## ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТА

**Задача 1**. Підкидаються два гральні кубика. Знайти ймовірність наступних подій:

$A$ – на обох кубиках випало однакова кількість очок;

$B$ – сума очок не менша 11;

$C$ – число очок на першому кубику більша, ніж на другому;

$D$ – сума очок парна;

$E$ – сума очок більша трьох.

***Розв'язання***. Число очок, які сприяють кожному з названих подій, легко підрахувати, якщо всі можливі результати досліду занести в таблицю. У кожній клітці таблиці перше число вказує число очок на першому кубику, а друге – на другому.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 |

Якщо кубики симетричні й однорідні, то всі пераховані результати досвіду рівноможливі. Тоді

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},$$

оскільки цій події сприяють результати 11, 22, 33, 44, 55, 66;

$$P(B)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12},$$

(сприяють три результати: 56, 65, 66).

Безпосередній підрахунок числа сприятливих результатів дає, що

$$P(C)=\frac{1}{12},\ P(D)=\frac{1}{2},\ P(E)=\frac{11}{12}.$$

**Задача 2.1**. В урні міститься 15 куль, із них 6 червоного кольору. Навмання вибрано 4 кулі. Яка ймовірність того, що 3 з них виявляться червоного кольору? Яка ймовірність того, що серед обраних куль хоча б одна буде червоною?

***Розв'язання***. Якщо кулі ретельно перемішані та вибираються навмання, то рівноможливий вибір будь-яких 4 куль. Тому можна застосувати класичне визначення ймовірності.

Оскільки вибір неповторний і нас цікавить лише склад, то вибрати будь-які 4 кулі можна $C_{15}^4=\frac{15!}{4!\cdot 11!}=1365$ способами. Сформувати вибірку необхідного складу можна, якщо з 6 червоних куль вибрати будь-які 3 кулі (це можна зробити $C_6^3=\frac{6!}{3!\cdot 3!}=20$ способами) та до них додати (4 – 3) будь-яких червоних куль (це можна зробити $C_{15-6}^{4-3}=C_9^1=\frac{9!}{1!\cdot 8!}=9$ способами).

За комбінаторним принципом (за правилом множення) кількість сприятливих результатів дорівнює $20\cdot 9=180$. А, отже, шукана ймовірність дорівнює

$$p=\frac{180}{1365}=\frac{12}{91}.$$

Вибір хоча б однієї червоної кулі протилежний вибору всіх нечервоних куль. Тому ймовірність вибору хоча б однієї червоної кулі дорівнює

$$p = 1 - \frac{C_9^4}{C_{15}^4} = 1 - \frac{126}{1365} = \frac{413}{455}.$$

**Задача 2.2**. З партії, що містить 10 виробів, серед яких три браковані, навмання витягуються три вироби для контролю. Знайти ймовірність наступних подій:

$A$ – серед обраних виробів рівно два браковані;

$B$ – обрані лише браковані вироби;

$C$ – серед вибраних виробів міститься хоча одне браковане.

***Розв'язання***. Вибрати будь-яких три вироби з 10 можна $C_{10}^3 = 120$ способами. Тому маємо 120 рівноможливих результатів.

Події $A$ сприяють ті результати, за яких із семи придатних виробів вибирається один (це можна зробити $C_7^1 = 7$ способами) та з трьох бракованих – два (це можна зробити $C_3^2 = 3$ способами). За комбінаторним принципом число сприятливих для події $A$ результатів дорівнює $7 \cdot 3 = 21$. Тому

$$P(A) = \frac{21}{120} = \frac{7}{40}.$$

Події $B$ сприяє всього один результат і його ймовірність

$$P(B) = \frac{1}{120}.$$

Ймовірність події $C$ простіше обчислити, визначивши спочатку ймовірність події $\overline{C}$ , яка полягає в тому, що вибрано всі придатні вироби. Вибрати три придатні вироби із семи можна $C_7^3 = 35$ способами. Тому

$$P(\overline{C}) = \frac{35}{120} = \frac{7}{24},$$

а

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}.$$

**Задача 3**. Протягом тижня незалежно одна від одної відбуваються чотири події. Знайти ймовірності наступних подій:

$A$ – всі чотири події відбудуться у різні дні тижня;

$B$ – усі чотири події відбудуться в один день;

$C$ – всі ці події відбудуться протягом останніх трьох днів тижня;

$D$ – хоча б в один день тижня відбудуться дві або більше цих подій.

