичного моделювання та дослідження операцій.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен знати: основні принципи побудови економіко-математичних моделей, сутність балансових економічних моделей, призначення і методику побудови та аналізу виробничих функцій, будувати та досліджувати моделі поведінки споживачів, диференціальні та різницеві моделі економічної динаміки.

До основних вмінь, які студент повинен набути в результаті вивчення курсу «Математична економіка», слід віднести вміння будувати та аналізувати математичні моделі економічних об'єктів та процесів у мікро- та макроекономіці, моделювати процес виробництва за допомогою виробничих функцій, використовувати їх для розв'язання практичних задач управління виробництвом, використовувати середні та граничні величини для економічного планування, застосовувати диференціальні та різницеві моделі економічних процесів для практичних економічних досліджень.

Мета та завдання курсу «Математична економіка» визначають зміст даного навчального посібника. Тут розглянуто наступні основні теми: загальні принципи економіко-математичного моделювання, поняття еластичності, основні види кількісних показників у економіці – сумарні, середні та маржинальні величини, виробничі функції, їх характеристики та побудову, досліджено математичні моделі поведінки споживачів. Висвітлено також основні види математичних моделей економічної динаміки – диференціальні та різницеві моделі.

У посібнику наведено короткий виклад лекційного матеріалу курсу, наведено задачі практичних занять за їх темами, а також індивідуальне домашнє завдання, яке студенти виконують у межах самостійної роботи.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні досягти таких результатів навчання (компетентностей): розвиток математичної інтуїції, формування математичної культури мислення, здатність створювати математичну модель об'єкта дослідження та здійснювати її верифікацію, здатність формулювати складні задачі оптимізації та інтерпретувати їхні розв'язки у практичному контексті цих задач, здатність визначати межі припустимого використання економіко-математичних моделей.

Основою для вивчення дисципліни «Математична економіка» є оволодіння студентами дисциплінами «Диференціальні рівняння», «Лінійна алгебра» та «Математичний аналіз». Вивчення цієї дисципліни формує основу для вивчення дисциплін «Дослідження операцій та математична економіка», «Математичне моделювання».

Тема 1. Загальні принципи економіко-математичного моделювання. Модель Леонтьєва.

1.1 Предмет математичної економіки

Оскільки при прийнятті рішень у економіці можливості проведення експериментів є обмеженими, то важливим методом розробки таких рішень та дослідження економічних систем є економіко-математичне моделювання. Економіко-математичне моделювання – це процес побудови математичних моделей економічних систем, процесів та явищ. Модель – це об'єкт, що заміщує оригінал та відображає найбільш важливі для даного дослідження властивості оригінала. Модель, що є сукупністю математичних співвідношень (рівнянь, нерівностей тощо), називають математичною.

Математичною економікою називають розділ науки, що вивчає економічні об'єкти та процеси з допомогою економіко-математичного моделювання.

Процес побудови економіко-математичної моделі є послідовністю наступних етапів.

1. Формулювання предмета та мети дослідження.
2. Виділення елементів об'єкта, важливих для досягнення мети дослідження.
3. Вербальний (словесний) опис взаємозв'язків між виділеними елементами об'єкта моделювання.
4. Введення символічних позначень для врахованих характеристик об'єкта моделювання, формулювання взаємозв'язків між ними у вигляді математичних співвідношень.
5. Проведення розрахунків за побудованою математичною моделлю та аналіз отриманого розв'язку.

Слід розрізняти математичну структуру моделі та її змістовну інтерпретацію. Математична структура моделі складається з введених змінних та параметрів, що відображають елементи дослідження, а також рівнянь та нерівностей, що відображають зв'язки між ними.

У моделі розрізняють екзогенні та ендогенні змінні. Значення екзогенних змінних є заданими, значення ендогенних змінних визначають у ході розрахунків за моделлю.

Математичні моделі різних економічних об'єктів та процесів можуть мати однакову математичну структуру, але при цьому різну економічну інтерпретацію.

Розглянемо два приклади.

Приклад 1. Визначити, яку суму слід покласти на банківський депозит при заданій процентній ставці 20% річних, щоб через рік отримати 20 тисяч грошових одиниць?

Розв'язання. Введемо наступні позначення для змінних математичної моделі: M_0 – початкова сума грошового внеску, M_1 – сума на депозиті через 1 рік, R – річний процентний відсоток. Зв'язок між змінними задачі визначається

рівнянням $M_1 = M_0 \left(1 + \frac{R}{100}\right)$. Це рівняння є математичною моделлю задачі. З неї визначаємо значення M_0 : $M_0 = \frac{M_1}{1 + \frac{R}{100}} = \frac{12}{1,2} = 10$ (тисяч грошових одиниць).

Приклад 2. Внаслідок технічної модернізації середня продуктивність праці на підприємстві збільшилась на 20% і воно стало виробляти 12 тисяч одиниць продукції щомісячно. Яким був початковий щомісячний обсяг виробництва?

Розв'язання. Нехай Q_0 – початковий обсяг виробництва, Q_1 – обсяг виробництва через 1 місяць, R – річний процент приросту продуктивності праці. Рівняння, що пов'язує між собою змінні задачі, тобто її математична модель, має такий же вигляд, як модель попереднього прикладу: $Q_1 = Q_0 \left(1 + \frac{R}{100}\right)$. Звідси знаходимо: $Q_0 = \frac{Q_1}{1 + \frac{R}{100}} = \frac{12}{1,2} = 10$ (тисяч одиниць продукції).

Отже, одна й та ж математична модель може бути використана для розв'язання різних задач.

1.2 Види економіко-математичних моделей

Існують різні системи класифікації економіко-математичних моделей. За типами об'єктів, що моделюються, розрізняють макроекономічні та мікроекономічні моделі. Макроекономічні моделі описують економіку як єдине ціле, пов'язуючи між собою показники, що характеризують її стан: валовий внутрішній продукт, інвестиції, споживання, зайнятість, обсяг грошової маси тощо. Мікроекономічні моделі описують взаємодію структурних та функціональних складових економіки та їх поведінку на ринку. Основним об'єктом мікроекономічного моделювання є підприємство.

З точки зору врахування зміни економічних систем у часі розрізняють статичні та динамічні моделі. У статичних моделях розглядають стан об'єкта у конкретний момент часу, тут змінні моделі не залежать від часу. У динамічних моделях вони є функціями часу.

З точки зору врахування дії випадкових факторів розрізняють детерміновані та стохастичні моделі. У детермінованих моделях зв'язки між змінними розглядаються як функціональні. Стохастичні моделі передбачають наявність дії випадкових факторів на показники, що досліджуються. У таких моделях використовують апарат теорії ймовірностей, математичної статистики та теорії випадкових процесів.

Оптимізаційні моделі передбачають побудову цільової функції, що відображає результат діяльності економічної системи та дослідження цієї функції на екстремум з врахуванням обмежень, накладених на цю систему.

1.3 Статична модель міжгалузевого балансу (модель Леонтьєва)

Розглянемо статичну лінійну модель багатогалузевої економіки. У основу цієї моделі покладено наступні припущення.

1. У економічній системі, що є об'єктом моделювання, виробляються та споживаються n товарів.
2. Кожна галузь виробляє лише один товар, різні галузі виробляють різні товари.
3. Під виробничим процесом у кожній галузі розуміють перетворення деяких товарів у один товар, при цьому витрати сировини на виробництво одиниці товару залишаються незмінними.

Нехай x_i – обсяг виробництва i -го товару за плановий період (рік), a_{ij} – кількість одиниць i -го товару, яку потрібно витратити на виробництво одиниці j -го товару, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, n$. Величина x_i складається з двох частин: обсяг виробництва, що витрачається на виробничі потреби та обсяг виробництва, що витрачається на кінцеве (невиробниче) споживання. Виходячи з припущень моделі 1 – 3, виробниче споживання i -го товару всіма галузями дорівнює $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, тому чисте виробництво i -го товару, призначене для кінцевого споживання, становить $x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, $i=1, \dots, n$.

Якщо прирівняти чисте виробництво кожного i -го товару та кінцевий попит y_i на цей товар, то отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = y_i, \quad i=1, \dots, n. \quad (1.1)$$

Систему (1.1) називають моделлю Леонтьєва або статичною лінійною моделлю міжгалузевого балансу. Величини y_i у системі (1.1) є заданими.

Отже, модель Леонтьєва є системою з n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими. Сутність моделі Леонтьєва полягає у визначенні обсягів валового виробництва галузей за відомим кінцевим попитом на їх продукцію на основі даних про технологічні можливості галузей, відображених у коефіцієнтах витрат a_{ij} системи (1.1).

Використовуючи модель Леонтьєва, можна розв'язувати також і обернену задачу: за заданими обсягами валового виробництва кожного товару визначити обсяги його кінцевого споживання.

Величини x_i та y_i можна задавати у вартісних або натуральних одиницях виміру. У відповідності з цим розрізняють натуральний та вартісний міжгалузевий баланси. Далі будемо розглядати вартісний баланс.

Введемо наступні позначення: x_{ij} – кількість продукції i -ої галузі, що використовується для виробничих потреб у j -ій галузі, z_j – умовно чиста

продукція j -ої галузі, що включає кінцеве споживання, оплату праці та амортизацію. Принципова схема міжгалузевого балансу наведена у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1. Принципова схема міжгалузевого балансу у вартісному виразі

Галузі – виробники	Галузі – споживачі				Кінцевий продукт	Валовий продукт
	1	2	...	n		
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	y_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	y_2	x_2
...	...	...	...	...	...	...
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	y_n	x_n
Умовно чиста продукція	z_1	z_2	...	z_n	$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{j=1}^n z_j$	
Валовий продукт	x_1	x_2	...	x_n		$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^n x_j$

Розглянувши схему балансу по стовбцям, робимо висновок, що сума матеріальних витрат будь-якої галузі – споживача та її умовно чистої продукції дорівнює валовій продукції цієї галузі:

$$x_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} + z_j, \quad j=1,2,\dots,n. \quad (1.2)$$

Аналізуючи схему міжгалузевого балансу по рядкам, ми бачимо, що валова продукція кожної галузі – виробника дорівнює сумі матеріальних витрат її галузей – споживачів та кінцевої продукції даної галузі, призначеної для кінцевого (невиробничого) споживання.:

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, \quad i=1,\dots,n. \quad (1.3)$$

Формули (1.3) описують систему з n рівнянь, які називають рівняннями розподілу продукції галузей матеріального виробництва за напрямками використання.

Балансовий характер таблиці 1.1 міжгалузевого балансу виражається у тому, що виконуються рівності

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{j=1}^n z_j, \quad \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^n x_j.$$

Основу математичної моделі міжгалузевого балансу складає матриця А коефіцієнтів прямих витрат a_{ij} , $i=1,\dots,n$, $j=1,2,\dots,n$. Її називають також

технологічною матрицею. Коефіцієнт прямих витрат a_{ij} показує, яка кількість продукції i -ої галузі потрібна (якщо враховувати лише прямі витрати) для виробництва одиниці продукції j -ої галузі, тому виконується рівність:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad i=1, \dots, n, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (1.4)$$

Визначивши коефіцієнти технологічної матриці A , ми тим самим визначаємо коефіцієнти моделі Леонтьєва (1.1). У матричній формі цю модель можна записати у вигляді:

$$X = AX + Y, \quad (1.5)$$

де $X^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y^T = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Систему (1.5) можна записати у вигляді:

$$(E - A)X = Y, \quad (1.6)$$

де E – одинична матриця.

З (1.6) можна визначити валову продукцією X всіх галузей:

$$X = (E - A)^{-1} Y. \quad (1.7)$$

Тут $(E - A)^{-1}$ – матриця, обернена до $(E - A)$. Нехай $B = (E - A)^{-1}$. Тоді (1.7) набуває вигляду $X = BY$, де матрицю $B = (E - A)^{-1}$ називають матрицею повних витрат, а її компоненти b_{ij} називають коефіцієнтами повних витрат. Вони показують, скільки всього потрібно виробити продукції i -ої галузі для виробництва одиниці продукції j -ої галузі, призначеної для кінцевого споживання.

1.4 Умова продуктивності у моделі Леонтьєва

Планові розрахунки за формулами (1.7) мають сенс у тому випадку, якщо ці розрахунки дозволять отримати розв'язання $x_i \geq 0$, $i=1, \dots, n$.

Невід'ємну матрицю A називають продуктивною, якщо існує такий невід'ємний вектор X , що

$$X > AX. \quad (1.8)$$

Умова (1.8) означає, що для моделі міжгалузевого балансу (1.1) існує вектор Y кінцевої продукції з додатними координатами.

Для того, щоб матриця A прямих витрат у моделі Леонтьєва була продуктивною, необхідно, щоб виконувалася хоча б одна з наступних умов.

1. Матриця $(E - A)$ є невід'ємно оборотною, тобто існує обернена матриця $(E - A)^{-1}$, всі елементи якої є невід'ємними;
2. Матричний ряд $E + A + A^2 + \dots + A^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ є збіжним, причому його сума дорівнює $(E - A)^{-1}$;
3. Найбільше за модулем власне значення λ матриці A є меншим за одиницю;
4. Всі головні мінори матриці $(E - A)$ є додатними.

Більш простою, але лише достатньою умовою продуктивності матриці A є обмеження на величину найбільшої з сум елементів матриці A у кожному стовбці: якщо сума елементів кожного стовпця матриці A менша за одиницю, то матриця A є продуктивною.

Двоїстою до моделі Леонтьєва $X - AX = Y$ називають систему рівнянь для цін на товари галузей:

$$P - A^T P = \Phi, \quad (1.9)$$

де $P^T = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ – вектор цін на товари, A – технологічна матриця, $\Phi^T = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ – вектор доданої вартості на одиницю товару.

Систему (1.9) називають прибутковою, якщо всі елементи її розв'язку – вектора P є невід'ємними. Продуктивність матриці A забезпечує прибутковість системи (1.9).

Розглянемо приклад побудови та застосування моделі Леонтьєва.

Приклад. У таблиці наведені дані щодо міжгалузевого балансу економічної системи, що складається з двох галузей, за останній рік у грошових одиницях.

Галузі – виробники	Галузі – споживачі		Кінцевий продукт	Валове виробництво
	A	B		
A	7	21	72	100
B	12	15	123	150

Визначити необхідний обсяг валового виробництва у кожній галузі, якщо кінцеве споживання продукції галузі A повинно збільшитися удвічі, а галузі B – залишитися на попередньому рівні. Знайти умовно чисту продукцію галузей.

Розв'язання. Знайдемо елементи технологічної матриці A – коефіцієнти прямих витрат $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$. Отримуємо:

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{7}{100} = 0,07; \quad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{21}{150} = 0,14; \quad a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{12}{100} = 0,12;$$

$$a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{15}{150} = 0,10.$$

Технологічна матриця A має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,10 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо її на продуктивність:

$$a_{11} + a_{21} = 0,07 + 0,12 = 0,19 < 1, \quad a_{12} + a_{22} = 0,14 + 0,10 = 0,24 < 1.$$

Отже, матриця A є продуктивною і для довільного вектора Y кінцевого споживання можна знайти вектор валового виробництва X , що забезпечує даний вектор кінцевого споживання. Знайдемо вектор X за формулою (1.7): $X = (E - A)^{-1} Y$. Вектор Y кінцевого споживання має вигляд:

$$Y = \begin{pmatrix} 72 \cdot 2 = 144 \\ 123 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю повних витрат $B = (E - A)^{-1}$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,93 & -0,14 \\ -0,12 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

$$\det(E - A) = 0,93 \cdot 0,9 - (-0,14) \cdot (-0,12) = 0,8202.$$

$$B = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,14 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix}.$$

Вектор X валового виробництва:

$$X = BY = \begin{pmatrix} 179,0 \\ 160,5 \end{pmatrix}.$$

Щоб знайти умовно чисту продукцію галузей при знайдених обсягах валового виробництва, знайдемо нові значення виробничого споживання:

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j, \quad i=1,2; \quad j=1,2, \quad x_{11} = a_{11} \cdot x_1 = 0,07 \cdot 179 = 12,53;$$

$$x_{12} = a_{12} \cdot x_2 = 0,14 \cdot 160,5 = 22,47; \quad x_{21} = a_{21} \cdot x_1 = 0,12 \cdot 179 = 21,48;$$

$$x_{22} = a_{22} \cdot x_2 = 0,1 \cdot 160,5 = 16,05.$$

Умовно чисту продукцію галузей визначаємо за формулою: $z_j = x_j - x_{1j} - x_{2j}$, $j = 1, 2$. Маємо:

$$z_1 = 179 - 12,53 - 21,48 = 144,99 \text{ (грошових одиниць);}$$

$$z_2 = 160,5 - 22,47 - 16,05 = 121,98 \text{ (грошових одиниць).}$$

1.5 Лінійна модель обміну (міжнародної торгівлі)

З допомогою лінійної моделі обміну або моделі міжнародної торгівлі можна визначити, якими повинні бути співвідношення між національними доходами країн, що торгують між собою, щоб торгівля була збалансованою.

Розглянемо модель міжнародної торгівлі, у якій беруть участь n країн. Нехай x_i – національний дохід i -ої країни, a_{ij} – частка національного доходу j -ої країни, яку вона витрачає на придбання товарів i -ої країни, p_i – загальна виручка від зовнішньої та внутрішньої торгівлі для i -ої країни. Будемо вважати, що країна витрачає весь свій національний дохід на придбання товарів всередині країни та на імпорт з інших країн. Це означає, що $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Матрицю A , елементами якої є коефіцієнти a_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, називають структурною матрицею торгівлі. Сума елементів кожного стовпчика цієї матриці дорівнює одиниці.

Нехай на протязі певного фіксованого проміжку часу структура міжнародної торгівлі не змінюється, тобто не змінюється матриця A , можуть змінюватися лише національні доходи країн, що беруть участь у торгівлі. Потрібно визначити, якими повинні бути ці національні доходи, щоб міжнародна торгівля залишалася збалансованою, тобто сума виплат усіх країн дорівнювала б сумарній виручці від внутрішньої та зовнішньої торгівлі.

Для будь-якої i -ої країни виручка від внутрішньої та зовнішньої торгівлі $p_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$, $i = 1, \dots, n$. У збалансованій системі міжнародної торгівлі відсутній дефіцит, тобто $p_i = x_i$, $i = 1, \dots, n$. Нехай X – вектор, елементами якого є національні доходи $x_1, x_2, \dots, x_n$, а елементами вектора P є величини сумарної виручки $p_1, p_2, \dots, p_n$. Оскільки $P = A \cdot X$, то виконується рівність $A \cdot X = X$. Отже, вектор X є власним вектором структурної матриці торгівлі A , який відповідає одиничному власному значенню (рівність $A \cdot X = \lambda \cdot X$ виконується при $\lambda = 1$). Звідси випливає, що баланс у міжнародній торгівлі досягається, якщо одиниця є власним значенням структурної матриці торгівлі, а вектор X – власним вектором, що відповідає цьому власному значенню.

Приклад. Знайти співвідношення національних доходів трьох країн, що торгують між собою, у збалансованій системі міжнародної торгівлі, якщо структурна матриця торгівлі для цих країн має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є $\lambda = 1$ власним значенням матриці A .

$$A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Оскільки сума двох останніх рядків отриманої матриці $A - E$ дорівнює першому рядку, помноженому на (-1) , то визначник цієї матриці дорівнює нулю, отже, $\lambda = 1$ є власним значенням матриці A . Для знаходження відповідного йому власного вектора X розв'яжемо систему $(A - E)X = 0$, або

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Методом Гауса знаходимо розв'язки цієї системи: $x_1 = 2,25x_3$, $x_2 = 2,5x_3$, $x_3 = c$ — довільна додатна константа. Таким чином, збалансованість торгівлі розглянутих трьох країн досягається, якщо їх національні доходи знаходяться у співвідношенні $2,25:2,5:1$.

Запитання для самоперевірки

1. Надайте означення математичної моделі.
2. У чому полягає процес економіко-математичного моделювання?
3. Вкажіть етапи побудови економіко-математичної моделі.
4. Наведіть приклади екзогенних та ендогенних змінних математичної моделі.
5. Наведіть приклади мікро- та макроекономічних математичних моделей.
6. У чому полягає відмінність між детермінованими та стохастичними моделями?

7. Наведіть модель Леонтьєва. На яких припущеннях вона ґрунтується?
8. Які елементи входять до складу технологічної матриці? У чому пролягає їх економічний зміст?
9. Яку матрицю називають матрицею повних витрат?
10. У чому полягає економічний зміст коефіцієнтів прямих витрат?
11. Сформулюйте умови продуктивності моделі Леонтьєва.
12. Яку модель називають двоїстою до моделі Леонтьєва?
13. У чому полягає лінійна модель міжнародної торгівлі?
14. Для чого застосовують лінійну модель міжнародної торгівлі?

Задачі до теми 1

Розв'язати наступні задачі, пов'язані з фінансовими обчисленнями

1. Знайти вартість кредиту на суму 1 млн. у.г.о., отриманого на 10 місяців при щомісячній відсотковій ставці 3%. (Відповідь: 300 тис. у.г.о.)
2. На депозит при процентній ставці 10% річних поклали 10 тис. у.г.о. Яка сума буде на депозитному рахунку через 2 роки? (Відповідь: 12100 у.г.о.)
3. За який час депозитний внесок на суму 10 тис. у.г.о. при річній ставці 10% дорівнюватиме 1 млн. у.г.о.? (Відповідь: ≈ 48 років).
4. Комерційний банк придбав державні облігації з терміном погашення 6 місяців на суму 2 млн. у.г.о. По закінченні цього терміну банк повинен отримати за облігаціями 2,175 млн. у.г.о. Визначити розмір річної процентної ставки за облігаціями. (Відповідь:)
5. Кредит у розмірі 300 тис. у.г.о. видано на 90 днів під 20% річних. Знайти дохід кредитора. (Відповідь: 15 тис. у.г.о.)
6. Рахунок у банку на суму 200 тис. грн.. під 20% річних відкрито 25 травня. 7 червня на цей рахунок додатково внесли 50 тис. грн., 10 листопада з нього знято суму 90 тис. грн., а 1 грудня рахунок було закрито. Знайти загальну суму, отриману при закритті рахунку. (Відповідь: 193638 грн.)
7. Банк виплачує відсотки за депозитами на суму, не меншу, ніж 100 тис. у.г.о. на наступних умовах: на суму, покладену на термін не менше року – 15% річних, не менше 6 місяців – 13% річних, не менше 3 місяців – 12% річних. Яка форма депозиту є найбільш прибутковою для вкладника, якщо сума депозиту становить 100 тис. у.г.о.? (Відповідь: депозит на 1 рік).
8. Вкладник вніс на банківський депозит 5 тис. у.г.о. під 12% річних з виплатою процентів по завершенні терміну депозиту. Знайти суму депозиту через 2 роки. (Відповідь: 6272 у.г.о.)
9. Підприємство отримало у банку кредит на суму 5 млн. у.г.о. терміном на 5 років. Відсоткова ставка за кредитом складає 10,5% для першого року, для другого року вона збільшується на 1,5%, для третього та решти років вона зростає на 0,75% щорічно. Визначити суму боргу, що повинна бути повернута через 5 років. (Відповідь: 10, 643 млн. у.г.о.)
10. На суму 600 тис. у.г.о. щоквартально нараховуються складні відсотки за річною ставкою 12% річних на протязі 14 місяців. Знайти суму нарахувань. (Відповідь: 88,75 тис. у.г.о.)