***Розв'язання***. Дні тижня можна подати у вигляді ящиків, а події у вигляді кульок. Тоді розподіл подій по днях тижня можна вважати розкладкою кульок по ящикам.

Оскільки кожну з чотирьох кульок можна помістити в будь-який з семи ящиків, то існує $7^4 = 2401$ рівноможливий спосіб розкласти чотири кульки по семи ящиках. З них події $A$ сприяють $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ способів, тому що для кожної наступної кульки залишається на один порожній ящик менше. Тому

$$P(A) = \frac{840}{2401} \approx 0{,}35.$$

Події $B$ сприяє всього сім способів. Тому

$$P(B)=\frac{7}{2401}=\frac{7}{7^4}=\frac{1}{7^3}\approx 0{,}03.$$

Усі чотири події можуть відбутися в останні три дні тижня $3^4$ способами. Тому

$$P(C)=\frac{3^4}{7^4}=\frac{81}{2401}\approx 0{,}038.$$

Подія $D$ протилежна до події $A$. Тому

$$P(D)=1-P(A)=1-\frac{840}{2401}\approx 1-0{,}35=0{,}65.$$

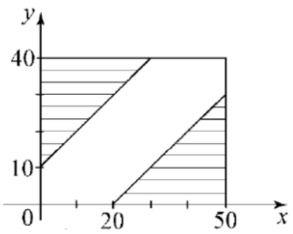
**Задача 4**. 10 книг, з яких чотири мають червону палітурку, навмання ставлять на полицю. У припущенні, що всі розстановки книг на полиці рівноможливі, знайти ймовірність того, що книги з червоною палітуркою будуть стоять поспіль.

***Розв'язання***. 10 книг можна на полиці розставити $n=10!$ способами. Для підрахунку сприятливих комбінацій уявімо спочатку, що червоні книги пов'язані в одну пачку та переставляються як єдина книга. Тоді переставити цю пачку та решту шість книг можна $7!$ способами. Після того, як ця перестановка відбулася, та червоні книги опинилися поряд, розв'яжемо пачку та на заданих чотирьох місцях переставимо червоні книги між собою. Це можна зробити $4!$ способами. За правилом добутку сприятливих способів $m=4!\cdot 7!$. Тому шукана ймовірність дорівнює

$$p=\frac{4!\cdot 7!}{10!}=\frac{1}{30}.$$

**Задача 5**. Дві радіостанції протягом години незалежно одна від одної мають передати повідомлення тривалістю 10 хв. та 20 хв. відповідно. Яка ймовірність того, що повідомлення не перекриються за часом.

***Розв'язання***. Нехай $x$ – момент початку повідомлення першої радіостанції, а $y$ – момент початку другого повідомлення Щоб повідомлення вклалися у відведений час, повинні виконуватися умови: $0\le x\le 50$, $0\le y\le 40$. Повідомлення не перекриються в часу, якщо виконуються умови: $y-x>10$ та $y-x>20$. Цим умовам задовольняють точки заштрихованих областей, зображених на рисунку.




Оскільки всі положення точки $(x;y)$ у прямокутнику $50\times 40$ рівноможливі, то шукана ймовірність дорівнює відношенню заштрихованої площі, яка дорівнює $30\times 30$, до площі прямокутника. Тому

$$p=\frac{30\cdot 30}{50\cdot 40}=\frac{9}{20}.$$

**Задача 6**. Ймовірності влучення в ціль при одному пострілі для першого, другого та третього стрілків дорівнюють відповідно 0,3; 0,6; 0,8. Усі три стрілка вистрілили в ціль. Яка ймовірність того, що:

а) $A$ – ціль уражена;

б) $B$ – відбулося лише одне влучення;

в) $C$ – відбулося рівно два влучення;

г) $D$ – влучать усі три стрілки;

д) $E$ – буде хоча б один промах?

***Розв'язання***. Нехай $A_i$ – подія, що заключається у попаданні в ціль $i$-го стрілки.

а) Влучання в ціль (подія $A$) рівносильна появі хоча б однієї з подій $A_1$ чи $A_2$, чи $A_3$. Тому $A = A_1 + A_2 + A_3$. Враховуючи сумісність подій, маємо

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3),$$

а оскільки події незалежні, то

$$P(A) = 0{,}3 + 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}3 \cdot 0{,}6 - 0{,}3 \cdot 0{,}8 - 0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}944.$$

б) Розглянемо три випадки:

1) $B_1 = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$ – перший стрілок влучив у ціль і при цьому другий не влучив і третій не влучив;

2) $B_2 = \overline{A_1}A_2\overline{A_3}$ – перший стрілок не влучив і при цьому другий влучив, і третій не влучив;

3) $B_3 = \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$ – перший та другий не влучили в ціль і при цьому третій влучив.

Тільки одне влучання в ціль (подія $B$) рівносильне реалізації хоча б однієї з несумісних подій $B_1$ чи $B_2$, чи $B_3$. Тому

$$B = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3.$$

Через незалежність подій $A_i$ маємо:

$$P(B) = 0{,}3 \cdot (1-0{,}6) \cdot (1-0{,}8) + (1-0{,}3) \cdot 0{,}6 \cdot (1-0{,}8) + (1-0{,}3) \cdot (1-0{,}6) \cdot 0{,}8 = 0{,}332.$$

в) Два влучання в ціль (подія $C$) рівносильні реалізації хоча б одного з несумісних випадків: $A_1A_2\overline{A_3}$ або $A_1\overline{A_2}A_3$, або $\overline{A_1}A_2A_3$. Через незалежність подій $A_i$, отримуємо

$$P(C) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}468.$$

г) Усі три стрілки попадуть у ціль (подія $D$), якщо відбудуться події $A_1$ та $A_2$, та $A_3$, тобто. $D = A_1A_2A_3$. Через незалежність подій $A_i$, маємо

$$P(D) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}144.$$

д) Хоча б один промах (подія $E$) рівносильний появі хоча б одній з подій $\overline{A_1}$ чи $\overline{A_2}$, чи $\overline{A_3}$, тобто $E = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3}$. Замість обчислення ймовірності суми трьох сумісних подій, зауважимо, що подія $E$ рівносильна не появі події $D$. Тому

$$P(E) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}144 = 0{,}856.$$

**Задача 7**. З 20 виробів чотири мають приховані дефекти. Вироби вибирають навмання по одному й перевіряють. Знайти ймовірності наступних подій:

*A* – першим бракованим виробом виявиться п'ятий за рахунком виріб, що перевіряється;

*B* – першими бракованими виробами виявляться третій і четвертий перевірені вироби;

*C* – першими бракованими виробами виявляться третій і п'ятий вироби.

***Розв'язання***. Позначимо через $A_i$ подію, що полягає у виборі придатного виробу при $i$-му виборі. Подія $A$ відбудеться, якщо перші чотири вироби виявляться придатними і лише п'ятий за рахунком виріб буде з браком. Це означає, що $A = A_1A_2A_3A_4\overline{A_5}$, причому події залежні. Тому

$$P(A) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_2A_3)P(A_4 / A_1A_2A_3)P\left(\overline{A_5} / A_1A_2A_3A_4\right) =$$

$$= \frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18} \cdot \frac{13}{17} \cdot \frac{4}{16} = \frac{91}{969} \approx 0{,}094.$$