11. Знайти нинішню вартість 20 тис. у.г.о., які будуть отримані через 4 роки, якщо процентна ставка складає 8% річних.

12. Яку суму необхідно помістити на депозит, щоб через 4 роки отримати 4 тис. у.г.о. при процентній ставці 13% річних? (Відповідь: 2,85 тис. у.г.о.)

13. На початковий капітал 500 тис. у.г.о. неперервно нараховуються складні відсотки – 8% річних на протязі 4 років. Знайти загальну суму нарахувань. (Відповідь: 180,245 у.г.о.)

14. Товар продають по 100 у.г.о. за одиницю. Витрати на придбання одиниці товару складають 75 у.г.о. знайти суму прибутку та рентабельність реалізації одиниці товару. (Відповідь: 25 у.г.о., $\approx 33\%$).

15. Виручка від реалізації товару становить 2550 у.г.о. Якими повинні бути витрати, щоб рентабельність склала 25%? (Відповідь: 2000 у.г.о.)

16. Прибуток підприємства складає 5 млн. у.г.о., рентабельність дорівнює 25%. Знайти витрати. (Відповідь: 20 млн. у.г.о.)

17. Готується видання книги. Орієнтовна ціна реалізації складе 10 у.г.о., загальні постійні витрати на видання всього тиражу складають 200 тис. у.г.о. Змінні витрати на 1 примірник складають 6 у.г.о. При якому тиражу видання книги буде беззбитковим? (Відповідь: 50 тис. примірників)

Побудувати економіко-математичні моделі для наступних задач

18. У деякій галузі 4 підприємства випускають 3 види продукції. У матриці $A(4 \times 3)$ задано обсяги виробництва продукції на кожному заводі у першому кварталі, у матриці $B(4 \times 3)$ – у другому кварталі. Знайти: а) обсяги виробництва продукції кожного виду за перше півріччя; б) приріст обсягів виробництва продукції у першому кварталі порівняно з другим кварталом, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: а) $A + B$; б) $B - A$.

19. Підприємство виробляє 3 види продукції. Його виробнича програма характеризується вектором $A = (100 \ 200 \ 100)$. Ціна реалізації одиниці продукції i -го типу у j -му регіоні задана матрицею $B(3 \times 4)$, де b_{ij} – ціна реалізації продукції i -го типу у j -му регіоні. Знайти матрицю C виручки підприємства по регіонам, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $C = A \cdot B = (600 \ 1300 \ 700 \ 1300)$.

20. Підприємство виробляє 3 типи продукції, використовуючи 4 види ресурсів. Норми витрат i -го типу ресурсів на виробництво одиниці j -го виду продукції задані у матриці витрат $A(4 \times 3)$. Вектор X визначає обсяги виробництва продукції кожного типу. Визначити матрицю S повних витрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = (100 \ 80 \ 110).$$

Відповідь: $S = A \cdot X^T = \begin{pmatrix} 930 \\ 960 \\ 450 \\ 690 \end{pmatrix}.$

21. В умовах попередньої задачі задано вектор $P = (10 \ 20 \ 10 \ 10)$, елемент p_i якого дорівнює вартості i -го типу ресурсів. Знайти повну вартість витрачених ресурсів.

Відповідь: $c = P \cdot S = 39900$ (у.г.о.).

22. Для виробництва 4 видів продукції підприємство використовує 3 види ресурсів. Витрати ресурсів на виробництво одиниці продукції, запас ресурсів кожного виду та прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду наведені у таблиці. Побудувати економіко-математичну модель для розробки оптимального плану виробництва продукції.

Ресурси	Витрати ресурсів на одиницю продукції				Запас ресурсів
	Товар 1	Товар 2	Товар 3	Товар 4	
Сировина	3	5	2	4	60
Робочий час	22	14	18	30	400
Час роботи обладнання	10	14	8	16	128
Прибуток, у.г.о.	30	25	8	16	

Розв'язання. Нехай x_i – запланований обсяг виробництва i -го товару, $i = 1, 2, 3, 4$. Потрібно побудувати оптимальний план виробництва продукції, що максимізує прибуток підприємства. Цільова функція задачі має вигляд:

$$f = 30x_1 + 25x_2 + 8x_3 + 16x_4 \rightarrow \max.$$

Обмеження задачі:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 60, \\ 22x_1 + 14x_2 + 18x_3 + 30x_4 \leq 400, \\ 10x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 16x_4 \leq 128, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

23. На двох автоматичних лініях виготовляють вироби трьох типів, дані про які наведено у таблиці. Побудувати математичну модель завантаження автоматичних ліній, що мінімізує загальні витрати. План повинен бути виконаний не пізніше, ніж за 15 діб.

Виріб	Продуктивність лінії, од./добу		Витрати на роботу ліній, у.г.о./добу		План, од.
	1	2	1	2	
A	4	3	400	300	50
B	6	5	100	200	40
C	8	2	300	400	50

Розв'язання. Нехай x_{1i}, x_{2i}, x_{3i} – відповідно кількість виробів A, B та C, що виготовляються на i -й лінії, $i=1,2$. Цільовою функцією задачі є мінімум витрат:

$$z = 400x_{11} + 300x_{12} + 100x_{21} + 200x_{22} + 700x_{31} + 400x_{32} \rightarrow \min.$$

Обмеження на змінні моделі мають вигляд:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 50, \\ x_{21} + x_{22} = 40, \\ x_{31} + x_{32} = 50, \\ \frac{x_{11}}{4} + \frac{x_{21}}{6} + \frac{x_{31}}{8} \leq 15, \\ \frac{x_{12}}{3} + \frac{x_{22}}{5} + \frac{x_{32}}{2} \leq 15, \\ x_{ij} \geq 0, i=1,2,3; j=1,2. \end{cases}$$

24. На обробку надійшла партія зі 150 дошок, довжина кожної з яких дорівнює 7,5м, для виготовлення комплектів з 4 дошок. Кожний комплект складається з 1 дошки довжиною 3м, 2 дошок довжиною 2м та 1 дошки довжиною 1,5м. Скласти план розпилювання дошок, що максимізує кількість їх комплектів.

Розв'язання. Всі можливі способи розпилювання дошок представимо у вигляді матриці A, елементи якої a_{ij} дорівнюють кількості дошок j -го типу, отриманих

внаслідок розпилювання i -м способом. При цьому вважаємо, що дошка довжиною 3м – це дошка 1-го типу, дошка довжиною 2м – дошка 2-го типу, довжиною 1,5м – 3-го типу. Транспонована матриця A :

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Нехай x_i – кількість дошок, розпиляних i -м способом, $i=1,2,\dots,8$, b_k – кількість дошок k -го типу у комплекті, $\bar{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_8)$, $\bar{b} = (b_1 \ b_2 \ b_3) = (1 \ 2 \ 1)$, c – кількість комплектів. Обмеження моделі мають вигляд:

$$\sum_{i=1}^8 x_i = 150, \quad \bar{x} \cdot A = c \cdot \bar{b} = (c \quad 2c \quad c).$$

Цільова функція $z = c \rightarrow \max$.

25. Раціон для харчування корів на фермі складається з 2 видів кормів: A та B . Один кілограм корму A коштує 80 у.г.о. і містить 1 одиницю жирів, 3 одиниці білків, 1 одиницю вуглеводнів, 2 одиниці нітратів. Один кілограм корму B коштує 10 у.г.о. і містить 3 одиниці жирів, 1 одиницю білків, 8 одиниць вуглеводнів та 4 одиниці нітратів. Побудувати модель для визначення найдешевшого раціону, що містить не менше 6 одиниць жирів, 9 одиниць білків, 8 одиниць вуглеводнів та не більше 16 одиниць нітратів.

Розв'язання. Нехай x_1 – кількість кормів A у раціоні, x_2 – кількість кормів B . Цільова функція виражає вартість раціону:

$$z = 80x_1 + 10x_2 \rightarrow \min.$$

Обмеження на змінні моделі мають вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 8x_2 \geq 8, \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

26. Діяльність економічної системи, що складається з двох галузей, на протязі останнього року характеризується наступними даними, наведеними у таблиці (в умовних грошових одиницях). Знайти технологічну матрицю A цієї економічної системи.

Галузі –	Галузі –	Валовий обсяг
----------	----------	---------------

виробники	споживачі		виробництва
	A	B	
A	100	160	500
B	275	40	400

Розв'язання. Елементи a_{ij} матриці A дорівнюють кількості продукції i -ї галузі, що витрачається на виробництво одиниці продукції j -ї галузі. Отримуємо:

$$a_{11} = \frac{100}{500} = 0,2, \quad a_{12} = \frac{160}{400} = 0,4, \quad a_{21} = \frac{275}{500} = 0,55, \quad a_{22} = \frac{40}{400} = 0,1.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,55 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

27. З'ясувати, чи є продуктивною технологічна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,3 \\ 0,6 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: так.

28. У таблиці наведено дані міжгалузевого балансу за звітний період у умовних грошових одиницях. Знайти необхідний обсяг валового виробництва для кожної галузі, якщо за планом кінцеве споживання у енергетиці повинно збільшитися у 2 рази, а у машинобудуванні рівень кінцевого споживання повинен зрости на 20 %.

Галузі – виробники	Галузі – споживачі		Фактичне кінцеве споживання	Валовий обсяг виробництва
	Енергетика	Машинобудування		
Енергетика	100	160	240	500
Машинобудування	275	40	85	400

Відповідь: $X^T = (945,6 \quad 691,2)$.

29. Задано технологічну матрицю (матрицю прямих витрат) $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$.

Знайти: а) вектор валового виробництва X , що забезпечує планове кінцеве споживання $Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix}$; б) приріст ΔX валового виробництва, що забезпечує

збільшення кінцевого споживання на $\Delta Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Відповідь: а) $X = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$; б) $\Delta X = \begin{pmatrix} 184 \\ 132 \end{pmatrix}$.

30. На плановий період відомі наведені у таблиці коефіцієнти прямих витрат та величина кінцевого споживання у промисловості, сільському господарстві та інших галузях. Знайти обсяги валового виробництва продукції у галузях та міжгалузеві постачання.

Галузі – виробники	Галузі – споживачі			Кінцеве споживання (у.г.о.)
	Промисловість	Сільське господарств	Інші галузі	
Промисловість	0,3	0,25	0,2	56
Сільське господарство	0,15	0,12	0,03	20
Інші галузі	0,1	0,05	0,08	12

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 102,2 \\ 41,0 \\ 26,4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 30,7 & 10,3 & 5,3 \\ 15,3 & 4,9 & 0,8 \\ 10,2 & 2,1 & 2,1 \end{pmatrix}$.

31. Чистою продукцією галузі називають різницю між її валовою продукцією та продукцією всіх галузей, витраченою на виробництво у даній галузі. В умовах попередньої задачі знайти чисту продукцію для промисловості, сільського господарства та інших галузей.

Відповідь: $(46,0 \quad 23,7 \quad 18,2)$.

32. У таблиці наведено дані про діяльність економічної системи, що складається з двх галузей, а також план виробництва продукції для кінцевого споживання Y_1 у майбутньому періоді (в у.г.о.). Знайти матриці прямих та повних витрат, а також обсяг валового виробництва продукції у плановому періоді, що забезпечує виробництво продукції кінцевого споживання Y .

Галузі – виробники	Галузі – споживачі		Чиста продукція	План кінцевого споживання, Y
	A	B		
A	80	120	300	350
B	70	30	200	300

Відповідь: $A = \begin{pmatrix} 0,16 & 0,4 \\ 0,14 & 0,1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1,29 & 0,57 \\ 0,20 & 1,20 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 622,5 \\ 430,0 \end{pmatrix}$.

Тема 2. Поняття еластичності та її застосування. Співвідношення між сумарними, середніми та граничними величинами

2.1 Поняття та властивості еластичності

Еластичність характеризує відносну зміну економічного показника під дією одиничної відносної зміни фактора, від якого він залежить за умови незмінності решти факторів, що впливають на досліджуваний показник. Іншими словами, еластичність показує, на скільки процентів зміниться досліджуваний показник, якщо фактор, від якого він залежить, збільшиться на 1%.

Нехай досліджується залежність економічного показника y від фактора x , значення якого впливають на значення y . Розглянемо випадок, коли спостерігається функціональна залежність $y = y(x)$. Швидкість зміни величини y

відносно зміни величини x визначається похідною $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, проте її застосування у економічних дослідженнях здебільшого є незручним, оскільки величина похідної залежить від обраних одиниць виміру x та y . Тому для вивчення впливу зміни величини x на величину y у економіці застосовують не абсолютні, а відносні (процентні) зміни величин, що досліджуються. Зв'язок між змінами відносних величин оцінюють за допомогою еластичності.

Еластичністю функції $y = y(x)$ відносно змінної x називають границю відношення відносних змін величин y та x :

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \right). \quad (2.1)$$

Формулу (2.1) можна записати у вигляді:

$$E_x(y) = \frac{d(\ln y)}{d(\ln x)}. \quad (2.2)$$

Якщо еластичність визначають наближено за дискретним набором даних, наприклад, заданих у вигляді таблиці, то замість (2.1) та (2.2) для обчислення еластичності у точці (x_1, y_1) використовують формулу:

$$E_x(y) = \frac{y_2 - y_1}{y_1} : \frac{x_2 - x_1}{x_1} = \frac{\Delta y_1}{y_1} : \frac{\Delta x_1}{x_1}. \quad (2.3)$$

Еластичність, обчислену за формулою (2.3), називають кінцевою еластичністю.

У економічних дослідженнях використовують також середню (дугову) еластичність:

$$E_x(y) = \frac{y_2 - y_1}{(y_1 + y_2)/2} : \frac{x_2 - x_1}{(x_1 + x_2)/2}, \quad (2.4)$$

а також логарифмічну еластичність

$$E_x(y) = \frac{\Delta(\ln y)}{\Delta(\ln x)} = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right) : \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right). \quad (2.5)$$

З означення еластичності (2.1) випливають основні властивості цього показника.

1. $E_{ax}(by) = E_x(y)$, тобто еластичність не залежить від одиниць виміру показників x та y .

2. Еластичності взаємно обернених функцій є взаємно оберненими величинами: $E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}$.

3. Еластичність добутку двох функцій дорівнює сумі їх еластичностей: $E_x(u \cdot v) = E_x u + E_x v$.

4. Еластичність частки функцій дорівнює різниці їх еластичностей: $E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x u - E_x v$.

5. Еластичність суми двох функцій знаходять за формулою:

$$E_x(u + v) = \frac{d(u + v)}{dx} \cdot \frac{x}{u + v} = \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\right) \cdot \frac{x}{u + v} = \frac{u \cdot E_x u + v \cdot E_x v}{u + v}.$$

Приклад. Знайти еластичність степеневі функції $y = x^k$.

Розв'язання. $E_x(x^k) = \frac{d(x^k)}{dx} \cdot \frac{x}{x^k} = kx^{k-1} \cdot x^{1-k} = k$.

2.2 Види еластичності у економічних дослідженнях

Розглянемо основні показники еластичності, що використовуються у економічних дослідженнях.

1. Еластичність попиту за ціною (пряма еластичність) визначається за формулою

$$E_p(q) = \frac{dq/q}{dp/p} = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q},$$

де p – ціна одиниці товару, q – величина попиту на нього. Вона показує відносну зміну у відсотках величини попиту на товар при зміні ціни цього товару на 1% та характеризує реакцію споживачів на зміну ціни товару.

2. Перехресну еластичність попиту за ціною знаходять за формулою

$$E_{p_j}(q_i) = \frac{dq_i/q_i}{dp_j/p_j} = \frac{dq_i}{dp_j} \cdot \frac{p_j}{q_i}.$$

Вона показує відносну процентну зміну величини q_i попиту на i -й товар при зміні ціни p_j на j -й товар, що заміщує чи доповнює i -й товар у споживанні, на 1%.

3. Еластичність попиту за доходом обчислюють за формулою:

$$E_l(q) = \frac{dq/q}{dl/l} = \frac{dq}{dl} \cdot \frac{l}{q},$$

l – середня величина доходу споживачів. Вона характеризує відносну процентну зміну величини попиту на товар при збільшенні доходу споживачів на 1%. Додатна еластичність попиту за доходом спостерігається для нормальних (якісних) товарів, від'ємна – для малоцінних (низькоякісних).

4. Цінова еластичність ресурсів

$$E_p(R) = \frac{dR/R}{dp/p} = \frac{dR}{dp} \cdot \frac{p}{R}$$

характеризує відносну зміну у відсотках величини R попиту на певний ресурс при зміні ціни цього ресурсу на 1%.

5. Еластичність заміщення при виробництві одного ресурсу іншим

$$E_{R_j}(R_i) = \frac{dR_i}{dR_j} \cdot \frac{R_j}{R_i}$$

показує, на скільки процентів зміниться кількість R_i i -го ресурсу при збільшенні кількості R_j j -го ресурсу на 1%, так, що при цьому загальний обсяг виробництва не змінюється.

2.3 Сумарні, середні та граничні величини у економіці

Сумарною величиною називають будь-яку функцію $F(x)$ незалежної змінної x . Прикладами сумарних величин у економіці є доход або витрати як функції обсягу виробництва, обсяг виробництва як функція витрат праці тощо.

Середню величину ($AF(x)$) визначають як відношення сумарної величини до незалежної змінної: $AF(x) = \frac{F(x)}{x} = \bar{F}$. Приклади середніх величин – середня виручка, середні витрати, середній доход.

Гранична (маржинальна) величина $MF(x)$ визначається як похідна сумарної величини $F(x)$ за змінною x : $MF(x) = \frac{dF}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}$ у випадку, якщо сумарна величина змінюється неперервно. Якщо сумарна величина є дискретною, то маржинальна величина $MF(x)$ визначається як відношенні зміни $\Delta F(x)$ до зміни незалежної змінної Δx : $MF(x) = \frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$. У цьому випадку маржинальну величину можна розглядати як зміну сумарної величини, викликану зміною аргументу на одиницю. Прикладами маржинальних величин у економіці є маржинальний прибуток, маржинальні витрати тощо.

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте означення еластичності.
2. Наведіть формулу кінцевої еластичності
3. Наведіть формули середньої та логарифмічної еластичності
4. Чи залежить еластичність від одиниць виміру показників?
5. Наведіть формулу еластичності добутку, частки та суми двох показників.
6. Вкажіть основні види еластичності, що застосовуються у економічних дослідженнях.
7. Надайте означення сумарних, середніх та граничних величин у економіці. Наведіть приклади.
8. Як визначаються граничні величини у неперервному та дискретному випадках?

Задачі до практичних занять за темою 2

1. Залежність між виробничими витратами y (у.г.о.) та обсягом виробленої продукції x (у.г.о.) визначається функцією $y = 50x - 0,05x^3$. Знайти середні та граничні витрати, якщо обсяг виробництва складає 10 у.г.о.

Відповідь: 45 у.г.о., 35 у.г.о.

2. Функція виробничих витрат підприємства має вигляд:

$$y(x) = 0,1x^3 - 1,2x^2 + 5x + 250.$$

Знайти середні та граничні виробничі витрати. Обчислити їх значення, якщо обсяг виробництва x дорівнює 10 у.г.о.

Відповідь: 28 у.г.о., 11 у.г.о.

3. Залежність обсягу u (одиниць) продукції, виробленого бригадою робітників, від часу t (год.) визначається рівністю

$$u(t) = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t, \quad 0 \leq t \leq 8.$$

Знайти продуктивність праці бригади робітників та швидкість її зміни через 1 годину після початку роботи та за 1 годину до її завершення.

Відповідь: $u'(1) = 112,5$ од./год., $u''(1) = 10$ од./год.², $u'(7) = 82,5$ од./год., $u''(7) = -20$ од./год.²

4. Залежність між собівартістю одиниці продукції y (у.г.о.) та її валовим обсягом виробництва x (у.г.о.) визначається рівністю $y = 80000 - 500x$. Знайти еластичність собівартості за обсягом виробництва для обсягу виробництва 60 у.г.о.

Відповідь: $E_x(y) = \frac{x}{x-160}$, $E_{60}(y) = -0,6$

5. Залежність між попитом q та ціною p одиниці продукції підприємства визначається співвідношенням $q = 18 - \sqrt{p}$. Знайти еластичність попиту за ціною. З'ясувати, при яких значеннях ціни попит є нейтральним, еластичним та нееластичним.

Відповідь: $p = 144$, $0 < p < 144$, $144 < p < 324$.

6. Функції попиту та пропозиції на деякий товар мають вигляд:

$$q = \frac{p+8}{p+2}, \quad s = p+0,5,$$

де p – ціна одиниці товару, q – величина попиту, s – пропозиції. Знайти: а) ціну рівноваги, яка урівноважує попит та пропозицію на ринку; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну попиту при збільшенні ціни на 5% у порівнянні з ціною рівноваги.

Відповідь: а) $p = 2$ у.г.о.; б) $E_2(q) = -0,3$, $E_2(s) = 0,8$; в) зменшиться на $5 \cdot 0,3 = 1,5\%$.

7. Як пов'язані між собою граничні та середні повні витрати підприємства, якщо еластичність повних витрат дорівнює 1.