Подія $B$ відбудеться, якщо перші два вироби будуть придатними, а третій і четвертий виявляться бракованими. Символічно це можна записати у вигляді $A = A_1 A_2 \overline{A_3}\,\overline{A_4}$. В силу залежності подій

$$P(B) = P(A_1)P(A_2/A_1)P\left(\overline{A_3}/A_1A_2\right)P\left(\overline{A_4}/A_1A_2\overline{A_3}\right) = \frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{4}{18}\cdot\frac{3}{17} = \frac{8}{323} \approx 0{,}025.$$

Аналогічно, $C = A_1 A_2 \overline{A_3} A_4 \overline{A_5}$ і

$$P(C) = P(A_1)P(A_2/A_1)P\left(\overline{A_3}/A_1A_2\right)P\left(A_4/A_1A_2\overline{A_3}\right)P\left(\overline{A_5}/A_1A_2\overline{A_3}A_4\right) =$$
$$= \frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{4}{18}\cdot\frac{14}{17}\cdot\frac{3}{16} = \frac{7}{323} \approx 0{,}022.$$

**Задача 8**. Є дві коробки, у кожній з яких по 10 деталей. У першій коробці серед деталей дві низького сорту, а другий – чотири низькосортних деталі. З першої коробки для потреб виробництва взяли навмання половину деталей, а ті, що залишилися, висипали у другу коробку. Через деякий час із другої коробки взяли навмання деталь. Яка ймовірність того, що це деталь низького сорту?

***Розв'язання***. Позначимо через $A$ подію, що складається у виборі з другої коробки деталі низького сорту. Можливість цього вибору залежить від того, які саме деталі були додані до другої коробки з першої. З цього приводу можна висунути такі припущення: $B_1$ – до другої коробки додали п'ять придатних деталей; $B_2$ – додали одну деталь низького сорту та чотири якісні; $B_3$ – додали дві деталі низького сорту та три якісні.

П'ять деталей у другу коробку можна перекласти $n = C_{10}^5 = 252$ способами. З них події $B_1$ сприяє $C_8^5 = 56$, події $B_2$ – $C_2^1 C_8^4 = 140$, а події $B_3$ – $C_2^2 C_8^3 = 56$ способів. Подія $A$ відбудеться, якщо відбудеться подія $B_1$ та після цього відбудеться подія $A$ або відбудеться подія $B_2$ та після цього відбудеться подія $A$, або відбудеться $B_3$ та після цього відбудеться $A$.

Символічно: $A = B_1A + B_2A + B_3A$. Враховуючи несумісність подій $B_i$, маємо

$$P(A) = P(B_1A) + P(B_2A) + P(B_3A) =$$
$$= P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3) =$$
$$= \frac{4}{15}\cdot\frac{56}{252} + \frac{5}{15}\cdot\frac{140}{252} + \frac{6}{15}\cdot\frac{56}{252} = \frac{1}{3}.$$

**Задача 9**. По каналу зв'язку передається одна з послідовностей букв *AAAA*, *BBBB*, *CCCC* з ймовірностями відповідно 0,5; 0,4 та 0,1. Кожна літера, що передається, приймається правильно з ймовірністю 0,8 та з ймовірностями 0,1 та 0,1 за будь-яку з двох інших букв. Передбачається, що спотворюються букви під час передачі незалежно друг від друга. Знайти ймовірність того, що передано *AAAA*, якщо прийнято *ABCA*.

***Розв'язання***. Для стислості запису формули позначимо *AAAA* через $T_1$, *BBBB* – через $T_2$, *CCCC* – через $T_3$. Тоді за формулами Байєса

$$P(T_1/ABCA) = \frac{P(T_1)P(ABCA/T_1)}{P(T_1)P(ABCA/T_1) + P(T_2)P(ABCA/T_2) + P(T_3)P(ABCA/T_3)} =$$
$$= \frac{0{,}5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}8}{0{,}5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}8 + 0{,}4\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}8 + 0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1} = \frac{8}{9}.$$

**Задача 10**. Три стрілки роблять по одному пострілу в одну й ту саму ціль. Ймовірності влучання в ціль при одному пострілі для цих стрілків відповідно дорівнюють 0,8; 0,7; 0,6. Яка ймовірність того, що третій стрілок схибив, якщо в мішені виявилося дві пробоїни?

***Розв'язання***. Позначимо через $A$ подію, що полягає у появі двох пробоїн у мішені. Щодо двох пробоїн можуть бути три припущення (гіпотези): $B_1$ – влучили перший і другий стрілки, а третій не влучив, ймовірність

$$P(B_1) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}224;$$

$B_2$ – влучили перший і третій стрілки, а другий не влучив, при цьому ймовірність

$$P(B_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}144;$$

$B_3$ – влучили другий і третій, а перший не влучив, ймовірність чого дорівнює

$$P(B_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}084.$$

Зазначимо, що $P(A/B_i) = 1, i = 1; 2; 3$. Тоді за формулами Байєса

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3)} =$$

$$= \frac{0{,}224}{0{,}224 + 0{,}144 + 0{,}084} = \frac{56}{113} \approx 0{,}5.$$

**Задача 11**. Припустимо, що 30% студентів нашого університету займаються спортом. Яка ймовірність того, що серед перших п'яти зустрічних студентів виявиться лише один спортсмен? Якою є ймовірність того, що серед них є хоча б один спортсмен? Яке найбільш ймовірне число спортсменів серед них?

***Розв'язання***. Оскільки студентів в університеті достатньо багато (кілька тисяч), то в міру опитування кількох з них пропорції в частині, що залишилася, практично не змінюються. Тому можна вважати опитування кожного студента незалежним досвідом. Усього дослідів проводиться $n = 5$, а ймовірність позитивної відповіді $p = 0{,}3$.

За формулою Бернуллі маємо, що ймовірність того, що серед перших п'яти зустрічних студентів виявиться лише один спортсмен:

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^{5-1} = 0{,}36015.$$

Ймовірність хоча б однієї правильної відповіді простіше обчислювати, якщо перейти до протилежної події:

$$P_5(k \geq 1) = 1 - P_5(0) = 1 - 0{,}7^5 = 1 - 0{,}16807 = 0{,}83193.$$

Оскільки $(n+1)p = (5+1) \cdot 0{,}3 = 1{,}8$ (ціла частина числа дорівнює 1), то найбільш ймовірна кількість спортсменів серед п'яти опитаних $k_0 = 1$.

**Задача 12**. Ймовірність влучення в ціль при пострілі дорівнює 0,3. Скільки потрібно зробити пострілів, щоб ймовірність поразки цілі була більшою за 0,9?

***Розв'язання***. Кожен постріл можна розглядати як незалежне випробування, і в кожному з них ймовірність появи події (влучання в ціль) дорівнює $p = 0{,}3$. Ціль буде уражена, якщо в $n$ пострілах буде хоча б одне влучення, ймовірність чого дорівнює

$$P_n(k \geq 1) = 1 - P_n(0) > 0{,}9 \Rightarrow 1 - 0{,}7^n > 0{,}9 \Rightarrow 0{,}7^n < 0{,}1 \Rightarrow n \geq 7.$$

**Задача 13**. Хтось носить на зв'язці п'ять ключів. При відмиканні замка він послідовно випробовує ключі, доки не підбере потрібний. Вважаючи вибір ключів безповторним, написати закон розподілу числа випробуваних ключів. Обчислити математичне сподівання цієї випадкової величини.