Розв'язання. Нехай x – обсяг виробництва на підприємстві, $y(x)$ – повні витрати, тоді середні витрати $\bar{y} = \frac{y}{x}$, $\frac{dy}{dx}$ – граничні витрати. Еластичність повних витрат:

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = 1.$$

З цієї рівності випливає, що $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, тобто граничні витрати дорівнюють середнім витратам.

8. Задано функцію $y(x)$ повних витрат підприємства на виробництво x одиниць продукції. Визначити зв'язок між еластичностями повних та середніх витрат.

Відповідь: $E_x(\bar{y}) = E_x(y) - 1$.

9. Залежність між виробничими витратами y (у.г.о.) та обсягом виробництва x (у.г.о.) є функцією $y = 10x - 0,04x^3$. Визначити середні та граничні витрати при $x = 5$ у.г.о.

Відповідь: 9 у.г.о., 7 у.г.о.

10. Залежність повних витрат y (у.г.о.) від обсягу виробництва x (у.г.о.) є функцією $y = x^3 - 2x^2 + 96$. При якому обсязі виробництва граничні та середні витрати співпадають? Знайти еластичності повних та середніх витрат при заданому обсязі виробництва.

Відповідь: $x = 4$ у.г.о., $E_4(y) = 1$, $E_4(\bar{y}) = 1$.

11. Знайти еластичність попиту q (одиниць) на товар при заданій його ціні p (у.г.о.), якщо а) $q + 10p = 50$, $p = 3$; б) $5q + 3p = 70$, $p = 10$; в) $p^2 + p + 4q = 26$, $p = 2$.

Відповідь: а) $-1,5$; б) $-0,75$; в) $-0,5$.

12. Залежність споживання y від доходу споживача x має вигляд: $y = \frac{ax}{x+b}$.

Показати, що еластичність споживання за доходом залежить від значення параметра a та прямує до нуля при необмеженому зростанні доходу.

Тема 3. Макроекономічні виробничі функції

3.1 Поняття виробничої функції

Виробничою функцією називають функцію, що установлює взаємозв'язок між факторами виробництва (працею та капіталом) та його результатом на певному рівні економічної діяльності (підприємство, ринок, галузь, економіка).

Нехай X – обсяг виробництва у економічній системі, що є об'єктом дослідження, K – основний капітал (інвестиції у засоби виробництва), L – витрати праці. Діяльність цієї економічної системи можна описати з допомогою виробничої функції $X = F(K, L)$, яка у загальному випадку є нелінійною.

Виробничу функцію $X = F(K, L)$ називають неокласичною, якщо вона є диференційовною та задовольняє наступні умови:

1) $F(0, L) = F(K, 0) = 0$ – при відсутності хоча б одного з факторів виробництва (праці чи капіталу) виробництво є неможливим;

2) $\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial F}{\partial L} > 0$ – зростання обсягів виробництва супроводжується зростанням витрат ресурсів;

3) $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0, \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$ – при збільшенні витрат ресурсів швидкість зростання виробництва сповільнюється;

4) $\lim_{K \rightarrow +\infty} F(K, L) = \lim_{L \rightarrow +\infty} F(K, L) = +\infty$ – при необмеженому зростанні одного з факторів виробництва обсяг виробництва необмежено зростає;

Виробничу функцію виду

$$X = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2} \quad (3.1)$$

називають мультиплікативною виробничою функцією.

Коефіцієнт A у (3.1) називають коефіцієнтом нейтрального технічного прогресу, $\alpha_1 > 0$ та $\alpha_2 > 0$ – коефіцієнти еластичності відповідно за капіталом та за працею.

Окремим випадком мультиплікативної виробничої функції є виробнича функція Кобба – Дугласа:

$$X = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}. \quad (3.2)$$

3.2 Характеристики виробничої функції

Частинні похідні виробничої функції $X = F(K, L)$ за аргументами K та L називають граничними ефективностями факторів виробництва. Вони дорівнюють приросту обсягу виробництва на одиницю приросту відповідного фактора виробництва, капіталу (виробничих фондів) чи праці.

Частинна похідна $\frac{\partial F}{\partial K}$ – гранична ефективність виробничих фондів (гранична фондовіддача).

Частинна похідна $\frac{\partial F}{\partial L}$ – гранична продуктивність праці.

Для мультиплікативної виробничої функції гранична фондовіддача $\frac{\partial F}{\partial K} = A \cdot \alpha_1 \cdot K^{\alpha_1-1} \cdot L^{\alpha_2}$, середня фондовіддача $\frac{X}{K} = A \cdot K^{\alpha_1-1} L^{\alpha_2}$. Таким чином, гранична фондовіддача пропорційна середній фондовіддачі з коефіцієнтом пропорційності α_1 . Аналогічно можна показати, що гранична продуктивність праці пропорційна середній продуктивності праці з коефіцієнтом пропорційності α_2 . Маємо:

$$\frac{\partial X}{\partial K} = \alpha_1 \frac{X}{K}, \frac{\partial X}{\partial L} = \alpha_2 \frac{X}{L}. \quad (3.3)$$

З рівностей (3.3) випливає, що при $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 < 1$ граничні віддачі факторів менші, ніж середні.

При $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 < 1$ для мультиплікативної виробничої функції виконується третя умова неокласичної функції: $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$, тобто зі зростанням витрат ресурсу його гранична віддача зменшується. Можна довести, що мультиплікативна виробнича функція має й інші властивості неокласичної функції, тобто вона є неокласичною.

Розглянемо економічну інтерпретацію параметрів A , α_1 та α_2 мультиплікативної виробничої функції (3.1). Коефіцієнт $A > 0$ нейтрального технічного прогресу залежить від рівня розвитку технологій у конкретній економічній системі. Коефіцієнт α_1 еластичності виробництва за капіталом показує на скільки відсотків зріс обсяг виробництва, якщо вартість виробничих фондів зросла на 1%, коефіцієнт α_2 еластичності виробництва за працею показує на скільки відсотків зріс обсяг виробництва, якщо вартість витрат на оплату праці зросла на 1%.

Для обчислення α_1 та α_2 можна використати формулу (2.2), згідно з якою маємо:

$$\alpha_1 = \frac{\partial(\ln X)}{\partial(\ln K)} = \alpha_K, \alpha_2 = \frac{\partial(\ln X)}{\partial(\ln L)} = \alpha_L.$$

Якщо $\alpha_1 > \alpha_2$, то зростання виробництва є інтенсивним, при $\alpha_1 < \alpha_2$ спостерігається екстенсивне зростання.

Розглянемо темп зростання обсягу виробництва у період часу $t+1$ порівняно з періодом часу t :

$$\frac{X_{t+1}}{X_t} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t} \right)^{\alpha_2}.$$

Піднісши обидві частини цієї рівності до степеню $\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}$, знаходимо:

$$\left(\frac{X_{t+1}}{X_t} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t} \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \cdot \left(\frac{L_{t+1}}{L_t} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}}.$$

Ввівши позначення $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = 1 - \alpha$, отримаємо:

$$\left(\frac{X_{t+1}}{X_t} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t} \right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{L_{t+1}}{L_t} \right)^{1-\alpha}. \quad (3.4)$$

У правій частині рівності (3.4) маємо зважену середню геометричну темпів зростання витрат ресурсів, де ваговими коефіцієнтами α та $1 - \alpha$ є відносні коефіцієнти еластичності факторів $\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$ та $\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$.

При $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$ обсяг виробництва зростає швидше, ніж у середньому зростають фактори виробництва:

$$\frac{X_{t+1}}{X_t} > \left(\frac{X_{t+1}}{X_t} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t} \right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{L_{t+1}}{L_t} \right)^{1-\alpha},$$

тобто темп зростання виробництва більший, ніж середній темп зростання факторів. Отже, при $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$ виробнича функція характеризує зростаючу економічну систему.

3.3 Ізокванти та ізокліналі

Ізоквантою виробничої функції $X = F(K, L)$ називають лінію рівня цієї функції на координатній площині OKL . Отже, рівняння ізокванти має вигляд: $F(K, L) = X_0 = \text{const}$.

Для мультиплікативної виробничої функції рівняння ізокванти має вигляд:

$$A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2} = X_0 = \text{const}.$$

Звідси знаходимо:

$$K^{\alpha_1} = \frac{X_0}{A \cdot L^{\alpha_2}} = \frac{X_0}{A} L^{-\alpha_2} \Rightarrow K = \left(\frac{X_0}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha_1}} L^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} = C \cdot L^{-\lambda}, \lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Отримали рівняння гіперболи, асимптотами якої є осі координат.

Для різних значень K та L , розташованих на одній ізокванті, обсяг виробництва є сталим, тобто тут ресурси K та L замінюють один одного.

Оскільки на ізокванті $F(K, L) = X_0 = \text{const}$, то на цій кривій маємо:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial K} dK + \frac{\partial F}{\partial L} dL = 0. \quad (3.5)$$

Частинні похідні $\frac{\partial F}{\partial K} > 0$, $\frac{\partial F}{\partial L} > 0$, тому у рівності (3.5) диференціали dK та dL мають різні знаки. Якщо $dL < 0$, тобто скорочуються витрати праці, то для збереження виробництва на сталому рівні потрібно, щоб витрати капіталу $dK > 0$. Зменшення витрат праці на величину $|dL|$ повинно компенсуватися збільшенням інвестицій у виробничі фонди на величину $|dK|$.

Відношення модулів диференціалів факторів виробництва називають граничною нормою заміщення одного фактора іншим:

$$s_K = \frac{|dK|}{|dL|} = -\frac{dK}{dL} = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K} \text{ — гранична норма заміщення праці капіталом;}$$

$$s_L = \frac{|dL|}{|dK|} = -\frac{dL}{dK} = \frac{\partial F / \partial K}{\partial F / \partial L} \text{ — гранична норма заміщення капіталу працею.}$$

При цьому $s_K \cdot s_L = 1$.

Знайдемо граничні норми заміщення для мультиплікативної виробничої функції.

$$\frac{\partial F}{\partial L} = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot \alpha_2 \cdot L^{\alpha_2-1}, \quad \frac{\partial F}{\partial K} = A \cdot \alpha_1 \cdot K^{\alpha_1-1} \cdot L^{\alpha_2}.$$

$$\text{Тоді } s_K = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{K}{L}, \quad s_L = \frac{\partial F / \partial K}{\partial F / \partial L} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{L}{K}.$$

Лінії найбільшого зростання виробничої функції називають її ізокліналями. Оскільки напрям найбільшого зростання функції збігається з напрямом її градієнта, а градієнт функції є ортогональним до її ліній рівня, то ізоклінали виробничої функції є ортогональними до її ізоквант.

Гradient виробничої функції $\text{grad } X = \left(\frac{\partial F}{\partial K}, \frac{\partial F}{\partial L} \right)$, то рівняння ізокліналі у диференціальній формі можна записати у вигляді:

$$\frac{dK}{\frac{\partial F}{\partial K}} = \frac{dL}{\frac{\partial F}{\partial L}}. \quad (3.6)$$

Знайдемо ізокліналі мультиплікативної виробничої функції. Підставивши вирази для частинних похідних

$$\frac{\partial F}{\partial L} = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot \alpha_2 \cdot L^{\alpha_2-1} = \alpha_2 \cdot \frac{X}{L}, \quad \frac{\partial F}{\partial K} = A \cdot \alpha_1 \cdot K^{\alpha_1-1} \cdot L^{\alpha_2} = \alpha_1 \cdot \frac{X}{K}$$

у (3.6), отримаємо диференціальне рівняння:

$$\frac{K \cdot dK}{\alpha_1} = \frac{L \cdot dL}{\alpha_2}.$$

Інтегруючи ліву частину рівняння за змінною K , а праву частину – за змінною L , отримуємо рівняння ізокліналей у вигляді:

$$\frac{K^2}{2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{L^2}{2} + C \Leftrightarrow K = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} L^2 + a},$$

де $a = K_0^2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} L_0^2$, (K_0, L_0) – координати точки, через яку проходить ізокліналь.

При $a = 0$ рівняння ізокліналі – це рівняння прямої $K = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \cdot L$.

3.4 Масштаб та ефективність виробництва

Перейдемо у мультиплікативній виробничій функції до безрозмірних величин. Нехай X_0 , K_0 , L_0 – значення обсягу виробництва та витрат ресурсів (виробничих факторів) у базовому році. Тоді мультиплікативну виробничу функцію у відносних показниках можна записати у наступному вигляді:

$$\frac{X}{X_0} = \left(\frac{K}{K_0} \right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{L}{L_0} \right)^{\alpha_2}. \quad (3.7)$$

Позначимо $\frac{X}{X_0} = \tilde{X}$, $\frac{K}{K_0} = \tilde{K}$, $\frac{L}{L_0} = \tilde{L}$. Тоді рівність (3.7) можна записати у вигляді:

$$\tilde{X} = \tilde{K}^{\alpha_1} \tilde{L}^{\alpha_2}. \quad (3.8)$$

Знайдемо ефективність економічної системи, діяльність якої описується виробничою функцією (3.8). Під ефективністю розуміють відношення результату до витрат, понесених на його отримання. У виробничій функції присутні два види витрат: витрати праці $\tilde{L}$ та витрати капіталу $\tilde{K}$. У відповідності з цим розрізняють два частинних показники ефективності: $\frac{\tilde{X}}{\tilde{K}}$ – фондовіддача; $\frac{\tilde{X}}{\tilde{L}}$ – продуктивність праці.

Узагальненим показником економічної ефективності є зважена середня геометрична частинних показників, яку називають коефіцієнтом економічної ефективності:

$$E = \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{K}} \right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{L}} \right)^{1-\alpha}, \quad (3.9)$$

де $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$, $1 - \alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$. Вагові коефіцієнти α та $1 - \alpha$ називають відносними еластичностями.

З допомогою коефіцієнта економічної ефективності виробничу функцію (3.8) можна записати у вигляді:

$$\tilde{X} = E \cdot \tilde{K}^{\alpha} \cdot \tilde{L}^{1-\alpha}. \quad (3.10)$$

У (3.10) коефіцієнт E не є сталою величиною: $E = E(\tilde{K}, \tilde{L})$.

Під масштабом виробництва M розуміють середню величину витрачених ресурсів:

$$M = \tilde{K}^{\alpha} \cdot \tilde{L}^{1-\alpha}. \quad (3.11)$$

З (3.10) та (3.11) випливає, що обсяг виробництва $\tilde{X}$ дорівнює добутку коефіцієнта економічної ефективності на масштаб виробництва.

3.5 Однорідні виробничі функції. Виробничі функції зі сталою еластичністю

Виробничу функцію $X = F(K, L)$ називають однорідною виробничою функцією степеня γ , якщо

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^\gamma F(K, L). \quad (3.12)$$

Наприклад, мультиплікативна виробнича функція є однорідною виробничою функцією степеня $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2$, оскільки

$$F(\lambda K, \lambda L) = A \lambda^{\alpha_1} K^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2} L^{\alpha_2} = \lambda^{\alpha_1 + \alpha_2} A K^{\alpha_1} L^{\alpha_2} = \lambda^{\alpha_1 + \alpha_2} F(K, L).$$

Отримаємо вираз для граничної норми s_K заміщення праці капіталом для однорідної виробничої функції. У цьому випадку $F(K, L) = L^\gamma \cdot F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = L^\gamma f(k)$, де $k = \frac{K}{L}$ – фондоозброєність, $f(k) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$. Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial F}{\partial L}$ та $\frac{\partial F}{\partial K}$. Враховуючи, що $k = \frac{K}{L}$, знаходимо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial L} &= \gamma \cdot L^{\gamma-1} f(k) - L^\gamma f'(k) \cdot \frac{K}{L^2} = L^{\gamma-1} (\gamma f(k) - k \cdot f'(k)), \\ \frac{\partial F}{\partial K} &= L^\gamma \cdot f'(k) \cdot \frac{1}{L} = L^{\gamma-1} f'(k). \end{aligned}$$

Отже, гранична норма заміщення праці капіталом має вигляд:

$$s_K = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K} = \frac{\gamma \cdot f(k)}{f'(k)} - k. \quad (3.13)$$

Отже, гранична норма s_K заміщення праці капіталом є функцією лише фондоозброєності.

Для однорідних виробничих функцій вводиться поняття еластичності заміщення праці капіталом:

$$\sigma_K = \frac{dk/k}{ds_K/s_K}. \quad (3.14)$$

Ця величина вказує, на скільки % потрібно змінити фондоозброєність, щоб досягти зміни граничної норми заміщення праці капіталом на 1%. Аналогічно вводиться поняття еластичності σ_L заміщення капіталу працею. Можна показати, що $\sigma_K = \sigma_L = \sigma$. Покажемо, що для мультиплікативних виробничих функцій

$\sigma=1$. У цьому випадку обсяг виробництва $X = F(K, L) = A \cdot K^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2}$, $\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 \frac{X}{K}$,

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 \frac{X}{L}, s_K = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} k, k = \frac{K}{L}, \frac{ds_K}{dk} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \sigma_K = \frac{dk}{k} \cdot \frac{s_K}{ds_K} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1.$$

Виробничі функції, для яких еластичність заміщення є сталою ($\sigma = \text{const}$), називають *CES* – функціями.

Оскільки у цьому випадку $\sigma = \frac{dk/k}{ds/s} = \text{const}$, то маємо:

$$\frac{ds}{s} = \frac{dk}{\sigma \cdot k} \Rightarrow \ln s = \frac{1}{\sigma} \ln k + \ln C. \text{ З останньої рівності знаходимо, що гранична}$$

норма заміщення у даному випадку має вигляд: $s = C \cdot k^{\frac{1}{\sigma}}$, де C – стала.

Підставивши отриманий вираз для s у (3.13), знайдемо вираз для *CES* – функції. Маємо: $C \cdot k^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{\gamma \cdot f(k)}{f'(k)} - k$. Звідси знаходимо, що $\frac{f'(k)}{f(k)} = \frac{\gamma}{Ck^{\frac{1}{\sigma}} + k}$.

Інтегруючи обидві частини останньої рівності, отримуємо (C_1 – стала інтегрування):

$$\ln f = \frac{\gamma\sigma}{\sigma-1} \ln \left(C_1 \left(C + k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right) \right).$$

Звідси вираз для $f(k)$ має вигляд:

$$f(k) = C_1 \left(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + C \right)^{\frac{\gamma\sigma}{\sigma-1}}.$$

Враховуючи, що $k = \frac{K}{L}$, $f = \frac{X}{L^\gamma}$, знаходимо вираз для виробничої *CES* – функції у вигляді:

$$X = C_1 \left(K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + CL^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\gamma\sigma}{\sigma-1}}.$$

Ввівши позначення $\rho = \frac{1-\sigma}{\sigma}$, $\frac{1}{C+1} = \alpha < 1$, $C_1(C+1)^{\frac{1}{\rho}} = A$, отримуємо вираз для *CES* – функції через K та L у вигляді:

$$X = F(K, L) = A \cdot \left(\alpha K^{-\rho} + (1-\alpha) L^{-\rho} \right)^{\frac{\gamma}{\rho}}. \quad (3.15)$$

При $\gamma=1$ та $\sigma \rightarrow 1$ CES – функція прямує до виробничої функції Кобба – Дугласа.

Крім розглянутої мультиплікативної виробничої функції у економічних дослідженнях часто зустрічаються лінійна виробнича функція $X = A \cdot K + B \cdot L$, а також виробнича функція типу «витрати – випуск» $X = \min \left\{ \frac{K}{A}, \frac{L}{B} \right\}$, де A та B – відомі константи.

Ввівши у мультиплікативну виробничу функцію множник $e^{\lambda t}$, де λ – темп зростання функції за рахунок інтенсивних факторів (вдосконалення технології, підвищення кваліфікації працівників тощо), отримуємо виробничу функцію Тінбергена: $X = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta} \cdot e^{\lambda t}$. При дослідженнях впливу факторів виробництва на його обсяг зустрічаються також інші типи виробничих функцій.

3.6 Побудова виробничих функцій. Метод найменших квадратів (МНК)

Для побудови виробничих функцій використовують статистичні дані про обсяги та фактори виробництва. Розглянемо найпростіший випадок, коли виробнича функція визначає залежність обсягу виробництва у лише від одного фактора виробництва x , тобто вона має вигляд $y = y(x)$. Припускається, що між змінними y та x існує зв'язок, на який накладається дія випадкових факторів, тобто між цим змінними існує статистичний зв'язок. Наявність такого зв'язку проявляється у тому, що зміна значень однієї змінної приводить до зміни математичного сподівання іншої змінної. Формулу $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$, що встановлює статистичний зв'язок між змінними y та x , називають рівнянням регресії. Найбільш простою є лінійна регресія, що описується рівнянням $\tilde{y} = a_0 + a_1 x$.

Основним методом побудови рівнянь регресії є метод найменших квадратів (МНК). Спочатку встановлюється критерій близькості між точками (x_i, y_i) , встановленими у результаті спостереження, та точками $(x_i, a_0 + a_1 x_i)$, ординати яких обчислюються за рівнянням лінійної регресії $\tilde{y} = a_0 + a_1 x$:

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 \rightarrow \min. \quad (3.16)$$

У (3.16) a_0 та a_1 – невідомі параметри рівняння лінійної регресії, тобто досліджуємо на мінімум функцію (3.16) двох змінних a_0 та a_1 . Застосування необхідної умови екстремуму цієї функції – рівності нулю її частинних похідних дозволяє отримати систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих параметрів регресії a_0 та a_1 :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i - na_0 - a_1 \sum_{i=1}^n x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i - a_0 \sum_{i=1}^n x_i - a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Введемо позначення: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$. Розв'язавши систему (3.17), отримаємо значення параметрів регресії:

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2}, \quad a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}. \quad (3.18)$$

Приклад. Маємо статистичні дані про вартість x основних виробничих фондів підприємств галузі та валовим річним обсягом y у виробництва на цих підприємствах, наведених у таблиці 3.1. Знайти виробничу функцію для даної галузі у вигляді рівняння лінійної регресії $\tilde{y} = a_0 + a_1 x$.

Розв'язання. Для знаходження параметрів a_0 та a_1 рівняння лінійної регресії використаємо дані таблиці 3.1 та формули (3.18). підставивши дані таблиці у формули (3.18), отримуємо:

Таблиця 3.1. Статистичні дані про вартість x основних виробничих фондів підприємств галузі та валовим річним обсягом y у виробництва на цих підприємствах

Вартість основних виробничих фондів x , млн. г.о.	Валовий річний обсяг виробництва y , млн. г.о.	x^2	xy	$\tilde{y} = a_0 + a_1 x$
12	28	144	336	15
16	40	256	640	24
25	38	625	950	43
38	65	1444	2470	70
43	80	1849	3440	81
55	101	3025	5555	106
60	95	3600	5700	117
80	125	6400	10000	159
91	183	8281	16653	183
100	245	10000	24500	202
$\Sigma = 520$	$\Sigma = 1000$	$\Sigma = 35624$	$\Sigma = 70244$	$\Sigma = 1000$

$a_0 = -10,24$, $a_1 = 2,12$. Рівняння лінійної регресії має вигляд: $\tilde{y} = -10,24 + 2,12 \cdot x$. Значення $\tilde{y}$ для відповідних значень x наведено у останньому стовпці таблиці 3.1.

3.7 Побудова нелінійних моделей

Для моделювання зв'язку між змінними x та y можна використовувати нелінійні залежності, наприклад, параболу другого порядку $\tilde{y} = a_0 + a_1x + a_2x^2$, гіперболу $\tilde{y} = a_0 + \frac{a_1}{x}$, показникову функцію $\tilde{y} = a_0 \cdot a_1^x$, логарифмічну функцію $\tilde{y} = a_0 + a_1 \ln x$, логістичну криву $\tilde{y} = \frac{b}{1 + e^{a_0 + a_1x}}$ тощо. Всі наведені тут залежності є лінійними за своїми параметрами або такими, що зводяться до лінійних. Для залежностей, що є лінійними за своїми параметрами, можна безпосередньо застосувати МНК та мінімізувати суму квадратів відхилень:

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}(x_i, a_0, a_1, \dots, a_k))^2 \rightarrow \min. \quad (3.19)$$

Параметри регресії $a_0, a_1, \dots, a_k$ знаходимо з необхідної умови екстремуму функції $Q(a_0, a_1, \dots, a_k)$:

$$\frac{\partial Q}{\partial a_i} = 0, i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.20)$$

Для визначення коефіцієнтів a_0, a_1, a_2 параболи $\tilde{y} = a_0 + a_1x + a_2x^2$ з (3.20) отримуємо систему лінійних рівнянь МНК:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i - na_0 - a_1 \sum_{i=1}^n x_i - a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0, \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i - a_0 \sum_{i=1}^n x_i - a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 - a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = 0, \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i - a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 - a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 - a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Рівняння МНК для отримання коефіцієнтів a_0, a_1 гіперболічної регресійної залежності $\tilde{y} = a_0 + \frac{a_1}{x}$ знайдемо, замінивши у системі (3.17) рівнянь для коефіцієнтів лінійної регресії x на $\frac{1}{x}$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i - na_0 - a_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 0, \\ \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i} - a_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - a_1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Для визначення параметрів a_0 , a_1 показникової залежності $\tilde{y} = a_0 \cdot a_1^x$ її попередньо логарифмують: $\ln \tilde{y} = \ln a_0 + x \cdot \ln a_1$. Ввівши позначення $\alpha_0 = \ln a_0$, $\alpha_1 = \ln a_1$, $z = \ln \tilde{y}$, отримаємо систему рівнянь для визначення невідомих параметрів α_0 та α_1 :

$$\begin{cases} n\alpha_0 + \alpha_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n z_i, \\ \alpha_0 \sum_{i=1}^n x_i + \alpha_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i z_i. \end{cases} \quad (3.23)$$

Тут $z_i = \ln y_i$. З (3.23) знаходимо α_0 та α_1 , далі $a_0 = e^{\alpha_0}$, $a_1 = e^{\alpha_1}$.

Зв'язок між змінними x та y вимірюється через їх кореляцію. Виміряти кореляцію між змінними x та y – означає визначити, наскільки зміна y залежить від зміни x . Для кількісної оцінки кореляції між показниками x та y використовують лінійний коефіцієнт кореляції:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{\left(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \left(n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right)}}.$$

Лінійний коефіцієнт кореляції $r \in [-1; 1]$. При $r = 0$ лінійна залежність між змінними x та y відсутня. При наближенні $|r|$ до 1 залежність $y(x)$ стає близькою до лінійної. При $r > 0$ збільшення x супроводжується збільшенням y , при $r < 0$ характер залежності є протилежним: зростання x супроводжується спаданням y .

3.8 Лінійна множинна регресія

Значення економічних величин здебільшого визначаються впливом не одного, а кількох факторів, тобто розглядається модель деякої економічної величини y у вигляді функції m незалежних змінних $x_1, x_2, \dots, x_m$: $\tilde{y} = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Розглянемо модель лінійної залежності: $\tilde{y} = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_mx_m$, тобто лінійну множинну регресію. Відхилення значення y_i залежної змінної у i -му спостереженні, $i=1,2,\dots,n$. від значення $\tilde{y}_i$, знайденого при значеннях $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}$, позначимо ε_i :

$$\varepsilon_i = y_i - a_0 - a_1x_{i1} - a_2x_{i2} - \dots - a_mx_{im} = y_i - a_0 - \sum_{j=1}^n a_jx_{ij}.$$

У відповідності з МНК параметри $a_0, a_1, \dots, a_m$ лінійної моделі знаходять так, щоб сума $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = Q \rightarrow \min$, тобто:

$$\sum_{i=1}^n \left(y_i - a_0 - \sum_{j=1}^n a_jx_{ij} \right)^2 \rightarrow \min. \quad (3.24)$$

Функція Q , що мінімізується, є квадратичною відносно величин a_j , $j=0,1,2,\dots,n$. Необхідною умовою її мінімуму є рівність нулю всіх її частинних похідних за a_j . Частинні похідні квадратичної функції є лінійними функціями, тому, прирівнюючи їх до нуля, отримуємо систему $m+1$ лінійних алгебраїчних рівнянь з $m+1$ невідомими $a_0, a_1, \dots, a_m$. Розглянемо задачу визначення цих коефіцієнтів у матричній формі.

Суму квадратів відхилень ε_i можна записати у вигляді добутку вектора – рядка $\varepsilon^T = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ на вектор – стовпчик ε . Цей вектор – стовпчик можна записати у вигляді: $\varepsilon = y - X \cdot a$, де y – вектор – стовпчик значень y , $y^T = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, a – вектор – стовпчик коефіцієнтів моделі, $a^T = (a_0, a_1, \dots, a_m)$, X – матриця розмірності $n \times (m+1)$, у якій кожен з n рядків – це спостереження вектора значень незалежної змінної:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}$$

Тоді

$$Q = \varepsilon^T \cdot \varepsilon = (y - Xa)^T (y - Xa) = (y^T - a^T X^T)^T (y - Xa) = y^T y - a^T X^T y - y^T Xa + a^T X^T Xa = y^T y - 2a^T X^T y + a^T X^T Xa.$$

Тут при перетвореннях було використано рівність

$$a^T X^T y = y^T X a .$$

Тоді з рівності

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = -2X^T y + 2(X^T X)a = 0$$

знаходимо невідомий вектор коефіцієнтів множинної лінійної регресії у вигляді:

$$a = (X^T X)^{-1} X^T y . \quad (3.25)$$

Формулу (3.25) використовують для розрахунку коефіцієнтів лінійної множинної регресії.

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте означення виробничої функції.
2. Для чого застосовують виробничі функції?
3. Які виробничі функції називають неокласичними?
4. Надайте означення мультиплікативної виробничої функції.
5. Який вигляд має виробнича функція Кобба – Дугласа?
6. Що називають граничними ефективностями факторів виробництва?
7. Як обчислюють граничну фондівдачу та граничну продуктивність праці?
8. Наведіть приклад виробничої функції, що характеризує зростаючу економічну систему.
9. Надайте означення ізокванти та ізокліналі.
10. Як обчислюють граничну норму заміщення факторів виробництва?
11. Що називають масштабом виробництва?
12. Як обчислюють ефективність виробництва?
13. Наведіть приклад однорідної виробничої функції.
14. Надайте означення CES-функції.
15. Наведіть приклади нелінійних виробничих функцій.
16. Як можна побудувати виробничу функцію: Які статистичні дані для цього потрібні?
17. У чому полягає сутність методу найменших квадратів?
18. У чому полягає модель лінійної множинної регресії?
19. Наведіть формулу для розрахунку коефіцієнтів лінійної множинної регресії.

Задачі до теми 3

1. Для лінійної виробничої функції $X = a \cdot K + b \cdot L$, $a > 0$, $b > 0$, побудувати ізокванти та ізоклінали. Знайти норми заміщення праці капіталом s_K та капіталу працею s_L .

Розв'язання. Знайдемо рівняння ізоквант: $X = X_0 = \text{const}$. Звідси отримуємо:

$$a \cdot K + b \cdot L = X_0 \Rightarrow L = \frac{1}{b}(X_0 - aK) = c - \frac{a}{b}K, \quad c = \text{const}.$$

Таким чином, рівняння ізоквант має вигляд: $L = c - \frac{a}{b}K$. Це сімейство паралельних прямих з кутовим коефіцієнтом $-\frac{a}{b}$.

Рівняння ізокліналей у диференціальній формі має вигляд:

$$\frac{dK}{\partial F / \partial K} = \frac{dL}{\partial F / \partial L},$$

де $F(K, L) = a \cdot K + b \cdot L$. Тоді $\frac{\partial F}{\partial K} = a$, $\frac{\partial F}{\partial L} = b$ і рівняння ізокліналей набувають вигляду: $\frac{dK}{a} = \frac{dL}{b}$, звідки $a \cdot dL - b \cdot dK = 0$ або

$aL - bK = C \Rightarrow L = \frac{b}{a}K + C_1$, $C_1 = \text{const}$ – довільна стала. Отже, рівняння ізокліналей – це рівняння паралельних прямих з кутовим коефіцієнтом $\frac{b}{a}$.

Ізокванти ортогональні ізокліналям.

Норма заміщення праці капіталом $s_K = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K} = \frac{b}{a}$, норма заміщення капіталу працею $s_L = \frac{\partial F / \partial K}{\partial F / \partial L} = \frac{a}{b} = \frac{1}{s_K}$.

2. Визначити граничну фондовіддачу та граничну продуктивність праці у економічній системі, функціонування якої описується виробничою функцією $X = F(K, L) = 1500 \cdot K^{0,3} \cdot L^{0,7}$, якщо вартість основних виробничих фондів $K = 3200$ у.г.о., витрати на оплату праці $L = 1000$ у.г.о.

Розв'язання. Гранична фондовіддача $\frac{\partial F}{\partial K} = 1500 \cdot 0,3 \cdot K^{-0,7} \cdot L^{0,7} = 450 \cdot \left(\frac{L}{K}\right)^{0,7}$.

При $K = 3200$, $L = 1000$ $\frac{\partial F}{\partial K} = 450 \cdot \left(\frac{5}{16}\right)^{0,7} \approx 199,346$. Гранична продуктивність

праці $\frac{\partial F}{\partial L} = 1500 \cdot 0,7 \cdot K^{0,3} \cdot L^{-0,3} = 1050 \cdot \left(\frac{K}{L}\right)^{0,3}$. При $K = 3200$, $L = 1000$ гранична продуктивність праці $\frac{\partial F}{\partial L} = 1050 \cdot (3,2)^{0,3} \approx 1488,45$.

3. Для виробничої функції $X = 1200 \cdot K^{0,4} \cdot L^{0,6}$ визначити еластичність виробництва за працею та за капіталом.

Розв'язання. Еластичність виробництва за капіталом $E_K = \frac{\partial(\ln X)}{\partial(\ln K)}$,

еластичність виробництва за працею $E_L = \frac{\partial(\ln X)}{\partial(\ln L)}$. Для заданої виробничої функції $\ln X = \ln 1200 + 0,4 \ln K + 0,6 \ln L$. Тоді $E_K = 0,4$, $E_L = 0,6$.

4. Виробнича функція має вигляд: $X = 0,931 \cdot K^{0,539} \cdot L^{0,594}$. За деякий період часу обсяг виробництва збільшився у 4,08 рази, основні виробничі фонди – у 6,62 рази, кількість працівників – у 1,79 рази. Яка частина зростання обсягу виробництва пояснюється зростанням його масштабу, а яка – зростанням його ефективності?

Розв'язання. Запишемо задану мультиплікативну виробничу функцію у безрозмірних величинах. Отримуємо: $\tilde{X} = \tilde{K}^{0,539} \cdot \tilde{L}^{0,594}$, де $\tilde{X} = \frac{X}{X_0}$, $\tilde{K} = \frac{K}{K_0}$,

$\tilde{L} = \frac{L}{L_0}$ – відношення значень відповідних показників у періоді часу, що є об'єктом дослідження, до їх значень у базовому періоді часу, тобто $\tilde{X} = 4,08$, $\tilde{K} = 6,62$, $\tilde{L} = 1,79$. Тоді $\tilde{X} = E \cdot M$, де M – масштаб виробництва, E – його економічна ефективність. Масштаб виробництва (середню вартість витрачених ресурсів) визначаємо за формулою $M = \tilde{K}^\alpha \cdot \tilde{L}^{1-\alpha}$, де $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$, $\alpha_1 = 0,539$,

$\alpha_2 = 0,594$. Тоді $\alpha = \frac{0,539}{0,539 + 0,594} = 0,476$. Обчислимо масштаб виробництва:

$M = 6,62^{0,476} \cdot 1,79^{(1-0,476)} = 2,459 \cdot 1,356 = 3,336$. Знаходимо економічну ефективність

виробництва: $E = \frac{\tilde{X}}{M} = \frac{4,08}{3,336} = 1,223$. Отже, обсяг виробництва збільшився у 3,336

рази за рахунок зростання масштабу виробництва та у 1,223 рази – за рахунок підвищення його економічної ефективності.

5. Записати рівняння ізокліналей для виробничої функції з попереднього прикладу.

Розв'язання. Задана виробнича функція має вигляд $X = 0,931 \cdot K^{0,539} \cdot L^{0,594}$. Диференціальне рівняння ізокліналей:

$$\frac{dK}{\partial F / \partial K} = \frac{dL}{\partial F / \partial L}.$$

Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial F}{\partial K}$ та $\frac{\partial F}{\partial L}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial K} &= 0,931 \cdot 0,539 \cdot K^{0,539-1} \cdot L^{0,594} = 0,502 \cdot K^{-0,461} \cdot L^{0,594}; \\ \frac{\partial F}{\partial L} &= 0,931 \cdot 0,594 \cdot K^{0,539} \cdot L^{0,594-1} = 0,553 \cdot K^{0,539} \cdot L^{-0,406}.\end{aligned}$$

Підставивши знайдені частинні похідні у диференціальне рівняння ізокліналей, отримуємо:

$$\frac{dK \cdot K^{0,461}}{0,502 \cdot L^{0,594}} = \frac{dL \cdot L^{0,406}}{0,553 \cdot K^{0,539}}.$$

Звідси, розділивши змінні, знаходимо:

$$0,502 \cdot L \cdot dL = 0,553 \cdot K \cdot dK.$$

Інтегруємо ліву частину останньої рівності по змінній L , праву – по K :

$$0,502 \cdot \frac{L^2}{2} = 0,553 \cdot \frac{K^2}{2} + C.$$

Запишемо цю рівність у вигляді:

$$\frac{L^2}{0,553} - \frac{K^2}{0,502} = C^2.$$

Отримали рівняння сімейства гіпербол, що є ізокліналями заданої виробничої функції.

6. Виробнича функція Леонтьєва визначається рівністю $X = \min \left\{ \frac{K}{a}, \frac{L}{b} \right\}$, де a та b – відповідна кількість одиниць капіталу та одиниць праці, необхідних для виробництва одиниці продукції. Побудувати ізокванти та ізокліналі виробничої функції Леонтьєва при $a = 5$, $b = 3$.

Тема 4. Максимізація корисності та модель споживчого вибору

4.1 Функція корисності та задача споживчого вибору

Нехай споживач має дохід J , який він повністю витрачає на придбання деяких товарів чи послуг. Ціни цих товарів вважаються заданими. Враховуючи структуру цін, величину доходу та власні уподобання, споживач придбає певну кількість товарів (послуг). Математичну модель поведінки споживача називають моделлю споживчого вибору.

Розглянемо модель з двома видами товарів, тобто будемо вважати, що кількість товарів, придбаних споживачем, визначається вектором (x_1, x_2) , де x_i – кількість одиниць i -го товару, придбаних споживачем, $i = 1, 2$.

Вибір споживача характеризують відношеннями переваги, суть якого полягає у наступному. Вважається, що споживач може вибрати з двох наборів товарів, $A = (a_1, a_2)$ та $B = (b_1, b_2)$, більш бажаний, або споживач не бачить між ними різниці. Якщо набір товарів $A = (a_1, a_2)$ є більш бажаним порівняно з набором $B = (b_1, b_2)$, то використовують позначення $A \succ B$. Якщо $A \prec B$, то набір B є більш бажаним, ніж A . Якщо $A \sim B$, то набори є рівноцінними для споживача.

Відношення переваги має властивості транзитивності та ненасиченості. Нехай $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$. Тоді:

- 1) $A \succ B \wedge B \succ C \Rightarrow A \succ C$ – властивість транзитивності;
- 2) $a_1 > b_1 \wedge a_2 > b_2 \Rightarrow A \succ B$ – властивість ненасиченості.

На множині споживчих наборів (x_1, x_2) визначають функцію $u(x_1, x_2)$, яку називають функцією корисності споживача. Її значення $u(x_1, x_2)$ на споживчому наборі (x_1, x_2) дорівнює оцінці цього набору споживачем (рівню задоволення потреб споживача даним набором). Кожний споживач має власну функцію корисності. Якщо набір товарів $A = (a_1, a_2)$ є більш бажаним для споживача, ніж набір $B = (b_1, b_2)$, то $u(a_1, a_2) > u(b_1, b_2)$, тобто $A \succ B \Rightarrow u(A) > u(B)$.

У теорії споживчого вибору вважається, що функція корисності має наступні властивості:

- 1) $\frac{\partial u}{\partial x_i} > 0, i = 1, 2$ – зі зростанням споживання товару його корисність зростає;
- 2) $\lim_{x_i \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \infty$ – невеликий приріст споживання товару при його початковій відсутності суттєво збільшує його корисність;

- 3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0, i = 1, 2$ – зі зростанням споживання товару швидкість зростання його корисності сповільнюється;

4) $\lim_{x_i \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ – при дуже високому рівню споживання товару його подальше

збільшення не приводить до збільшення корисності.

Аналогічні поняття та властивості можна визначити для наборів з n товарів чи послуг $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, на яких визначають функцію корисності $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Частинну похідну $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ називають граничною корисністю i -го товару.

Лінію рівня $u(x_1, x_2) = c = \text{const}$ на площині Ox_1x_2 називають лінією байдужості. Для наборів $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ n товарів розглядають поверхні байдужості $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = c = \text{const}$, на яких корисність наборів товарів є сталою. Множину всіх ліній (поверхонь) байдужості називають картою байдужості.

Рівняння поверхні байдужості можна записати у диференціальній формі. Оскільки на такій поверхні функція корисності є сталою, то

$$du = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i = 0. \quad (4.1)$$

Умова (4.1) означає, що дотична до поверхні байдужості ортогональна до градієнта функції корисності. З точки зору споживача наявність множини наборів товарів, що мають однакову корисність, означає можливість заміни одного набору товарів рівноцінним йому іншим набором.

Нехай у (4.1) $dx_3 = dx_4 = \dots = dx_n = 0$, тоді $\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 = 0$. Звідси

знаходимо:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2}. \quad (4.2)$$

Відношення $\frac{dx_2}{dx_1}$ називають граничною нормою заміни першого товару

другим. Вона дорівнює відношенню граничних корисностей першого та другого товарів і показує, скільки потрібно одиниць другого товару, щоб замінити одиницю першого товару.

Бюджетною множиною називають множину наборів товарів, які може придбати споживач, що має певний сталий дохід J . Якщо $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – набір товарів, $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ – вектор – рядок відповідних значень цін, то бюджетна множина $B = \{X : P \cdot X \leq J\}$.

4.2 Модель поведінки споживача

Споживач намагається максимізувати свою функцію корисності за умови обмеженості доходу; $u(X) \rightarrow \max, X \in B$. За умови використання всього доходу J на придбання наборів товарів споживачу потрібно визначити $\max_{P \cdot X = J} u(X)$. Маємо задачу на умовний екстремум за наявності обмеження $P \cdot X = J$. Вона зводиться до знаходження безумовного екстремуму функції Лагранжа

$$L(X) = u(X) + \lambda(J - P \cdot X), \quad (4.3)$$

де $\lambda = \text{const}$ – множник Лагранжа.

Необхідні умови екстремуму функції (4.3) мають вигляд:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0.$$

Звідси отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0, i = 1, 2, \dots, n; \\ \sum_{j=1}^n p_j x_j = J. \end{cases} \quad (4.4)$$

Система (4.4) – це система $n+1$ рівнянь з $n+1$ невідомими $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda$. Можна довести, що її розв'язками є координати точки максимуму функції Лагранжа (4.3).

З системи (4.4) випливає, що споживач при фіксованому сталому рівні доходу вибирає оптимальний набір $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ – розв'язок цієї системи таким чином, що у точці X^* відношення граничних корисностей дорівнюють відношенням цін:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} : \frac{\partial u}{\partial x_2} : \dots : \frac{\partial u}{\partial x_n} = p_1 : p_2 : \dots : p_n.$$

Розв'язавши систему (4.4) відносно координат вектора X^* , отримаємо функцію індивідуального попиту у вигляді рівностей $x_i^* = x_i^*(p_1, p_2, \dots, p_n, J)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Нехай $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ – вектор цін на набір товарів $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, J – доход споживача. Функцію $D(P, J)$, що ставить у відповідність парі (P, J) набір товарів X^* , що надає споживачу максимальну корисність при цінах P та доході J , називають функцією індивідуального попиту.

Конкретна форма функції індивідуального попиту

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = D((p_1, p_2, \dots, p_n), J)$$

визначається шляхом розв'язання задачі оптимізації функції Лагранжа (4.3) або шляхом статистичної обробки результатів опитувань споживачів.