***Розв'язання***. Позначимо через $X$ – кількість випробуваних ключів. Оскільки вибір ключів безповторний, то $X$ може набувати значень 1, 2, 3, 4, 5. Випадкова величина прийме значення $x_1 = 1$, якщо з першої спроби буде вибрано потрібний ключ, ймовірність чого дорівнює $\frac{1}{5}$ через рівноможливість вибору будь-якого з ключів. Значення $x_2 = 2$ випадкова величина $X$ прийме, якщо при першій спробі ключ буде вибрано помилково (ймовірність чого дорівнює $\frac{4}{5}$) та при другій спробі буде обраний потрібний ключ із чотирьох (ймовірність цього дорівнює $\frac{1}{4}$). Тому

$$P(X = 2) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5};$$

$$P(X = 3) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5};$$

$$P(X = 4) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5};$$

$$P(X = 5) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{5}.$$

Отже, випадкова величина $X$ має закон розподілу

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

Математичне сподівання випадкової величини (середня кількість спроб) дорівнює

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{1}{5} = 3.$$

**Задача 14**. Монету підкидають доти, доки не випаде герб, або п'ять разів поспіль не випаде цифра. Нехай $X$ – число кидків монети. Написати закон розподілу випадкової величини $X$ та знайдіть її математичне сподівання.

***Розв'язання***. Якщо при першому ж кидку випаде герб, то $X = 1$, ймовірність чого дорівнює $\frac{1}{2}$.

Кидків потрібно два, якщо спочатку випаде цифра, а при другому кидку – герб. Ймовірність такого результату дорівнює $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Монету доведеться кидати тричі, якщо спочатку двічі випаде цифра, а при третьому кидку – герб. Імовірність цього дорівнює $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Аналогічно $P(X = 4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.

Якщо чотири рази поспіль випаде цифра, то потрібний п'ятий кидок, який незалежно від результату (з ймовірністю один) буде останнім. Тому

$$P(X=4)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{16}.$$

Закон розподілу числа кидків має вигляд:

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

Середня кількість кидків дорівнює

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{16}+5\cdot\frac{1}{16}=\frac{31}{16}\approx 2.$$

**Задача 15**. Випадкова величина $X$ має функцію розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{x^2}{36}, & x\in[0;6];\\ 1, & x>6.\end{cases}$$

Знайти $M(X), D(X), P(X<4), P(2<X<5), P(X>3)$.

***Розв'язання***. Спочатку знайдемо функцію щільності ймовірності

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{x}{18}, & x\in[0;6];\\ 0, & x>6.\end{cases}$$

Тоді

$$M(X)=\int_0^6 x\cdot\frac{x}{18}dx=4;$$

$$D(X)=\int_0^6 x^2\cdot\frac{x}{18}dx-[M(X)]^2=18-4^2=2;$$

З урахуванням визначення та властивостей функції розподілу $F(X)$ маємо:

$$P(X<4)=F(4)=\frac{4}{9};$$

$$P(2<X<5)=F(5)-F(2)=\frac{25}{36}-\frac{4}{36}=\frac{7}{12};$$

$$P(X>3)=F(6)-F(3)=1-\frac{9}{36}=\frac{3}{4}.$$

**Задача 16**. Випадкова величина $X$ має нормальний закон розподілу $N(m;\sigma^2)$. Відомо, що $P(X<1)=0{,}15866$, а $P(X>4)=0{,}30854$. Знайти значення параметрів $m$ та $\sigma^2$.

***Розв'язання***. Скористаємося формулою ймовірності нормально розподіленої випадкової величини:

$$P(X<1)=P(-\infty<X<1)=\Phi\left(\frac{1-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\infty-m}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{1-m}{\sigma}\right)+\Phi(\infty)=0{,}15866.$$

Оскільки $\Phi(\infty)=0{,}5$, то $-\Phi\left(\frac{1-m}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{m-1}{\sigma}\right)=0{,}5-0{,}15866=0{,}34134$. За таблицею функції Лапласа знаходимо, що $\Phi(1)=0{,}34134$. Тому

$$\frac{m-1}{\sigma}=1 \text{ або } m-1=\sigma.$$

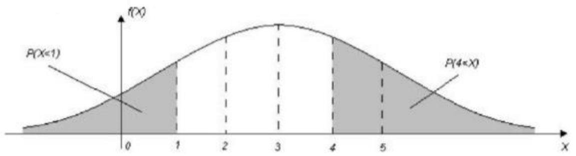
Аналогічно,

$$P(X>4)=P(4<X<\infty)=\Phi\left(\frac{\infty-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{4-m}{\sigma}\right)=\Phi(\infty)-\Phi\left(\frac{4-m}{\sigma}\right)=0{,}30854.$$