Функція індивідуального попиту є неперервною та двічі диференційовною за своїми аргументами. Вона є також однорідною функцією нульового степеня, тобто $D(\lambda P, \lambda J) = D(P, J)$.

4.3 Залежність попиту споживача від зміни доходу

Функцію індивідуального попиту визначають як розв'язок системи (4.4). Розглянемо випадок, коли доход J є змінною величиною, а ціни $p_1, p_2, \dots, p_n$ є фіксованими. Тоді компоненти векторної функції D індивідуального попиту $x_j^* = D_j(J)$ залежать лише від змінної J , а їх похідні по J описують характер зміни попиту при зміні доходу. Диференціюючи рівняння (4.4)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ \sum_{j=1}^n p_j x_j = J. \end{cases}$$

за змінною J і вважаючи при цьому $x_i = x_i(J)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\lambda = \lambda(J)$, отримаємо:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial J} - p_i \frac{\partial \lambda}{\partial J} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial x_j}{\partial J} = 1. \end{cases} \quad (4.5)$$

Нехай $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{ij}$. Запишемо систему (4.5) у вигляді:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n u_{ij} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial J} - p_i \frac{\partial \lambda}{\partial J} = 0, i=1,2,\dots,n; \\ \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial x_j}{\partial J} = 1. \end{cases} \quad (4.6)$$

Якщо функція корисності u є відомою, а ціни p_i , $i=1,2,\dots,n$ – задані, то система (4.6) – це система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно похідних $\frac{\partial x_j}{\partial J}$ функцій індивідуального попиту на i -й товар у точці $X^*(J)$. Запишемо цю систему у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} & -p_1 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} & -p_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} & -p_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial J} \\ \frac{\partial x_2}{\partial J} \\ \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial J} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Якщо визначник системи (4.7) не дорівнює нулю, її розв'язок – вектор $\left(\frac{\partial x_1}{\partial J}, \frac{\partial x_2}{\partial J}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial J}, \frac{\partial \lambda}{\partial J}\right)$ можна знайти за формулами Крамера. Компоненти цього вектора відображають реакцію споживача на зміну доходу.

4.4 Залежність попиту від зміни цін

Компоненти вектор – функції індивідуального попиту $D_i(P, J)$, як і у попередньому випадку визначаються з системи рівнянь (4.4). Частинні похідні $\frac{\partial x_i}{\partial p_k}$ можна знайти, диференціюючи ці рівняння по p_k . Позначивши $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{ij}$, у результаті отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно похідних $\frac{\partial x_i}{\partial p_k}$:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n u_{ij} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial p_k} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_k} \cdot p_i = \lambda \cdot \delta_{ik}, i=1,2,\dots,n; \\ \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_k} = -p_k. \end{cases} \quad (4.8)$$

Знаходячи ці невідомі величини за формулами Крамера, маємо:

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_k} = \lambda \cdot \frac{\Delta_{kj}}{\Delta} - x_k \cdot \frac{\partial x_j}{\partial J}, j=1,2,\dots,n; k=1,2,\dots,n. \quad (4.9)$$

У формулах (4.9) Δ – визначник системи (4.8), Δ_{kj} – визначник, який отримуємо з визначника Δ викреслюванням k -го рядка та j -го стовпця. Рівняння (4.9) називають рівнянням Слуцького. З нього випливає, що при зміні ціни k -го товару на малу величину зміна попиту на j -й товар формується як сума двох факторів: ефектів заміщення та доходу. Другий доданок у правій частині (4.9), що дорівнює $-x_k \cdot \frac{\partial x_j}{\partial J}$, називають ефектом доходу. Він описує зміну доходу споживача, викликану зміною ціни k -го товару. Перший доданок у правій частині (4.9), що дорівнює $\lambda \cdot \frac{\Delta_{kj}}{\Delta} = c_{kj}$ називають коефіцієнтом Слуцького. Він характеризує вплив зміни ціни на викликану цією зміною заміну товарів при придбанні. При зниженні ціни на k -й товар відбувається зростання доходу споживача, частина якого розподіляється на придбання інших товарів. Матриця коефіцієнтів Слуцького є симетричною: $c_{kj} = c_{jk}$. Діагональні коефіцієнти цієї матриці характеризують чистий ефект заміщення та відображають швидкість зміни попиту на k -й товар при малих змінах його ціни та доходу споживача. Ця зміна попиту відбувається таким чином, що корисність вибору споживачем набору товарів залишається незмінною.

Напрямок зміни попиту на j -й товар при зміні ціни k -го товару визначається знаком коефіцієнта Слуцького c_{kj} . Якщо $c_{kj} > 0$, то k -й та j -й товари замінюють один одного, при $c_{kj} < 0$ доповнюють один одного, при $c_{kj} = 0$ – є незалежними.

Запитання для самоперевірки

1. У чому полягає відношення переваги при виборі споживача одного з двох наборів товарів?
2. Сформулюйте відношення транзитивності та ненасиченості відношення переваги.
3. Надайте означення функції корисності.
4. Що є областю визначення функції корисності?
5. Наведіть властивості функції корисності.

6. Як обчислюють граничну корисність товару?
7. Сформулюйте означення лінії байдужості та поверхні байдужості.
8. Що називають картою байдужості?
9. Як обчислюють граничну норму заміни одного товару іншим?
10. Наведіть означення бюджетної множини наборів товарів.
11. Як споживач здійснює оптимальний вибір товарів при фіксованому доході?
12. Як визначають функцію індивідуального попиту?
13. Як визначають реакцію споживача на зміну доходу?
14. Поясніть зміст коефіцієнта Слуцького.

Задачі до теми 4

Функція попиту відображає залежність попиту $\bar{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ на деякий набір n товарів від цін на товари цього набору: $q_i = q_i(p_1, p_2, \dots, p_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тут q_i – попит на i -й товар, p_i – його ціна. Функція попиту є вектор – функцією.

Функція споживання описує спільне споживання товарів з деякого набору. Її значення $U = U(q_1, q_2, \dots, q_n)$ дорівнює загальним витратам на придбання товарів з набору, функція попиту якого має вигляд: $\bar{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$. Функція споживання є скалярною функцією. Довільна функція n змінних $U = U(q_1, q_2, \dots, q_n)$ може бути функцією споживання, якщо вона є опуклою вгору, тобто $d^2U < 0$.

Далі розглядатимемо набори з двох товарів, їх функція попиту – $\bar{q} = (q_1, q_2)$, функція споживання – $U = U(q_1, q_2)$. Лінію рівня цієї функції, тобто лінію $U(q_1, q_2) = C$ називають лінією байдужості, множину всіх ліній байдужості – картою байдужості.

Співвідношення граничних корисностей товарів A та B , взяте з протилежним знаком, тобто $\left(-\frac{dq_1}{dq_2}\right)$, називають нормою еквівалентного заміщення цих товарів. Множину кривих, що визначаються рівністю $-\frac{dq_1}{dq_2} = C = \text{const}$, називають картою переваг.

Оптимальний попит (q_1, q_2) відповідає максимуму функції споживання U та визначається з рівності $dU = 0$.

Задача 1. Залежність витрат споживачів на придбання товарів A та B від їх кількості q_1 та q_2 визначається формулою $U = 90q_1 - q_1^2 + 50q_2 - q_2^2$. Чи може ця функція бути функцією попиту? Якщо так, то побудувати карти байдужості та переваг.

Розв'язання. Знайдемо другий диференціал функції U :

$$d^2U = \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} (dq_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} dq_1 dq_2 + \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} (dq_2)^2.$$

Запишемо частинні похідні функції $U = U(q_1, q_2)$ та підставимо їх у вираз для другого диференціалу:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 90 - 2q_1, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 50 - 2q_2, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} = 0.$$

$d^2U = -2(dq_1)^2 - 2(dq_2)^2 < 0$, тому задана функція $U = U(q_1, q_2)$ може бути функцією споживання. Карта байдужості для цієї функції $U(q_1, q_2) = C$ набуває вигляду:

$$90q_1 - q_1^2 + 50q_2 - q_2^2 = C.$$

Виділивши у лівій частині цієї рівності повні квадрати, отримуємо:

$$(q_1 - 45)^2 + (q_2 - 25)^2 = (C_1)^2,$$

тобто множину концентричних кіл з центром у точці $q_1 = 45$, $q_2 = 25$.

Для побудови карти переваг $-\frac{dq_1}{dq_2} = C$ знайдемо $\frac{dq_1}{dq_2}$, для чого продиференціюємо рівність $U(q_1, q_2) = C$ по змінній q_2 , вважаючи $q_1 = q_1(q_2)$:

$$\frac{dU}{dq_2} = \frac{\partial U}{\partial q_1} \cdot \frac{dq_1}{dq_2} + \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0.$$

$$\text{Звідси знаходимо, що } \frac{dq_1}{dq_2} = -\frac{\partial U}{\partial q_2} : \frac{\partial U}{\partial q_1} \quad \text{або} \quad \frac{dq_1}{dq_2} = -\frac{50 - 2q_2}{90 - 2q_1} = -\frac{25 - q_2}{45 - q_1}.$$

Множина кривих, що утворює карту переваг, визначається рівністю $\frac{25 - q_2}{45 - q_1} = C$

або $q_2 - 25 = C(q_1 - 45)$. Отримали пучок прямих з центром у точці $q_1 = 45$, $q_2 = 25$.

Задача 2. В умовах попередньої задачі знайти функцію попиту, виходячи з того, що споживач витрачає весь свій бюджет на придбання товарів A та B . Знайти оптимальний попит на ці товари, якщо ціна товару A $p_1 = 50$ грошових одиниць, ціна товару B — $p_2 = 130$ грошових одиниць, бюджет споживання становить $z = 10$ тисяч грошових одиниць.

Розв'язання. Розподіл коштів бюджету споживання на придбання товарів має вигляд: $z = p_1q_1 + p_2q_2$. Оптимальний попит (q_1, q_2) знаходимо з умови $dU = 0$ або

$\frac{\partial U}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} dq_2 = 0$. Для заданої функції споживання $U = 90q_1 - q_1^2 + 50q_2 - q_2^2$ ця рівність набуває вигляду: $(90 - 2q_1)dq_1 + (50 - 2q_2)dq_2 = 0$ або

$(45 - q_1)dq_1 + (25 - q_2)dq_2 = 0$. Змінні величини q_1 та q_2 є залежними, оскільки $z = p_1q_1 + p_2q_2 = \text{const}$. Звідси визначаємо зв'язок між диференціалами dq_1 та dq_2 : $p_1dq_1 + p_2dq_2 = 0 \Rightarrow dq_2 = -\frac{p_1}{p_2}dq_1$. Отже, отримуємо рівність:

$$(45 - q_1)dq_1 + (25 - q_2)\left(-\frac{p_1}{p_2}\right)dq_1 = 0.$$

Звідси знаходимо: $q_2 - 25 = \frac{p_2}{p_1}(q_1 - 45)$. Отримали рівняння прямої, яку називають прямою переваги.

Для знаходження функції попиту $\bar{q} = (q_1(p_1, p_2), q_2(p_1, p_2))$ розв'яжемо систему, складену з рівняння прямої переваги та рівняння розподілу бюджетних коштів $z = p_1q_1 + p_2q_2$. Отримали систему:

$$\begin{cases} q_2 - 25 = \frac{p_2}{p_1}(q_1 - 45), \\ p_1q_1 + p_2q_2 = z. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему відносно q_1 та q_2 , отримуємо:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{p_1z + 45p_2^2}{p_1^2 + p_2^2}, \\ q_2 = \frac{p_1z - 45p_1p_2}{p_1^2 + p_2^2}. \end{cases}$$

Отримані рівності визначають функцію попиту $\bar{q} = (q_1(p_1, p_2), q_2(p_1, p_2))$.

Оптимальний попит на товари знаходимо, підставивши у отримані вирази для q_1 та q_2 значення $p_1 = 50$, $p_2 = 130$, $z = 10000$. Отримуємо: $q_1 = 57$ одиниць товару, $q_2 = 55$ одиниць.

Задача 3. В умовах попередньої задачі знайти еластичності попиту $\bar{q}$ за доходом, за ціною та частинні еластичності заміни.

Розв'язання. Еластичність попиту **за доходом** визначають за формулами:

$$E_i^z = \frac{\partial q_i}{\partial z} : \frac{q_i}{z}, \quad i = 1, 2. \quad \text{Для визначення еластичності попиту за ціною}$$

$$\text{використовують формули: } E_{ij}^p = \frac{\partial q_i}{\partial p_j} : \frac{q_i}{p_j}, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2. \quad \text{При } i = j \text{ отримуємо}$$

прямую еластичність попиту за ціною, при $i \neq j$ – перехресну еластичність.

Частинні еластичності заміни знаходять за формулами: $S_{ij} = \frac{E_{jj}^p}{k_j} - E_i^z$, де

$k_j = \frac{p_j q_j}{z}$ – частка загального доходу z , що витрачається на придбання j -го товару.

Для розрахунку цих показників використовуємо функції попиту $q_1 = q_1(p_1, p_2, z)$ та $q_2 = q_2(p_1, p_2, z)$, отримані у задачі 3. Маємо:

$$q_1 = \frac{p_1 z + 45 p_2^2}{p_1^2 + p_2^2}, \quad q_2 = \frac{p_2 z - 45 p_1 p_2}{p_1^2 + p_2^2},$$

$$E_1^z = \frac{\partial q_1}{\partial z} \cdot \frac{q_1}{z} = \frac{p_1}{p_1^2 + p_2^2} \cdot \frac{(p_1^2 + p_2^2)z}{p_1 z + 45 p_2^2} = \frac{p_1 z}{p_1 z + 45 p_2^2},$$

$$E_2^z = \frac{\partial q_2}{\partial z} \cdot \frac{q_2}{z} = \frac{p_2}{p_1^2 + p_2^2} \cdot \frac{(p_1^2 + p_2^2)z}{p_2 z - 45 p_1 p_2} = \frac{p_2 z}{p_2 z - 45 p_1 p_2}.$$

Аналогічним чином за наведеними вище формулами розраховуємо решту показників.

Тема 5. Диференціальні моделі економічної динаміки

5.1 Диференціальна модель насичення ринку

Побудуємо модель насичення ринку продукцією деякого підприємства. Нехай $y(t)$ – обсяг виробництва цієї продукції у момент часу t . Будемо вважати, що зі збільшенням виробництва відбувається насичення ринку цією продукцією і її ціна $p(y)$ зменшується за лінійним законом:

$$p(y) = b - ay, \quad a > 0, b > 0.$$

Швидкість зміни обсягів виробництва прямо пропорційна доходу підприємства від реалізації виробленої продукції з коефіцієнтом пропорційності k :

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot p(y) \cdot y = k(b - ay)y. \quad (5.1)$$

Розв'яжемо це диференціальне рівняння, поділивши змінні:

$$\frac{dy}{y(b - ay)} = k \cdot dt$$

Інтегруючи ліву частину цього рівняння по змінній y , праву – по змінній t , отримаємо:

$$y(t) = \frac{b \cdot Ce^{bkt}}{a(Ce^{bkt} - 1)}.$$

Графіком отриманої функції $y(t)$ є так звана логістична крива. При $t \rightarrow +\infty$ $y(t) \rightarrow \frac{b}{a}$.

Модель (5.1) є диференціальною, оскільки вона виражається диференціальним рівнянням. До диференціальної моделі виду (5.1) зводиться модель Золотаса динаміки рівня суспільного добробуту, яка описується диференціальним рівнянням:

$$\frac{dW}{dy} = kW(A - W). \quad (5.2)$$

де W – рівень суспільного добробуту, $k > 0$, $A > 0$ – відомі сталі, y – доход на душу населення. Рівняння (5.2) називають рівнянням Ферхюльста – Перла. Його

розв'язком є логістична крива $W(y) = \frac{A}{1 + Be^{-Aky}}$, де B – стала інтегрування, яка визначається з початкової умови $W(0) = W_0$.

5.2 Модель природного зростання виробництва продукції

Побудуємо модель динаміки виробництва деякого виду продукції, що продається на ринку за фіксованою ціною p . Нехай $q(t)$ – кількість продукції, реалізованої на ринку на момент часу t . Тоді на цей момент величина доходу підприємства складає $p \cdot q(t)$. Частина цього доходу, $J(t) = mpq(t)$ витрачається на модернізацію та розширення виробництва ($m = \text{const}$ – норма інвестицій, $0 < m < 1$). Якщо вироблена продукція реалізується повністю, то внаслідок розширення виробництва буде отримано приріст доходу, частина якого знову буде спрямована на розширення виробництва. Нехай швидкість зміни обсягу виробництва прямо пропорційна збільшенню інвестицій. Тоді для знаходження $q(t)$ отримуємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dq}{dt} = \alpha \cdot J(t) = \alpha \cdot mp \cdot q(t), \quad (5.3)$$

де $\alpha = \text{const}$ – коефіцієнт пропорційності, $k = \alpha \cdot m \cdot p$ – стала величина.

Поділивши у отриманому рівнянні змінні, знаходимо: $\frac{dq}{q} = \alpha \cdot dt$. Звідси після інтегрування отримуємо: $q(t) = Ce^{kt}$, де C – стала інтегрування. Її визначають з початкової умови: $q(0) = q_0$. Звідси знаходимо, що $q(t) = q_0 e^{kt}$.

5.3 Моделі динаміки ринкової ціни та виробничих фондів

У моделі динаміки ринкової ціни товару встановлюється зв'язок між зміною ціни $p(t)$ та незадоволеним попитом $d(p) - s(p)$, $d(p) = a - bp$ – величина попиту, $s(p) = \alpha + \beta p$ – величина пропозиції товару за ціною $p(t)$, $a > 0$, $b > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – відомі сталі. Вважається, що швидкість зміни ціни пропорційна незадоволеному попиту з коефіцієнтом пропорційності $k > 0$:

$$\frac{dp}{dt} = k \cdot (d(p) - s(p)).$$

Підставивши у цей вираз лінійні залежності для попиту $d(p)$ та пропозиції $s(p)$, отримаємо звичайне лінійне диференціальне рівняння першого порядку:

$$\frac{dp}{dt} + k(b + \beta)p = k(a - \alpha).$$

Його загальний розв'язок має вигляд:

$$p(t) = C \cdot e^{-k(b+\beta)t} + \frac{a - \alpha}{b + \beta}.$$

$$\text{При } t \rightarrow \infty \quad p(t) \rightarrow \frac{a - \alpha}{b + \beta}.$$

Отримаємо диференціальну модель динаміки основних виробничих фондів на підприємстві. Нехай K – вартість основних виробничих фондів підприємства, μ – коефіцієнт їхнього вибуття, тобто за рік фонди зменшуються на величину μK . Вважаючи, що вибуття виробничих фондів відбувається рівномірно, отримаємо, що за час Δt вони зменшаться на величину $\mu K \cdot \Delta t$. Сталі інвестиції у обсязі J за рік збільшують за час Δt величину фондів на $\rho J \cdot \Delta t$, де $\rho = \text{const}$. Отже, отримуємо рівність:

$$K(t + \Delta t) = K(t) - \mu K \cdot \Delta t + \rho J \cdot \Delta t,$$

звідки отримуємо:

$$\frac{K(t + \Delta t) - K(t)}{\Delta t} = \rho J - \mu K.$$

Перейшовши у останній рівності до границі при $\Delta t \rightarrow 0$, отримуємо звичайне лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно невідомої функції $K(t)$:

$$\frac{dK}{dt} = \rho J - \mu K.$$

Його загальний розв'язок має вигляд:

$$K(t) = C \cdot e^{-\mu t} + \frac{\rho J}{\mu}, \quad (5.4)$$

де C – стала інтегрування. Рівність (5.4) характеризує динаміку основних виробничих фондів підприємства. Сталу C визначають з початкової умови $K(0) = K_0$. Тоді $C = K_0 - \frac{\rho J}{\mu}$ і рівність (5.4) набуває вигляду:

$$K(t) = \left(K_0 - \frac{\rho J}{\mu} \right) \cdot e^{-\mu t} + \frac{\rho J}{\mu}.$$

5.4 Модель економічного зростання Солоу

Нехай $X = F(K, L)$ – виробнича функція деякої економічної системи, X – обсяг виробництва, K – вартість основних виробничих фондів, L – витрати на оплату праці. Далі розглянемо випадок, коли виробнича функція є функцією Кобба – Дугласа: $X = K^\alpha \cdot L^{1-\alpha}$.

У моделі Солоу вважається, що швидкість зміни факторів виробництва K та L має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dK}{dt} = s \cdot X, \\ \frac{dL}{dt} = \lambda \cdot L, \end{cases} \quad (5.5)$$

де s – частка накопичення у доході X від реалізованої продукції, λ – темп зростання оплати праці.

Нехай $k = \frac{K}{L}$. Тоді виробнича функція Кобба – Дугласа набуває вигляду:

$$X = K^\alpha \cdot L^{1-\alpha} = L \cdot \left(\frac{K}{L} \right)^\alpha = L \cdot k^\alpha. \quad (5.6)$$

Підставивши (5.6) у перше з рівнянь системи (5.5), отримаємо:

$$\frac{dK}{dt} = s \cdot L \cdot k^\alpha.$$

Враховуючи, що $K = kL$, з останнього рівняння з врахуванням другого рівняння системи (5.5), знаходимо:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d(k \cdot L)}{dt} = L \frac{dk}{dt} + k \frac{dL}{dt} = L \frac{dk}{dt} + k \cdot \lambda L.$$

Звідси отримуємо, що $\frac{dK}{dt} = s \cdot L \cdot k^\alpha = L \frac{dk}{dt} + k \lambda L$ або

$$\frac{dk}{dt} + \lambda k = s \cdot k^\alpha. \quad (5.7)$$

Рівняння (5.7) є рівнянням Бернуллі. Інтегруючи його з допомогою підстановки $k = u(t) \cdot v(t)$, знаходимо загальний розв'язок (5.7) у вигляді:

$$k(t) = e^{-\lambda t} \left(\frac{s}{\lambda} e^{\lambda(1-\alpha)t} + C_1 \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \frac{K(t)}{L(t)}.$$

Отже, знайдено відношення факторів виробництва у момент часу t . Сталу інтегрування C_1 визначають з початкової умови $k(0) = \frac{K(0)}{L(0)} = k_0$.