Оскільки $\Phi(\infty)=0{,}5$, $\Phi\left(\frac{4-m}{\sigma}\right)=0{,}5-0{,}30854=0{,}19146$. За таблицею функції Лапласа знаходимо, що $\Phi\left(\frac{1}{1}\right)=0{,}19146$; а тому

$$\frac{4-m}{\sigma}=\frac{1}{2} \text{ або } m-4=-0{,}5\sigma.$$

З системи двох рівнянь $\begin{cases} m-1=\sigma, \\ m-4=-0{,}5\sigma \end{cases}$ знаходимо, що $m=3, \sigma=2$, тобто $\sigma^2=4$. Отже, випадкова величина $X$ має нормальний закон розподілу $N(3;4)$.




Графік функції щільності ймовірності цього закону розподілу зображено на рисунку.

**Задача 17**. Вісімдесят відсотків приладів після збирання потребують регулювання. Яка ймовірність того, що серед 400 зібраних за зміну приладів регулювання потребують: а) не менше ніж 310; б) не більше ніж 350; в) від 304 до 336?

***Розв'язання***. Збирання кожного приладу можна вважати незалежним випробуванням з ймовірністю появи події $p=0{,}8$. Оскільки число дослідів велике, то можна скористатися інтегральною теоремою Муавра-Лапласа:

$$P_{400}(310;400)=\Phi\left(\frac{400-400\cdot 0{,}8}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)-\Phi\left(\frac{310-400\cdot 0{,}8}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=$$
$$=\Phi(10)+\Phi(1{,}25)=0{,}5+0{,}3944=0{,}8944;$$

$$P_{400}(0;350)=\Phi\left(\frac{350-400\cdot 0{,}8}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)-\Phi\left(\frac{0-400\cdot 0{,}8}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=$$
$$=\Phi(3{,}75)+\Phi(40)=0{,}4999+0{,}5=0{,}9999\approx 1;$$

$$P_{400}(304;336)=\Phi\left(\frac{336-400\cdot 0{,}8}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)-\Phi\left(\frac{304-400\cdot 0{,}8}{\sqrt{400\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)=$$
$$=\Phi(2)+\Phi(2)=2\Phi(2)=0{,}9545.$$

**Задача 18**. Ймовірність влучення в ціль при пострілі дорівнює 0,8. Скільки потрібно запланувати пострілів, щоб із ймовірністю більшою за 0,9 можна було отримати не менше 30 влучань?

***Розв'язання***. Кожен постріл вважаємо незалежним експериментом. З умов задачі легко бачити, що число пострілів $n$ має бути достатньо великим ($n>30$). Тому можна скористатися інтегральною формулою Муавра-Лапласа:

$$P_n(30 \le k \le n) \approx \Phi\left(\frac{n - n \cdot 0{,}8}{\sqrt{n \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) - \Phi\left(\frac{30 - n \cdot 0{,}8}{\sqrt{n \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) > 0{,}9.$$

Відмітимо, що $\frac{n - n \cdot 0{,}8}{\sqrt{n \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{0{,}2n}{0{,}4\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{2}$ та при $n > 30$ величина $\frac{\sqrt{n}}{2} > 2{,}74$. Тому

$$\Phi\left(\frac{n - n \cdot 0{,}8}{\sqrt{n \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) > 0{,}4969 \approx 0{,}5.$$

Отже, вихідну нерівність можна переписати у вигляді:

$$\Phi\left(\frac{n \cdot 0{,}8 - 30}{0{,}4\sqrt{n}}\right) > 0{,}4.$$

За таблицею функції Лапласа знаходимо, що $\Phi(1{,}28) = 0{,}4$. Оскільки функція Лапласа строго зростає, то $\frac{n \cdot 0{,}8 - 30}{0{,}4\sqrt{n}} > 1{,}28$ або $n - 0{,}64\sqrt{n} - 37{,}5 > 0$. Звідки $\sqrt{n} > 6{,}4538$, тобто $n > 41{,}65$. Таким чином, $n \ge 42$.

**Задача 19**. Випадкові величини $X_1$ та $X_2$ є незалежними та мають кожна закон розподілу:

| $X$ | $-1$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0,6 | 0,3 | 0,1 |

Знайти закони розподілу випадкових величин $Y = 2X_1$, $Z = X_1 + X_2$, $U = X_1^2$, $W = X_1 X_2$. Знайти математичні сподівання цих величин.

***Розв'язання***. Функція $y = 2x$ монотонна. Тому випадкова величина $Y$ може набувати значень –2, 0, 4 з ймовірностями, рівними ймовірностям відповідних значень $X$. Звідси

| $Y$ | $-2$ | $0$ | $4$ |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0,6 | 0,3 | 0,1 |

і $M(Y) = -2 \cdot 0{,}6 + 0 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}1 = -0{,}8$.

Знайдемо можливі значення випадкової величини $Z$:

$Z = -1 + (-1) = -2$ з ймовірністю $p = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$;

$Z = -1 + 0 = -1$ з ймовірністю $p = 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}18$;

$Z = -1 + 2 = 1$ з ймовірністю $p = 0{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}06$;

$Z = 0 + 0 = 0$ з ймовірністю $p = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$;

$Z = 0 + 2 = 2$ з ймовірністю $p = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03$;

$Z = 2 + (-1) = 1$ з ймовірністю $p = 0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}06$;

$Z = 2 + 0 = -1$ з ймовірністю $p = 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03$;

$Z = 2 + 2 = 4$ з ймовірністю $p = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$.

Додаючи ймовірності значень $Z$, що повторюються, отримуємо наступний закон розподілу:

| $Z$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0,36 | 0,36 | 0,09 | 0,12 | 0,06 | 0,01 |

та $M(Z) = -2 \cdot 0{,}36 + (-1) \cdot 0{,}36 + 0 \cdot 0{,}09 + 1 \cdot 0{,}12 + 2 \cdot 0{,}06 + 4 \cdot 0{,}01 = -0{,}8$.

Випадкова величина $U$ приймає значення

$U = (-1)^2 = 1$ з ймовірністю $p = 0{,}6$;

$$U = 0^2 = 0 \text{ з ймовірністю } p = 0{,}3;$$

$$U = 2^2 = 4 \text{ з ймовірністю } p = 0{,}1.$$

Тому закон її розподілу має вигляд:

| $U$ | 0 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0,3 | 0,6 | 0,1 |

а математичне сподівання

$$M(U) = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}1 = 1.$$

Знайдемо можливі значення випадкової величини $W$:

$$W = -1 \cdot (-1) = 1 \text{ з ймовірністю } p = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36;$$

$$W = -1 \cdot 0 = 0 \text{ з ймовірністю } p = 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}18;$$

$$W = -1 \cdot 2 = -2 \text{ з ймовірністю } p = 0{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}06;$$

$$W = 0 \cdot 0 = 0 \text{ з ймовірністю } p = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09;$$

$$W = 0 \cdot 2 = 0 \text{ з ймовірністю } p = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03;$$

$$W = 2 \cdot (-1) = -2 \text{ з ймовірністю } p = 0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}06;$$

$$W = 2 \cdot 0 = 0 \text{ з ймовірністю } p = 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03;$$

$$W = 2 \cdot 2 = 4 \text{ з ймовірністю } p = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01.$$

Додаючи ймовірності значень $W$, що повторюються, отримуємо закон розподілу цієї випадкової величини:

| $W$ | – 2 | 0 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0,12 | 0,51 | 0,36 | 0,01 |

Її математичне сподівання:

$$M(W) = -2 \cdot 0{,}12 + 0 \cdot 0{,}51 + 1 \cdot 0{,}36 + 4 \cdot 0{,}01 = 0{,}16.$$