Запитання для самоперевірки

1. Які математичні моделі називають диференціальними?
2. Надайте означення диференціального рівняння.
3. Що називають порядком диференціального рівняння?
4. Вкажіть основні типи диференціальних рівнянь першого порядку.
5. Наведіть приклади лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.
6. У чому полягає модель насичення ринку товаром?
7. Наведіть рівняння логістичної кривої.
8. Що описує модель Золотаса?
9. Наведіть рівняння Ферхюльста-Перла.
10. У чому полягає модель природного зростання виробництва продукції?
11. Охарактеризуйте сутність диференціальної моделі динаміки ринкової ціни.
12. Для чого використовують диференціальну модель динаміки основних виробничих фондів?
13. У чому полягає модель Солоу?
14. Вкажіть основні припущення моделі Солоу.

Задачі до теми 5

1. Нехай $y(t)$ – обсяг виробництва продукції деякого підприємства. Залежність ціни товару від обсягу виробництва має вигляд: $p(y) = b - ay$, $a > 0$, $b > 0$. Швидкість зростання обсягу виробництва є зростаючою функцією прибутку. Валові виробничі витрати описуються залежністю $c(y) = \alpha y + \beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Побудувати диференціальну модель для знаходження залежності обсягу виробництва продукції від часу t .

Відповідь: $\frac{dy}{dt} = k(p(y) \cdot y - c(y))$.

2. Знайти функцію попиту $y(p)$, якщо еластичність попиту за ціною $E_p(y) = -2$.

Розв'язання. $\frac{dy}{dp} \cdot \frac{p}{y} = -2, \frac{dy}{y} = -\frac{2dp}{p} \Rightarrow \ln|y| = \ln p^{-2} + \ln C \Rightarrow y = \frac{C}{p^2},$ де C –

довільна стала, що визначається з заданої початкової умови.

3. Знайти функцію попиту $y(p)$, якщо еластичність попиту за ціною $E_p(y) = -1$ і при $y = 2$ ціна $p = 10$.

Відповідь: $y = \frac{20}{p}.$

4. Знайти функцію, що має сталу еластичність k .

Відповідь: $y = Cx^k.$

5. Знайти функцію попиту $y = y(p)$, якщо еластичність попиту за ціною $E_p(y) = \frac{y-100}{y}, p = 10$ при $y = 90, 0 < y < 100$.

Відповідь: $y = 100 \left(1 - \frac{1}{p} \right).$

6. Швидкість знецінювання обладнання внаслідок його зносу у кожний даний момент часу пропорційна його фактичній вартості $A(t)$ з коефіцієнтом пропорційності $k = \text{const}$. Початкова вартість обладнання $A(0) = A_0$. Визначити фактичну вартість обладнання у момент часу t .

Відповідь: $A(t) = A_0 e^{-kt}$

7. Знайти обсяг реалізованої продукції за час $t = 10$ днів, якщо модель зростання обсягів реалізації в умовах конкурентного ринку має вигляд: $\frac{dy}{dt} = y(2 - y), y(0) = 1$.

Відповідь: ≈ 2 дні.

8. Швидкість зростання інвестиційного капіталу у момент часу t пропорційна величині капіталу з коефіцієнтом пропорційності, що дорівнює процентній ставці r . Знайти закон зростання інвестованого капіталу, враховуючи величину початкової інвестиції.

Відповідь: $K(t) = K_0 e^{rt}.$

9. Ціна товару $p(t)$ є функцією часу, функції попиту d та пропозиції s лінійно залежать від ціни, швидкості її зміни $p'(t)$ та темпу $p''(t)$. При цьому $d(p) = p'' - p' - 2p + 480, s(p) = 2p'' + 3p' + 3p + 80$. Знайти динаміку зміни ціни $p(t)$ в умовах ринкової рівноваги ($d(p) = s(p)$), якщо у початковий момент часу $t = 0$ ціна товару дорівнювала 120 г.о., а швидкість її зміни дорівнювала 40.

Відповідь: $p(t) = e^{-2t} (40 \cos t + 120 \sin t) + 80.$

Тема 6. Різницеві рівняння та їх застосування до розв'язання задач економічної динаміки

6.1 Основні поняття та означення теорії різницевих рівнянь

Різницеvim оператором Δ називають оператор, що переводить послідовність x_n у послідовність y_n за правилом

$$y_n = \Delta x_n = x_{n+1} - x_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1)$$

Вираз Δx_n називають різницею першого порядку.

Різницеvim рівнянням називають рівняння, що містить невідому послідовність та її різниці. Розв'язком різницевого рівняння називають будь-яку послідовність, при підстановці якої у різницеve рівняння для довільного натурального n отримуємо тотожність.

Різницею другого порядку називають вираз

$$\Delta^2 x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n. \quad (6.2)$$

Оскільки $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, $\Delta x_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1}$, то

$$\Delta^2 x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n. \quad (6.3)$$

За індукцією можна визначити різницю m -го порядку:

$$\Delta^m x_n = \Delta^{m-1} x_{n+1} - \Delta^{m-1} x_n. \quad (6.4)$$

Використовуючи метод математичної індукції, можна довести формулу:

$$\Delta^m x_n = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_m^k x_{n+k}. \quad (6.5)$$

Виконується також рівність:

$$x_{n+m} = \sum_{k=0}^m C_m^k \Delta^k x_n. \quad (6.6)$$

У формулах (6.5) та (6.6) $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ – біноміальні коефіцієнти.

Лінійним різницеvim рівнянням називають рівняння виду

$$a_0(n) \Delta^m x_n + a_1(n) \Delta^{m-1} x_n + \dots + a_m(n) x_n = f(n), \quad (6.7)$$

де x_n – невідома послідовність, $a_0, a_1, \dots, a_m, f$ – задані функції натурального аргументу n . Число m (старший порядок різниці) називають порядком різницевого рівняння. Використовуючи формулу (6.5), лінійне різницеве рівняння можна записати у вигляді:

$$c_0(n)x_{n+m} + c_1(n)x_{n+m-1} + \dots + c_m(n)x_n = f(n). \quad (6.8)$$

Якщо $f(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то рівняння (6.7) або (6.8) називають лінійним однорідним різницеvim рівнянням m -го порядку.

Розглянемо різницеве рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y_{n+1} + a \cdot y_n = b, \quad (6.9)$$

де y_n, y_{n+1} – члени невідомої числової послідовності.

Різницеві рівняння є дискретним аналогом диференціальних рівнянь, тому математичні моделі, у яких використовуються різницеві рівняння, відносяться до дискретних моделей. Методи розв'язання лінійних різницевих рівнянь аналогічні методам розв'язання лінійних диференціальних рівнянь.

Загальний розв'язок рівняння (6.9) будемо шукати у вигляді: $y_n = y_n^\circ + y_n^*$, де y_n° – загальний розв'язок відповідного однорідного різницевого рівняння ($f(n) = 0$), y_n^* – частинний розв'язок заданого неоднорідного різницевого рівняння.

Загальний розв'язок однорідного рівняння y_n° шукаємо у вигляді: $y_n^\circ = C \cdot \lambda^n$, де C – довільна стала. Підставивши y_n° у рівняння $y_{n+1} + a \cdot y_n = 0$, знаходимо:

$$C \cdot (\lambda^{n+1} + a \cdot \lambda^n) = 0 \Rightarrow a + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -a.$$

Тут λ фактично є коренем характеристичного рівняння $\lambda + a = 0$, отриманого аналогічно такому рівнянню для диференціального рівняння $y' + ay = 0$ (у різницевому рівнянні y_{n+m} замінюємо на λ^m).

$$\text{Отже, } y_n^\circ = C \cdot (-a)^n.$$

Частинний розв'язок y_n^* неоднорідного різницевого рівняння (6.9) шукаємо за виглядом його правої частини $f(n)$. Оскільки у даному випадку $f(n) = b = \text{const}$, то $y_n^* = A = \text{const}$. Знайдемо сталу A , підставивши $y_n^* = A$ у рівняння. Маємо:

$$A + a \cdot A = b \Rightarrow A = \frac{b}{1+a} = y_n^*.$$

Таким чином, ми отримали розв'язок різницевого рівняння (6.9) у вигляді:

$$y_n = y_n^{\circ} + y_n^* = C \cdot (-a)^n + \frac{b}{1+a}.$$

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, що має вигляд:

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = b. \quad (6.10)$$

Тут p , q та b – задані сталі.

Структура загального розв'язку рівняння (6.10) також визначається рівністю $y_n = y_n^{\circ} + y_n^*$. Характеристичне рівняння має вигляд: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Можливими є наступні випадки.

1. Корені λ_1 та λ_2 характеристичного рівняння є дійсними, причому $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y_n^{\circ} = C_1 \cdot \lambda_1^n + C_2 \cdot \lambda_2^n$.

2. Корені λ_1 та λ_2 характеристичного рівняння є дійсними, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Загальний розв'язок однорідного рівняння $y_n^{\circ} = (C_1 n + C_2) \cdot \lambda^n$.

3. Корені характеристичного рівняння комплексні: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Тоді маємо:

$$y_n^{\circ} = \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right)^n (C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi), \quad \varphi = \arg(\lambda_2).$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (6.10) у відповідності до його правої частини шукаємо у вигляді: $y_n^* = B = \text{const}$. Підставивши y_n^* у рівняння, знаходимо: $B + pB + qB = b$, звідки $B = \frac{b}{1+p+q}$. Отже, розв'язком рівняння (6.10)

є послідовність $y_n = y_n^{\circ} + \frac{b}{1+p+q}$, де y_n° визначається у залежності від вигляду коренів характеристичного рівняння.

Прикладом економіко-математичної моделі, що приводиться до розв'язання лінійного різницевого рівняння, є так звана павутиноподібна модель ринку.

Нехай деяке виробниче підприємство визначає пропозицію свого товару у поточному періоді на основі цін, що склалися у попередньому періоді: $s_n = s(p_{n-1})$. Попит на товар залежить від ціни товару у поточному періоді: $d_n = d(p_n)$. Будемо вважати функції попиту та пропозиції лінійними, тобто

$$s_n = m + l \cdot p_{n-1}, \quad d_n = a - b \cdot p_n, \quad a > m > 0, \quad l > 0, \quad b > 0.$$

Знайдемо ціну рівноваги з умови $d_n = s_n$. Тоді $a - b \cdot p_n = m + l \cdot p_{n-1}$. Замінивши номер $n-1$ члена послідовності на n , отримуємо лінійне неоднорідне різницеве рівняння першого порядку відносно ціни p_n :

$$b \cdot p_{n+1} + l \cdot p_n = a - m.$$

Розв'язком цього лінійного різницевого рівняння є послідовність

$$p_n = C \cdot \left(-\frac{l}{b}\right)^n + \frac{a-m}{b+l}.$$

З отриманого розв'язку випливає, що при $l < b$ $p_n \rightarrow p_0 = \frac{a-m}{b+l}$, якщо $n \rightarrow \infty$.

Це значення p_0 є ціною рівноваги для даного товару. Якщо $l > b$, то з часом ціна p_n буде віддалятися від ціни рівноваги p_0 . Для випадку $l = b$ спостерігаємо циклічні коливання ціни p_n у n -му періоді часу відносно значення p_0 .

6.2 Лінійні системи різницевого рівняння зі сталими коефіцієнтами

Лінійною називають систему різницевих рівнянь відносно m невідомих послідовностей $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{m,n}$ (n – номер члена послідовності):

[illegible]

Перейдемо до матричних позначень:

$$X_n = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ \dots \\ x_{m,n} \end{pmatrix}, B_n = \begin{pmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \\ \dots \\ f_m(n) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Систему (6.11) запишемо у матричній формі:

$$X_{n+1} = A \cdot X_n + B_n. \quad (6.12)$$

Загальний розв'язок системи (6.12) будемо шукати у вигляді: $X_n = X_n^o + \tilde{X}_n$, де X_n^o – загальний розв'язок відповідної однорідної системи, $\tilde{X}_n$ – частинний розв'язок (6.12). Для розв'язання лінійної однорідної системи різницьових рівнянь використовують метод Ейлера, згідно з яким фундаментальну систему розв'язків системи $X_{n+1} = A \cdot X_n$ шукають серед векторних послідовностей виду $X_n = D \cdot \lambda^n$,

де D – деякий вектор. Підставивши $X_n = D \cdot \lambda^n$ у матричну рівність $X_{n+1} = A \cdot X_n$, отримуємо:

$$D \cdot \lambda^{n+1} = A \cdot D \cdot \lambda^n, \quad (6.13)$$

звідки знаходимо, що $A \cdot D = \lambda \cdot D$. Це означає, що векторна послідовність $X_n = D \cdot \lambda^n$ є розв'язком лінійної однорідної системи різницьових рівнянь $X_{n+1} = A \cdot X_n$ тоді і лише тоді, коли λ є власним значенням матриці A , а D – відповідним йому власним вектором.

Власні значення матриці A визначаються як корені многочлена $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, де E – одинична матриця. Цей многочлен називають характеристичним многочленом для системи різницьових рівнянь (6.12), а рівняння $P(\lambda) = 0$ – її характеристичним рівнянням.

Якщо всі власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ матриці A є дійсними і різними (всі корені характеристичного рівняння дійсні та прості), то фундаментальну систему розв'язків утворюють векторні послідовності $D_1 \lambda_1^n, D_2 \lambda_2^n, \dots, D_m \lambda_m^n$. Тут D_i – власний вектор матриці A , що відповідає власному значенню $\lambda_i, i=1, 2, \dots, m$. Загальний розв'язок лінійної однорідної системи різницьових рівнянь у цьому випадку має вигляд: $X_n^\circ = C_1 D_1 \lambda_1^n + C_2 D_2 \lambda_2^n + \dots + C_m D_m \lambda_m^n$.

6.3 Динамічна модель Леонтьєва

У моделі Леонтьєва міжгалузевого балансу $X = AX + Y$, розглянутій раніше, всі її елементи вважалися сталими, середніми за деякий період часу. На практиці обсяг виробництва у період часу $n+1$ визначається значеннями X_n та Y_n , що були досягнуті у періоді n . Тому розглядається динамічна модель Леонтьєва у вигляді:

$$X_{n+1} = AX_n + Y_n. \quad (6.14)$$

Векторне рівняння (6.14) є системою n лінійних різницьових рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Постановка задачі: для заданого вектора кінцевого споживання Y_n та матриці прямих витрат A визначити вектор валового виробництва X_n .

Приклад. Визначити вектор валового виробництва X_n у динамічній моделі Леонтьєва, якщо технологічна матриця $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$, вектор кінцевого споживання $Y_n = \begin{pmatrix} 2^n \\ 2^n \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Будемо шукати розв'язок системи $X_{n+1} = AX_n + Y_n$ лінійних різницьових рівнянь зі сталими коефіцієнтами у вигляді $X_n = X_n^\circ + X_n^*$, де X_n° –

загальний розв'язок однорідної системи, X_n^* – частинний розв'язок заданої системи. Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\begin{vmatrix} 0,2 - \lambda & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Його корені $\lambda_1 = -0,1$, $\lambda_2 = 0,5$. Знайдемо відповідні власні вектори. При $\lambda_1 = -0,1$ отримуємо рівняння для координат α_1 та α_2 власного вектора:

$$0,3\alpha_1 + 0,3\alpha_2 = 0,$$

звідки $\alpha_1 = -\alpha_2$, наприклад, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$.

Для $\lambda_2 = 0,5$ маємо:

$$-0,3\alpha_1 + 0,3\alpha_2 = 0.$$

Звідси отримуємо $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Отже, власні вектори $D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тоді $X_n^\circ = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (-0,1)^n + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0,5)^n$, C_1 та C_2 – довільні сталі.

Частинний розв'язок заданої системи будемо шукати за виглядом правої частини цієї системи: $X_n^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot 2^n$, $X_{n+1}^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot 2^{n+1}$. Підставивши ці вирази у задану неоднорідну систему, отримуємо:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot 2^{n+1} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot 2^n + \begin{pmatrix} 2^n \\ 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2\alpha_1 + 0,3\alpha_2 + 1 \\ 0,3\alpha_1 + 0,2\alpha_2 + 1 \end{pmatrix} \cdot 2^n.$$

Після скорочення обох частин цієї рівності на 2^n , отримуємо систему рівнянь відносно α_1 та α_2 :

$$\begin{cases} 2\alpha_1 = 0,2\alpha_1 + 0,3\alpha_2 + 1, \\ 2\alpha_2 = 0,3\alpha_1 + 0,2\alpha_2 + 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1,8\alpha_1 + 0,3\alpha_2 = -1, \\ 0,3\alpha_1 - 1,8\alpha_2 = -1. \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{2}{3}.$$

Отже, $X_n^* = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \cdot 2^n$, загальний розв'язок системи (вектор валового

виробництва) X_n у розглянутій динамічній моделі Леонтьєва матиме вигляд:

$$X_n = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (-0,1)^n + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0,5)^n + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \cdot 2^n.$$

Значення сталих C_1 та C_2 можна знайти, знаючи вектор валового виробництва у перші два роки.

6.4 Модель Самуельсона-Хікса

Модель Самуельсона-Хікса – це динамічна модель, у якій економічний цикл розглядається як наслідок взаємодії національного доходу, споживання та накопичення капіталу. Основне припущення моделі полягає у тому, що попит d у момент часу $t = n + 1$ лінійно залежить від величини національного доходу y у попередній момент часу $t = n$:

$$d_{n+1} = ay_n + b.$$

Модель Самуельсона-Хікса можна подати у вигляді лінійного неоднорідного різницевого рівняння другого порядку

$$y_{n+2} = (a + \alpha)y_{n+1} - \alpha y_n + b, \quad (6.15)$$

де $\alpha > 0$ – акселератор або темп приросту капіталомісткості національного доходу.

Загальний розв'язок рівняння (6.15) будемо шукати у вигляді суми частинного розв'язку y_n^* неоднорідного рівняння та загального розв'язку y_n° відповідного однорідного рівняння: $y_n = y_n^\circ + y_n^*$. Частинний розв'язок (6.15) шукаємо у вигляді сталої $y_n^* = A$, яку визначаємо шляхом підстановки у рівняння:

$$A - (a + \alpha)A + \alpha A - b = 0.$$

Звідси знаходимо частинний розв'язок неоднорідного рівняння (6.15):

$$y_n^* = \frac{b}{1 - a}.$$

Характеристичне рівняння для (6.15) має вигляд:

$$\lambda^2 - (a + \alpha)\lambda + \alpha = 0.$$

Вигляд розв'язку однорідного рівняння залежить від знаку дискримінанта для характеристичного рівняння.

Приклад. Використовуючи модель Самуельсона-Хікса, визначити динаміку зростання національного доходу y_n , якщо для даної національної економіки параметри моделі $a = \alpha = 0,5$; $b = 5$, у початкові періоди часу $n = 0$ та $n = 1$ національний дохід становив відповідно $y_0 = 10$ г.о., $y_1 = 20$ г.о.

Розв'язання. Підставивши параметри моделі у різницеве рівняння (6.15), отримаємо лінійне неоднорідне різницеве рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y_{n+2} - y_{n+1} + 0,5y_n = 5.$$

Запишемо та розв'яжемо відповідне характеристичне квадратне рівняння:

$$\lambda^2 - \lambda + 0,5 = 0.$$

Його дискримінант дорівнює $-1 < 0$, рівняння має пару комплексних коренів $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}$. $\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$, $|\lambda_2| = |\lambda_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\arg \lambda_2 = \frac{\pi}{4}$, тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння можна записати у вигляді:

$$y_n^\circ = (|\lambda_2|)^n (C_1 \cos(n \arg \lambda_2) + C_2 \sin(n \arg \lambda_2)) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(C_1 \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{n\pi}{4}\right).$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді невідомої константи: $y_n^* = A$. Підставивши цю сталу у рівняння, отримаємо:

$$A - A + 0,5A = 5 \Rightarrow A = 10 = y_n^*.$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння набуває вигляду:

$$y_n = y_n^\circ + y_n^* = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(C_1 \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{n\pi}{4}\right) + 5.$$

Значення сталих C_1 та C_2 знайдемо, використовуючи початкові умови $y_0 = 10$, $y_1 = 20$. При $n = 0$ та $n = 1$ відповідно отримуємо:

$$y_0 = C_1 + 5 = 10 \Rightarrow C_1 = 5, \quad y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(5 \cos \frac{\pi}{4} + C_2 \sin \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{2} + \frac{C_2}{2} = 20 \Rightarrow C_2 = 35.$$

Отже, вираз для залежності величини національного доходу y_n від часу n , що моделює динаміку національного доходу, має вигляд:

$$y_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \left(5 \cos \frac{n\pi}{4} + 35 \sin \frac{n\pi}{4} \right) + 5.$$

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть означення різниць першого, другого та m -го порядків.
2. Наведіть означення різницевого рівняння.
3. Наведіть загальний вигляд лінійного різницевого рівняння.
4. Надайте означення порядку різницевого рівняння.
5. Які лінійні різницеві рівняння називають однорідними?
6. Наведіть характеристичне рівняння для загального вигляду лінійного різницевого рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
7. У чому полягає павутиноподібна модель ринку?
8. У чому полягає метод Ейлера розв'язання систем лінійних різницевих рівнянь?
9. Висвітліть зміст динамічної моделі Леонтьєва.
10. У чому полягає сутність моделі Самуельсона-Хікса?

Задачі до теми 6

1. Записавши різницеве рівняння для геометричної прогресії, знайти формулу її загального члена b_n .

Розв'язання. Оскільки геометрична прогресія – це послідовність, у якій кожен наступний член дорівнює попередньому, помноженому на деяке число q – знаменник прогресії, різницеве рівняння для цієї послідовності має вигляд: $b_{n+1} = b_n \cdot q$. Характеристичне рівняння для нього – $\lambda - q = 0$ з коренем $\lambda = q$.

Отже, $b_n = C \cdot q^n$. Оскільки $b_1 = C \cdot q$, то $C = \frac{b_1}{q}$. Формула для загального члена

геометричної прогресії має вигляд: $b_n = C \cdot q^n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

2. Знайти загальний розв'язок рівняння $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 0$.

Відповідь: $x_n = C_1 + C_2 \cdot 3^n$.

3. Знайти загальний розв'язок рівняння $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$.

Відповідь: $x_n = (\sqrt{2})^n \left(C_1 \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{n\pi}{4} \right)$.

4. Знайти загальний розв'язок рівняння: $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 9x_n = 0$.

Відповідь: $x_n = (C_1 + C_2 n)(-3)^n$.

5. Числа Фібоначчі визначаються співвідношенням $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_1 = x_2 = 1$. Знайти формулу n -го члена послідовності.

Відповідь: $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$.

6. Розв'язати рівняння: $2y_n - y_{n+1} = 1 + 2n - n^2$, $y_1 = 1$.

Розв'язання: Загальний розв'язок даного неоднорідного різницевого рівняння першого порядку шукаємо у вигляді суми загального розв'язку y_n° відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку y_n^* неоднорідного рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд: $2 - \lambda = 0$. Оскільки його корінь $\lambda = 2$, то загальний розв'язок однорідного рівняння $y_n^\circ = C \cdot 2^n$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо за виглядом правої частини, тобто у вигляді квадратного тричлена з невизначеними коефіцієнтами $y_n^* = An^2 + Bn + D$. Його коефіцієнти знаходимо, підставивши його у рівняння. Отримуємо:

$$2(An^2 + Bn + D) - A(n+1)^2 - B(n+1) - D = 1 + 2n - n^2.$$

З цього рівняння випливає, що $An^2 + (B - 2A)n + C - A - B = 1 + 2n - n^2$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях n , знаходимо, що $A = -1$, $B = D = 0$. Отже, $y_n^* = -n^2$. Таким чином, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд: $y_n = y_n^\circ + y_n^* = C \cdot 2^n - n^2$. Значення константи C знайдемо, використавши початкову умову $y_1 = 1$. При $n = 1$ $2C - 1 = 1$, $C = 1$ і розв'язком задачі є послідовність $y_n = 2^n - n^2$.

7. Знайти загальний розв'язок системи різницевого рівнянь:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Для розв'язання цієї системи застосуємо метод Ейлера. Запишемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -2 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3.$$

Знайдемо власні вектори, що відповідають знайденим власним значенням λ_1 та λ_2 . При $\lambda_1 = 2$ отримуємо рівняння $3\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0$. Звідси $\alpha_2 = \frac{3}{2}\alpha_1$. При $\alpha_1 = 2$ $\alpha_2 = 3$. тобто власний вектор $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. При $\lambda_2 = 3$ маємо: $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$, звідки $\alpha_1 = \alpha_2$, наприклад, виберемо $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Отже, власний вектор, що відповідає

власному значенню $\lambda_2 = 3$ – це $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тоді загальний розв'язок системи різницьових рівнянь має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 2^n + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 3^n.$$

8. Зростання процентного депозиту з регулярними щорічними внесками A та річною ставкою p , де $0 < p < 1$, описується різницьовим рівнянням $x_{n+1} = (1+p)x_n + A$. Знайти суму депозиту x_n у момент часу n , якщо початковий внесок дорівнював x_0 г.о.

Відповідь: $x_n = -\frac{A}{p} + \frac{A + px_1}{p}(1+p)^{n-1}$.

9. Використовуючи павутиноподібну модель ринку, визначити динаміку ціни p_n та дослідити її поведінку при $n \rightarrow \infty$, якщо відомі попит на товар $d(p)$, пропозиція $s(p)$ та початкова ціна p : а) $d(p_n) = 11 - p_n$, $s(p_{n-1}) = 1 + 4p_{n-1}$, $p = 2$; б) $d(p_n) = 5 - 1,2p_n$, $s(p_{n-1}) = 1 + 0,8p_{n-1}$, $p = 4$.

Відповідь: а) $p_n = 2$;

б) Розв'язання. З рівності $d(p_n) = s(p_{n-1})$ випливає, що $5 - 1,2p_n = 1 + 0,8p_{n-1}$. Замінивши $n-1$ на n , з останнього рівняння отримуємо $1,2p_{n+1} + 0,8p_n = 4$. Характеристичне рівняння $1,2\lambda + 0,8 = 0$ має корінь $\lambda = -\frac{2}{3}$. Загальний розв'язок

відповідного однорідного рівняння $p_n^{\circ} = C \left(-\frac{2}{3}\right)^n$. Частинний розв'язок p_n^* неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $p_n^* = B = \text{const}$. Підставивши p_n^* у рівняння, отримуємо, що $B = 2$. Отже, $p_n = C \left(-\frac{2}{3}\right)^n + 2$. Значення сталої C знайдемо з початкової умови: при $n=0$ $p_0 = p = 4$. Отримуємо рівняння $C + 2 = 4$, тобто $C = 2$. Зміна ціни p_n у залежності від часу n описується формулою:

$$p_n = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n + 2.$$

При $n \rightarrow \infty$ $\left(-\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$, тому послідовність p_n прямує до рівноважної ціни товару, що дорівнює 2.

10. Знайти динаміку зростання національного доходу за моделлю Самуельсона-Хікса $y_{n+2} = (a + \alpha)y_{n+1} - \alpha y_n + b$, якщо: а) $a = \alpha = 0,5$; $b = 8$; $y_0 = 5$ г.о., $y_1 = 6$ г.о.; б) $a = 0,5$; $\alpha = 3$; $b = 0$; $y_0 = 10$ г.о., $y_1 = 12$ г.о.

Відповідь: а) $y_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(23\sin\frac{n\pi}{4} - 11\cos\frac{n\pi}{4}\right)$; б) $y_n = 16(1,5)^n - 6 \cdot 2^n$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1. Знайти вартість кредиту на суму 1,5 млн. у.г.о., отриманого на 8 місяців при щомісячній відсотковій ставці 5%.

2. Матриця A – технологічна матриця, елементи якої задано у натуральному виразі, Y – вектор-стовпчик кінцевого споживання, його елементи теж задано у натуральному виразі, P – вектор цін на продукцію галузей. Визначити, чи є матриця A продуктивною, побудувати модель Леонтьєва у натуральній та вартісній формах. Визначити валовий обсяг виробництва продукції у натуральному та вартісному виразах.

$$A = \begin{pmatrix} 37 & 42 & 289 & 111 \\ 453 & 288 & 546 & 388 \\ 276 & 0 & 281 & 145 \\ 48 & 541 & 345 & 249 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 3,12 \\ 2,40 \\ 1,20 \\ 25,7 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 47 \\ 0 \\ 39 \\ 222 \end{pmatrix}.$$

3. Функції попиту та пропозиції на деякий товар мають вигляд:

$$q = \frac{p+8}{p+2}, s = 2p+1,$$

де p – ціна одиниці товару, q – величина попиту, s – пропозиції. Знайти: а) ціну рівноваги, яка урівноважує попит та пропозицію на ринку; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну попиту при збільшенні ціни на 5% у порівнянні з ціною рівноваги.

4. При плануванні обсягів виробництва було досліджено попит q_1 та q_2 споживачів відповідно на товари A_1 та A_2 , що можуть заміщувати один одного. Визначити, чи може залежність $U(q_1, q_2) = 50q_1 - q_1^2 + 20q_2 - q_2^2$ бути цільовою функцією споживання. Якщо так, то побудувати карти байдужості та споживання. Виконати розрахунки споживання товарів A_1 та A_2 , якщо пропозиція збільшиться на 10 одиниць. Побудувати загальну функцію попиту та функції попиту на окремі товари, використовуючи середні ціни товарів $p_1 = 50$ у.г.о. та $p_2 = 120$ у.г.о., а також задане значення загальної функції попиту $Z = 10000$ одиниць. Виконати аналіз побудованих функцій попиту, використовуючи показники еластичності за доходом, ціною та заміщенням.

5. За статистичними даними, наведеними у таблиці, побудувати лінійну та мультиплікативну виробничу функції, виконати їх економічний аналіз (побудувати ізокванти для $X_{\max}$ та $X_{\min}$, записати формули для розрахунку середньої ефективності виробничих ресурсів, їх граничної ефективності, знайти коефіцієнти еластичності).

X	227,1	194,6	232,8	249,2	257,3	201,6	187,9	239,5	218,1	217,4
K	112,5	116,4	111,6	108,9	116,5	104,5	102,7	110,2	104,7	109,4
L	48,0	42,1	42,3	43,7	42,8	41,8	30,0	44,4	51,2	54,6

6. Використовуючи павутиноподібну модель ринку, визначити динаміку ціни p_n та дослідити її поведінку при $n \rightarrow \infty$, якщо відомі попит на товар $d(p)$, пропозиція $s(p)$ та початкова ціна p : $d(p_n) = 8 - 2p_n$, $s(p_{n-1}) = 6 + p_{n-1}$, $p = 1$.

Варіант 2

1. Підприємство отримало у банку кредит на суму 2 млн. у.г.о. терміном на 3 роки. Відсоткова ставка за кредитом складає 7% для першого року, для другого року вона збільшується на 1%, для третього та решти років вона зростає на 0,5% щорічно. Визначити суму боргу, що повинна бути повернута через 3 роки.

2. Матриця A – технологічна матриця, елементи якої задано у натуральному виразі, Y – вектор-стовпчик кінцевого споживання, його елементи теж задано у натуральному виразі, P – вектор цін на продукцію галузей. Визначити, чи є матриця A продуктивною, побудувати модель Леонтьєва у натуральній та вартісній формах. Визначити валовий обсяг виробництва продукції у натуральному та вартісному виразах.

$$A = \begin{pmatrix} 45 & 304 & 0 & 67 \\ 67 & 444 & 275 & 88 \\ 88 & 289 & 553 & 93 \\ 32 & 208 & 501 & 33 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 3,45 \\ 5,67 \\ 10,7 \\ 23,6 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 25 \\ 54 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

3. Функції попиту та пропозиції на деякий товар мають вигляд:

$$q = \frac{p+1}{p}, s = p+3,$$

де p – ціна одиниці товару, q – величина попиту, s – пропозиції. Знайти: а) ціну рівноваги, яка урівноважує попит та пропозицію на ринку; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну попиту при збільшенні ціни на 3% у порівнянні з ціною рівноваги.

4. При плануванні обсягів виробництва було досліджено попит q_1 та q_2 споживачів відповідно на товари A_1 та A_2 , що можуть заміщувати один одного. Визначити, чи може залежність $U(q_1, q_2) = 20 + q_1^2 + 20q_2 - q_2^2$ бути цільовою функцією споживання. Якщо так, то побудувати карти байдужості та споживання. Виконати розрахунки споживання товарів A_1 та A_2 , якщо пропозиція збільшиться на 10 одиниць. Побудувати загальну функцію попиту та функції попиту на окремі товари, використовуючи середні ціни товарів $p_1 = 40$ у.г.о. та $p_2 = 100$ у.г.о., а

також задане значення загальної функції попиту $Z = 10000$ одиниць. Виконати аналіз побудованих функцій попиту, використовуючи показники еластичності за доходом, ціною та заміщенням.

5. За статистичними даними, наведеними у таблиці, побудувати лінійну та мультиплікативну виробничу функції, виконати їх економічний аналіз (побудувати ізокванти для $X_{\max}$ та $X_{\min}$, записати формули для розрахунку середньої ефективності виробничих ресурсів, їх граничної ефективності, знайти коефіцієнти еластичності).

X	227,3	194,5	232,7	249,1	257,0	201,4	187,9	239,2	218,5	217,8
K	48,0	42,1	42,3	43,7	42,8	41,8	30,0	44,4	51,2	54,6
L	21,2	22,0	21,1	20,3	22,1	18,8	19,1	20,1	19,0	19,9

6. Використовуючи павутиноподібну модель ринку, визначити динаміку ціни p_n та дослідити її поведінку при $n \rightarrow \infty$, якщо відомі попит на товар $d(p)$, пропозиція $s(p)$ та початкова ціна p : $d(p_n) = 11 - 7p_n$, $s(p_{n-1}) = 9 + 3p_{n-1}$, $p = 2$.

Варіант 3

1. На суму 100 тис. у.г.о. щоквартально нараховуються складні відсотки за річною ставкою 12% річних на протязі 8 місяців. Знайти суму нарахувань.

2. Матриця A – технологічна матриця, елементи якої задано у натуральному виразі, Y – вектор-стовпчик кінцевого споживання, його елементи теж задано у натуральному виразі, P – вектор цін на продукцію галузей. Визначити, чи є матриця A продуктивною, побудувати модель Леонтьєва у натуральній та вартісній формах. Визначити валовий обсяг виробництва продукції у натуральному та вартісному виразах.

$$A = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 67 & 98 \\ 39 & 74 & 0 & 54 \\ 67 & 88 & 77 & 72 \\ 55 & 66 & 23 & 43 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 45,7 \\ 37,8 \\ 39,4 \\ 33,0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 324 \\ 265 \\ 456 \end{pmatrix}.$$

3. Функції попиту та пропозиції на деякий товар мають вигляд:

$$q = 20 - 4p, s = 2p + 1,5,$$

де p – ціна одиниці товару, q – величина попиту, s – пропозиції. Знайти: а) ціну рівноваги, яка урівноважує попит та пропозицію на ринку; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну попиту при збільшенні ціни на 5% у порівнянні з ціною рівноваги.

4. При плануванні обсягів виробництва було досліджено попит q_1 та q_2 споживачів відповідно на товари A_1 та A_2 , що можуть заміщувати один одного.

Визначити, чи може залежність $U(q_1, q_2) = 2q_1^{0,2} \cdot q_2^{0,8}$ бути цільовою функцією споживання. Якщо так, то побудувати карти байдужості та споживання. Виконати розрахунки споживання товарів A_1 та A_2 , якщо пропозиція збільшиться на 10 одиниць. Побудувати загальну функцію попиту та функції попиту на окремі товари, використовуючи середні ціни товарів $p_1 = 35$ у.г.о. та $p_2 = 80$ у.г.о., а також задане значення загальної функції попиту $Z = 10000$ одиниць. Виконати аналіз побудованих функцій попиту, використовуючи показники еластичності за доходом, ціною та заміщенням.

5. За статистичними даними, наведеними у таблиці, побудувати лінійну та мультиплікативну виробничу функції, виконати їх економічний аналіз (побудувати ізокванти для $X_{\max}$ та $X_{\min}$, записати формули для розрахунку середньої ефективності виробничих ресурсів, їх граничної ефективності, знайти коефіцієнти еластичності).

X	480,2	421,7	42,3	437,2	428,0	418,4	300,5	444,1	512,3	546,4
K	2,27	1,94	2,32	2,49	2,57	2,01	1,87	2,39	2,18	2,17
L	112,5	116,4	111,6	108,9	116,5	104,5	102,7	110,2	104,7	109,4

6. Використовуючи павутиноподібну модель ринку, визначити динаміку ціни p_n та дослідити її поведінку при $n \rightarrow \infty$, якщо відомі попит на товар $d(p)$, пропозиція $s(p)$ та початкова ціна p : $d(p_n) = 14 - 4p_n$, $s(p_{n-1}) = 10 + 2p_{n-1}$, $p = 1$.

Варіант 4

1. На початковий капітал 200 тис. у.г.о. неперервно нараховуються складні відсотки – 10 % річних на протязі 3 років. Знайти загальну суму нарахувань.

2. Матриця A – технологічна матриця, елементи якої задано у натуральному виразі, Y – вектор-стовпчик кінцевого споживання, його елементи теж задано у натуральному виразі, P – вектор цін на продукцію галузей. Визначити, чи є матриця A продуктивною, побудувати модель Леонтьєва у натуральній та вартісній формах. Визначити валовий обсяг виробництва продукції у натуральному та вартісному виразах.

$$A = \begin{pmatrix} 59 & 45 & 56 & 36 \\ 76 & 121 & 94 & 43 \\ 69 & 201 & 34 & 55 \\ 82 & 69 & 22 & 77 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 4,74 \\ 1,66 \\ 2,07 \\ 6,8 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 73 \\ 144 \\ 62 \\ 72 \end{pmatrix}.$$

3. Функції попиту та пропозиції на деякий товар мають вигляд:

$$q = 12 - p, s = 2p + 6,$$

де p – ціна одиниці товару, q – величина попиту, s – пропозиції. Знайти: а) ціну рівноваги, яка урівноважує попит та пропозицію на ринку; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну попиту при збільшенні ціни на 5% у порівнянні з ціною рівноваги.

4. При плануванні обсягів виробництва було досліджено попит q_1 та q_2 споживачів відповідно на товари A_1 та A_2 , що можуть заміщувати один одного. Визначити, чи може залежність $U(q_1, q_2) = 15q_1 + 20q_2 - q_1^2 - 30q_2^2$ бути цільовою функцією споживання. Якщо так, то побудувати карти байдужості та споживання. Виконати розрахунки споживання товарів A_1 та A_2 , якщо пропозиція збільшиться на 10 одиниць. Побудувати загальну функцію попиту та функції попиту на окремі товари, використовуючи середні ціни товарів $p_1 = 60$ у.г.о. та $p_2 = 170$ у.г.о., а також задане значення загальної функції попиту $Z = 10000$ одиниць. Виконати аналіз побудованих функцій попиту, використовуючи показники еластичності за доходом, ціною та заміщенням.

5. За статистичними даними, наведеними у таблиці, побудувати лінійну та мультиплікативну виробничу функції, виконати їх економічний аналіз (побудувати ізокванти для $X_{\max}$ та $X_{\min}$, записати формули для розрахунку середньої ефективності виробничих ресурсів, їх граничної ефективності, знайти коефіцієнти еластичності).

X	152,0	167,3	154,1	156,9	131,7	142,8	167,5	178,2	169,1	157,9
K	32,1	31,0	32,4	33,2	31,2	34,8	35,4	33,0	34,8	36,1
L	24,6	23,7	23,8	24,1	24,0	23,7	24,9	32,7	26,2	25,4

6. Використовуючи павутиноподібну модель ринку, визначити динаміку ціни p_n та дослідити її поведінку при $n \rightarrow \infty$, якщо відомі попит на товар $d(p)$, пропозиція $s(p)$ та початкова ціна p : $d(p_n) = 10 - 5p_n$, $s(p_{n-1}) = 8 + 2p_{n-1}$, $p = 2$.

Варіант 5

1. Банк виплачує відсотки за депозитами на суму, не меншу, ніж 100 тис. у.г.о. на наступних умовах: на суму, покладену на термін не менше року – 20% річних, не менше 6 місяців – 17% річних, не менше 3 місяців – 12% річних. Яка форма депозиту є найбільш прибутковою для вкладника, якщо сума депозиту становить 100 тис. у.г.о.?

2. Матриця A – технологічна матриця, елементи якої задано у натуральному виразі, Y – вектор-стовпчик кінцевого споживання, його елементи теж задано у натуральному виразі, P – вектор цін на продукцію галузей. Визначити, чи є матриця A продуктивною, побудувати модель Леонтьєва у натуральній та вартісній формах. Визначити валовий обсяг виробництва продукції у натуральному та вартісному виразах.

$$A = \begin{pmatrix} 108 & 122 & 89 & 43 \\ 235 & 234 & 90 & 108 \\ 200 & 359 & 36 & 122 \\ 216 & 163 & 25 & 76 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 45,3 \\ 28,9 \\ 17,1 \\ 32,0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 202 \\ 90 \\ 186 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

3. Функції попиту та пропозиції на деякий товар мають вигляд:

$$q = 16 - 2p, \quad s = p + 0,5,$$

де p – ціна одиниці товару, q – величина попиту, s – пропозиції. Знайти: а) ціну рівноваги, яка урівноважує попит та пропозицію на ринку; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну попиту при збільшенні ціни на 5% у порівнянні з ціною рівноваги.

4. При плануванні обсягів виробництва було досліджено попит q_1 та q_2 споживачів відповідно на товари A_1 та A_2 , що можуть заміщувати один одного. Визначити, чи може залежність $U(q_1, q_2) = 4q_1^2 + 30q_2$ бути цільовою функцією споживання. Якщо так, то побудувати карти байдужості та споживання. Виконати розрахунки споживання товарів A_1 та A_2 , якщо пропозиція збільшиться на 10 одиниць. Побудувати загальну функцію попиту та функції попиту на окремі товари, використовуючи середні ціни товарів $p_1 = 40$ у.г.о. та $p_2 = 200$ у.г.о., а також задане значення загальної функції попиту $Z = 10000$ одиниць. Виконати аналіз побудованих функцій попиту, використовуючи показники еластичності за доходом, ціною та заміщенням.

5. За статистичними даними, наведеними у таблиці, побудувати лінійну та мультиплікативну виробничу функції, виконати їх економічний аналіз (побудувати ізокванти для $X_{\max}$ та $X_{\min}$, записати формули для розрахунку середньої ефективності виробничих ресурсів, їх граничної ефективності, знайти коефіцієнти еластичності).

X	345,3	348,4	306,7	366,1	379,7	385,6	344,2	408,7	450,4	431,7
K	227,0	194,5	232,1	249,7	257,5	201,8	187,5	239,8	218,4	217,1
L	48,0	42,1	42,3	43,7	42,8	41,8	30,0	44,4	51,2	54,6

6. Використовуючи павутиноподібну модель ринку, визначити динаміку ціни p_n та дослідити її поведінку при $n \rightarrow \infty$, якщо відомі попит на товар $d(p)$, пропозиція $s(p)$ та початкова ціна p : $d(p_n) = 18 - 6p_n$, $s(p_{n-1}) = 6 + 4p_{n-1}$, $p = 1$.

Варіант 6

1. Яку суму необхідно помістити на депозит, щоб через 3 роки отримати 5 тис. у.г.о. при процентній ставці 12% річних?

2. Матриця A – технологічна матриця, елементи якої задано у натуральному виразі, Y – вектор-стовпчик кінцевого споживання, його елементи теж задано у натуральному виразі, P – вектор цін на продукцію галузей. Визначити, чи є матриця A продуктивною, побудувати модель Леонтьєва у натуральній та вартісній формах. Визначити валовий обсяг виробництва продукції у натуральному та вартісному виразах.

$$A = \begin{pmatrix} 266 & 67 & 63 & 137 \\ 191 & 488 & 106 & 49 \\ 77 & 251 & 81 & 0 \\ 49 & 17 & 33 & 188 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0,54 \\ 0,99 \\ 9,0 \\ 23,4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 196 \\ 99 \\ 109 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

3. Функції попиту та пропозиції на деякий товар мають вигляд:

$$q = \frac{p+1}{p+2}, s = p+2,$$

де p – ціна одиниці товару, q – величина попиту, s – пропозиції. Знайти: а) ціну рівноваги, яка урівноважує попит та пропозицію на ринку; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну попиту при збільшенні ціни на 5% у порівнянні з ціною рівноваги.

4. При плануванні обсягів виробництва було досліджено попит q_1 та q_2 споживачів відповідно на товари A_1 та A_2 , що можуть заміщувати один одного. Визначити, чи може залежність $U(q_1, q_2) = 0,5q_1^{0,2} \cdot q_2^{0,8}$ бути цільовою функцією споживання. Якщо так, то побудувати карти байдужості та споживання. Виконати розрахунки споживання товарів A_1 та A_2 , якщо пропозиція збільшиться на 10 одиниць. Побудувати загальну функцію попиту та функції попиту на окремі товари, використовуючи середні ціни товарів $p_1 = 70$ у.г.о. та $p_2 = 250$ у.г.о., а також задане значення загальної функції попиту $Z = 10000$ одиниць. Виконати аналіз побудованих функцій попиту, використовуючи показники еластичності за доходом, ціною та заміщенням.

5. За статистичними даними, наведеними у таблиці, побудувати лінійну та мультиплікативну виробничу функції, виконати їх економічний аналіз (побудувати ізокванти для $X_{\max}$ та $X_{\min}$, записати формули для розрахунку середньої ефективності виробничих ресурсів, їх граничної ефективності, знайти коефіцієнти еластичності).

X	152,3	167,4	154,7	156,5	131,3	14,2	167,5	178,4	166,9	157,0
K	2,1	2,3	2,2	2,1	2,0	2,2	1,9	2,0	1,9	1,5
L	32,1	31,0	32,4	33,2	31,2	34,6	33,3	36,1	38,3	30,5

6. Використовуючи павутиноподібну модель ринку, визначити динаміку ціни p_n та дослідити її поведінку при $n \rightarrow \infty$, якщо відомі попит на товар $d(p)$, пропозиція $s(p)$ та початкова ціна p : $d(p_n) = 6 - 4p_n$, $s(p_{n-1}) = 2 + 3p_{n-1}$, $p = 2$.

Варіант 7

1. Кредит у розмірі 200 тис. у.г.о. видано на 60 днів під 20% річних. Знайти дохід кредитора.

2. Матриця A – технологічна матриця, елементи якої задано у натуральному виразі, Y – вектор-стовпчик кінцевого споживання, його елементи теж задано у натуральному виразі, P – вектор цін на продукцію галузей. Визначити, чи є матриця A продуктивною, побудувати модель Леонтьєва у натуральній та вартісній формах. Визначити валовий обсяг виробництва продукції у натуральному та вартісному виразах.

$$A = \begin{pmatrix} 34 & 555 & 52 & 84 \\ 77 & 251 & 81 & 0 \\ 235 & 234 & 90 & 108 \\ 37 & 44 & 55 & 95 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 5,6 \\ 9,8 \\ 41,3 \\ 33,3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 29 \\ 10 \\ 15 \\ 66 \end{pmatrix}.$$

3. Функції попиту та пропозиції на деякий товар мають вигляд:

$$q = \frac{2}{p+1}, s = p + 5,$$

де p – ціна одиниці товару, q – величина попиту, s – пропозиції. Знайти: а) ціну рівноваги, яка урівноважує попит та пропозицію на ринку; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну попиту при збільшенні ціни на 5% у порівнянні з ціною рівноваги.

4. При плануванні обсягів виробництва було досліджено попит q_1 та q_2 споживачів відповідно на товари A_1 та A_2 , що можуть замінювати один одного. Визначити, чи може залежність $U(q_1, q_2) = q_1 - 30q_1^2 - 10q_2^2$ бути цільовою функцією споживання. Якщо так, то побудувати карти байдужості та споживання. Виконати розрахунки споживання товарів A_1 та A_2 , якщо пропозиція збільшиться на 10 одиниць. Побудувати загальну функцію попиту та функції попиту на окремі товари, використовуючи середні ціни товарів $p_1 = 50$ у.г.о. та $p_2 = 300$ у.г.о., а також задане значення загальної функції попиту $Z = 10000$ одиниць. Виконати аналіз побудованих функцій попиту, використовуючи показники еластичності за доходом, ціною та заміщенням.

5. За статистичними даними, наведеними у таблиці, побудувати лінійну та мультиплікативну виробничу функції, виконати їх економічний аналіз (побудувати ізокванти для $X_{\max}$ та $X_{\min}$, записати формули для розрахунку

середньої ефективності виробничих ресурсів, їх граничної ефективності, знайти коефіцієнти еластичності).

X	345,2	348,6	306,4	366,1	379,5	385,2	344,8	408,3	450,1	431,2
K	48,0	42,1	42,3	43,7	42,8	41,8	30,0	44,4	51,2	54,6
L	112,5	116,4	111,6	108,9	116,5	104,5	102,7	110,2	104,7	109,4

6. Використовуючи павутиноподібну модель ринку, визначити динаміку ціни p_n та дослідити її поведінку при $n \rightarrow \infty$, якщо відомі попит на товар $d(p)$, пропозиція $s(p)$ та початкова ціна p : $d(p_n) = 12 - 4p_n$, $s(p_{n-1}) = 10 + 2p_{n-1}$, $p = 1$.

Варіант 8

1. Комерційний банк придбав державні облігації з терміном погашення 6 місяців на суму 5 млн. у.г.о. По закінченні цього терміну банк повинен отримати за облігаціями 3 млн. у.г.о. Визначити розмір річної процентної ставки за облігаціями.

2. Матриця A – технологічна матриця, елементи якої задано у натуральному виразі, Y – вектор-стовпчик кінцевого споживання, його елементи теж задано у натуральному виразі, P – вектор цін на продукцію галузей. Визначити, чи є матриця A продуктивною, побудувати модель Леонтьєва у натуральній та вартісній формах. Визначити валовий обсяг виробництва продукції у натуральному та вартісному виразах.

$$A = \begin{pmatrix} 101 & 89 & 98 & 45 \\ 19 & 90 & 54 & 121 \\ 25 & 36 & 72 & 201 \\ 87 & 25 & 43 & 69 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 45,7 \\ 37,8 \\ 39,4 \\ 33,0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 45 \\ 28 \\ 17 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

3. Функції попиту та пропозиції на деякий товар мають вигляд:

$$q = \frac{p+3}{p+5}, s = 2p+1,$$

де p – ціна одиниці товару, q – величина попиту, s – пропозиції. Знайти: а) ціну рівноваги, яка урівноважує попит та пропозицію на ринку; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну попиту при збільшенні ціни на 5% у порівнянні з ціною рівноваги.

4. При плануванні обсягів виробництва було досліджено попит q_1 та q_2 споживачів відповідно на товари A_1 та A_2 , що можуть заміщувати один одного. Визначити, чи може залежність $U(q_1, q_2) = 5q_1^2 + 6q_2 - q_2^2$ бути цільовою функцією споживання. Якщо так, то побудувати карти байдужості та споживання. Виконати

розрахунки споживання товарів A_1 та A_2 , якщо пропозиція збільшиться на 10 одиниць. Побудувати загальну функцію попиту та функції попиту на окремі товари, використовуючи середні ціни товарів $p_1 = 30$ у.г.о. та $p_2 = 400$ у.г.о., а також задане значення загальної функції попиту $Z = 10000$ одиниць. Виконати аналіз побудованих функцій попиту, використовуючи показники еластичності за доходом, ціною та заміщенням.

5. За статистичними даними, наведеними у таблиці, побудувати лінійну та мультиплікативну виробничу функції, виконати їх економічний аналіз (побудувати ізокванти для $X_{\max}$ та $X_{\min}$, записати формули для розрахунку середньої ефективності виробничих ресурсів, їх граничної ефективності, знайти коефіцієнти еластичності).

X	345,0	348,5	306,2	366,4	379,3	385,1	344,7	408,3	450,0	431,5
K	112,5	116,4	111,6	108,9	116,5	104,5	102,7	110,2	104,7	109,4
L	2,1	2,2	2,1	2,0	2,2	1,8	1,9	2,0	1,9	2,3

6. Використовуючи павутиноподібну модель ринку, визначити динаміку ціни p_n та дослідити її поведінку при $n \rightarrow \infty$, якщо відомі попит на товар $d(p)$, пропозиція $s(p)$ та початкова ціна p : $d(p_n) = 7 - 2p_n$, $s(p_{n-1}) = 3 + p_{n-1}$, $p = 2$.

Варіант 9

1. Знайти нинішню вартість 12 тис. у.г.о., які будуть отримані через 2 роки, якщо процентна ставка складає 10 % річних.

2. Матриця A – технологічна матриця, елементи якої задано у натуральному виразі, Y – вектор-стовпчик кінцевого споживання, його елементи теж задано у натуральному виразі, P – вектор цін на продукцію галузей. Визначити, чи є матриця A продуктивною, побудувати модель Леонтьєва у натуральній та вартісній формах. Визначити валовий обсяг виробництва продукції у натуральному та вартісному виразах.

$$A = \begin{pmatrix} 54 & 44 & 29 & 18 \\ 0 & 15 & 23 & 17 \\ 22 & 81 & 37 & 43 \\ 55 & 0 & 61 & 43 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 33,2 \\ 22,3 \\ 43,5 \\ 53,0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 50 \\ 62 \\ 29 \\ 33 \end{pmatrix}.$$

3. Функції попиту та пропозиції на деякий товар мають вигляд:

$$q = \frac{2p+1}{2p+5}, s = p+1,$$

де p – ціна одиниці товару, q – величина попиту, s – пропозиції. Знайти: а) ціну рівноваги, яка урівноважує попит та пропозицію на ринку; б) еластичність попиту

та пропозиції для цієї ціни; в) зміну попиту при збільшенні ціни на 5% у порівнянні з ціною рівноваги.

4. При плануванні обсягів виробництва було досліджено попит q_1 та q_2 споживачів відповідно на товари A_1 та A_2 , що можуть замінювати один одного. Визначити, чи може залежність $U(q_1, q_2) = 2q_1 - q_1^2 + 2q_2 - 3q_2^2$ бути цільовою функцією споживання. Якщо так, то побудувати карти байдужості та споживання. Виконати розрахунки споживання товарів A_1 та A_2 , якщо пропозиція збільшиться на 10 одиниць. Побудувати загальну функцію попиту та функції попиту на окремі товари, використовуючи середні ціни товарів $p_1 = 40$ у.г.о. та $p_2 = 200$ у.г.о., а також задане значення загальної функції попиту $Z = 10000$ одиниць. Виконати аналіз побудованих функцій попиту, використовуючи показники еластичності за доходом, ціною та заміщенням.

5. За статистичними даними, наведеними у таблиці, побудувати лінійну та мультиплікативну виробничу функції, виконати їх економічний аналіз (побудувати ізокванти для $X_{\max}$ та $X_{\min}$, записати формули для розрахунку середньої ефективності виробничих ресурсів, їх граничної ефективності, знайти коефіцієнти еластичності).

X	435,2	348,7	306,4	366,2	379,1	385,1	344,8	408,1	450,2	431,8
K	2,3	2,2	2,2	2,1	2,0	2,1	2,3	2,0	2,4	2,3
L	32,1	31,0	32,4	33,2	31,2	34,8	35,4	33,7	34,6	35,1

6. Використовуючи павутиноподібну модель ринку, визначити динаміку ціни p_n та дослідити її поведінку при $n \rightarrow \infty$, якщо відомі попит на товар $d(p)$, пропозиція $s(p)$ та початкова ціна p : $d(p_n) = 11 - 3p_n$, $s(p_{n-1}) = 7 + p_{n-1}$, $p = 1$.

Варіант 10

1. На початковий капітал 150 тис. у.г.о. неперервно нараховуються складні відсотки – 8 % річних на протязі 3 років. Знайти загальну суму нарахувань.

2. Матриця A – технологічна матриця, елементи якої задано у натуральному виразі, Y – вектор-стовпчик кінцевого споживання, його елементи теж задано у натуральному виразі, P – вектор цін на продукцію галузей. Визначити, чи є матриця A продуктивною, побудувати модель Леонтьєва у натуральній та вартісній формах. Визначити валовий обсяг виробництва продукції у натуральному та вартісному виразах.

$$A = \begin{pmatrix} 378 & 0 & 0 & 29 \\ 200 & 0 & 172 & 35 \\ 45 & 144 & 37 & 331 \\ 123 & 88 & 39 & 86 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 41,7 \\ 3,66 \\ 1,23 \\ 33,8 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 92 \\ 100 \\ 48 \\ 75 \end{pmatrix}.$$

3. Функції попиту та пропозиції на деякий товар мають вигляд:

$$q = \frac{p+2}{p+3}, s = 2p + 4,$$

де p – ціна одиниці товару, q – величина попиту, s – пропозиції. Знайти: а) ціну рівноваги, яка урівноважує попит та пропозицію на ринку; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну попиту при збільшенні ціни на 5% у порівнянні з ціною рівноваги.

4. При плануванні обсягів виробництва було досліджено попит q_1 та q_2 споживачів відповідно на товари A_1 та A_2 , що можуть замінювати один одного. Визначити, чи може залежність $U(q_1, q_2) = 70q_1 - q_1^2 + 50q_2 - q_2^2$ бути цільовою функцією споживання. Якщо так, то побудувати карти байдужості та споживання. Виконати розрахунки споживання товарів A_1 та A_2 , якщо пропозиція збільшиться на 10 одиниць. Побудувати загальну функцію попиту та функції попиту на окремі товари, використовуючи середні ціни товарів $p_1 = 50$ у.г.о. та $p_2 = 150$ у.г.о., а також задане значення загальної функції попиту $Z = 10000$ одиниць. Виконати аналіз побудованих функцій попиту, використовуючи показники еластичності за доходом, ціною та заміщенням.

5. За статистичними даними, наведеними у таблиці, побудувати лінійну та мультиплікативну виробничу функції, виконати їх економічний аналіз (побудувати ізокванти для $X_{\max}$ та $X_{\min}$, записати формули для розрахунку середньої ефективності виробничих ресурсів, їх граничної ефективності, знайти коефіцієнти еластичності).

X	345,1	348,4	306,2	368,4	379,1	385,2	344,6	408,9	450,3	431,4
K	4,1	4,2	4,1	4,1	4,2	4,0	4,1	4,0	4,3	4,3
L	32,1	31,0	33,4	33,1	36,7	36,1	37,1	36,0	38,2	35,4

6. Використовуючи павутиноподібну модель ринку, визначити динаміку ціни p_n та дослідити її поведінку при $n \rightarrow \infty$, якщо відомі попит на товар $d(p)$, пропозиція $s(p)$ та початкова ціна p : $d(p_n) = 5 - 3p_n$, $s(p_{n-1}) = 2 + p_{n-1}$, $p = 2$.

Варіант 11

1. На депозит при процентній ставці 15% річних поклали 20 тис. у.г.о. Яка сума буде на депозитному рахунку через 3 роки?

2. Матриця A – технологічна матриця, елементи якої задано у натуральному виразі, Y – вектор-стовпчик кінцевого споживання, його елементи теж задано у натуральному виразі, P – вектор цін на продукцію галузей. Визначити, чи є матриця A продуктивною, побудувати модель Леонтьєва у натуральній та вартісній формах. Визначити валовий обсяг виробництва продукції у натуральному та вартісному виразах.

$$A = \begin{pmatrix} 59 & 45 & 56 & 36 \\ 76 & 121 & 94 & 43 \\ 69 & 201 & 34 & 55 \\ 82 & 69 & 22 & 77 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 45,3 \\ 28,9 \\ 17,1 \\ 32,0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 202 \\ 90 \\ 186 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

3. Функції попиту та пропозиції на деякий товар мають вигляд:

$$q = \frac{p+3}{p+5}, s = p+3,$$

де p – ціна одиниці товару, q – величина попиту, s – пропозиції. Знайти: а) ціну рівноваги, яка урівноважує попит та пропозицію на ринку; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну попиту при збільшенні ціни на 5% у порівнянні з ціною рівноваги.

4. При плануванні обсягів виробництва було досліджено попит q_1 та q_2 споживачів відповідно на товари A_1 та A_2 , що можуть замінювати один одного. Визначити, чи може залежність $U(q_1, q_2) = 3q_1^{0,25} \cdot q_2^{0,75}$ бути цільовою функцією споживання. Якщо так, то побудувати карти байдужості та споживання. Виконати розрахунки споживання товарів A_1 та A_2 , якщо пропозиція збільшиться на 10 одиниць. Побудувати загальну функцію попиту та функції попиту на окремі товари, використовуючи середні ціни товарів $p_1 = 80$ у.г.о. та $p_2 = 120$ у.г.о., а також задане значення загальної функції попиту $Z = 10000$ одиниць. Виконати аналіз побудованих функцій попиту, використовуючи показники еластичності за доходом, ціною та заміщенням.

5. За статистичними даними, наведеними у таблиці, побудувати лінійну та мультиплікативну виробничу функції, виконати їх економічний аналіз (побудувати ізокванти для $X_{\max}$ та $X_{\min}$, записати формули для розрахунку середньої ефективності виробничих ресурсів, їх граничної ефективності, знайти коефіцієнти еластичності).

X	385,2	378,6	346,4	322,1	349,2	383,1	346,3	418,2	443,7	438,5
K	47,0	41,1	41,3	42,7	41,8	40,8	31,0	43,4	54,2	55,6
L	122,5	126,4	121,6	118,9	126,5	114,5	112,7	120,2	114,7	119,4

6. Використовуючи павутиноподібну модель ринку, визначити динаміку ціни p_n та дослідити її поведінку при $n \rightarrow \infty$, якщо відомі попит на товар $d(p)$, пропозиція $s(p)$ та початкова ціна p : $d(p_n) = 12 - 4p_n$, $s(p_{n-1}) = 8 + 2p_{n-1}$, $p = 1$.

Варіант 12

1. Знайти нинішню вартість 15 тис. у.г.о., які будуть отримані через 3 роки, якщо процентна ставка складає 12 % річних.

2. Матриця A – технологічна матриця, елементи якої задано у натуральному виразі, Y – вектор-стовпчик кінцевого споживання, його елементи теж задано у натуральному виразі, P – вектор цін на продукцію галузей. Визначити, чи є матриця A продуктивною, побудувати модель Леонтьєва у натуральній та вартісній формах. Визначити валовий обсяг виробництва продукції у натуральному та вартісному виразах.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 18 & 36 & 144 \\ 72 & 17 & 55 & 58 \\ 37 & 43 & 43 & 99 \\ 39 & 43 & 15 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 3,12 \\ 2,40 \\ 1,20 \\ 35,7 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 47 \\ 0 \\ 39 \\ 222 \end{pmatrix}.$$

3. Функції попиту та пропозиції на деякий товар мають вигляд:

$$q = \frac{p+1}{2p+3}, s = 3p+6,$$

де p – ціна одиниці товару, q – величина попиту, s – пропозиції. Знайти: а) ціну рівноваги, яка урівноважує попит та пропозицію на ринку; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну попиту при збільшенні ціни на 5% у порівнянні з ціною рівноваги.

4. При плануванні обсягів виробництва було досліджено попит q_1 та q_2 споживачів відповідно на товари A_1 та A_2 , що можуть заміщувати один одного. Визначити, чи може залежність $U(q_1, q_2) = 50q_1 - 7q_1^2 + 40q_2 - 9q_2^2$ бути цільовою функцією споживання. Якщо так, то побудувати карти байдужості та споживання. Виконати розрахунки споживання товарів A_1 та A_2 , якщо пропозиція збільшиться на 10 одиниць. Побудувати загальну функцію попиту та функції попиту на окремі товари, використовуючи середні ціни товарів $p_1 = 40$ у.г.о. та $p_2 = 140$ у.г.о., а також задане значення загальної функції попиту $Z = 10000$ одиниць. Виконати аналіз побудованих функцій попиту, використовуючи показники еластичності за доходом, ціною та заміщенням.

5. За статистичними даними, наведеними у таблиці, побудувати лінійну та мультиплікативну виробничу функції, виконати їх економічний аналіз (побудувати ізокванти для $X_{\max}$ та $X_{\min}$, записати формули для розрахунку середньої ефективності виробничих ресурсів, їх граничної ефективності, знайти коефіцієнти еластичності).

X	245,1	248,8	206,7	266,4	279,3	285,1	244,7	308,3	350,0	331,5
K	112,5	116,4	111,6	108,9	116,5	104,5	102,7	110,2	104,7	109,4
L	3,1	3,2	3,1	3,0	3,2	2,8	2,9	3,0	2,9	3,3

6. Використовуючи павутиноподібну модель ринку, визначити динаміку ціни p_n та дослідити її поведінку при $n \rightarrow \infty$, якщо відомі попит на товар $d(p)$, пропозиція $s(p)$ та початкова ціна p : $d(p_n) = 7 - 3p_n$, $s(p_{n-1}) = 4 + p_{n-1}$, $p = 2$.

ЛІТЕРАТУРА

Основна:

1. Вітлінський В.В. Моделювання економіки. Київ: КНЕУ, 2003. 296 с.
1. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. Москва: Дело и сервис, 2004. 368 с.
2. Колемаев В.А. Математическая экономика. Москва: ЮНИТИ, 2005. 399 с.
3. Гераськин М.И. Математическая экономика. Самара: Изд-во СГАУ, 2011. 176 с.
4. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе. Москва: ЮНИТИ – ДАНА, 2001. 367 с.
5. Равікович Є.І., Присенко Г.В. Макроекономічне прогнозування: навчальний посібник. Київ: КНЕУ, 2007. 172 с.
6. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – Москва: Прогресс, 1975. 605 с.
7. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем. Москва: Финансы и статистика, 2001. 368 с.

Додаткова:

1. Фишберн Ф. Теория полезности для принятия решений. Москва: Наука, 1978. 352 с.
2. Шикин Е.В., Чхартвишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении. Москва: Дело, 2000. 440 с.
3. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. Москва: Наука, 1984. 296 с.
4. Экономико-математическое моделирование: учебник для вузов под ред. И.Н. Дрогобицкого / Л.В. Абланская, Л.О. Бабешко, Л.И. Баусов и др. Москва: Экзамен, 2004. 800 с.
5. Монахов А.В. Математические методы анализа экономики. Санкт-Петербург: Питер, 2002. 176 с.
6. Кігель В.Р. Математичні методи ринкової економіки. Київ: Кондор, 2003. 158 с.