

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА: ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Інтелектуальні сервіс-орієнтовані розподілені обчислення»
спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»*

Київ

КПІ ім. Ігоря Сікорського

2022

Лінійна алгебра: Практикум [Електронний ресурс]: практикум для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад. Ю. Є. Бохонов. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,42 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 139 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 5 від 26.05.2022 р.)
за поданням Вченої ради Інституту прикладного системного аналізу (протокол № 4 від 25.04.2022 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА: ПРАКТИКУМ

Укладач:
Відповідальний
редактор

Бохонов Юрій Євгенович, канд. ф. - мат. н, доцент
Подколзін Г.Б., канд. ф. - мат. н., доцент

Рецензент:

Голуб А.П., д-р ф.-мат. н., провідний науковий співробітник

Інституту математики НАН України

«Лінійна алгебра: Практикум» призначено для вивчення на практиці студентами спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» основ аналітичної геометрії та лінійної алгебри. Запропоновано розв'язки задач на теми з лінійної алгебри: теорія лінійних просторів, операторів, матриць та визначників. Алгебраїчний апарат застосовується до задач, що виникають у аналітичній геометрії: в теорії прямих і площин, а також кривих другого порядку, зведення їх до головних осей.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

ЗМІСТ

Вступ	5
1. Практичне заняття II.1. Ділення з залишком. Найбільший спільний дільник многочленів. Алгоритм Евкліда.	6
2. Практичне заняття II.2. Схема Горнера. Результат системи двох рівнянь.	9
2.1.Схема Горнера ділення многочлена на біном.....	10
2.2.Результат.....	11
3. Практичне заняття II.3. Скалярний добуток, нерівність Коші-Буняковського, метод ортогоналізації Грама-Шмідта.....	17
3.1.Скалярний добуток.....	17
3.2.Метод ортогоналізації Грама-Шмідта.....	20
4. Практичне заняття II.4. Ортогональні підпростори, ортогональна проекція вектора на підпростір.....	25
5. Практичне заняття II.5. Власні числа та вектори лінійного оператора. Характеристичний многочлен матриці оператора як інваріант.....	29
6. Практичне заняття II.6. Спряжений оператор та його матриця. Самоспряжені оператори. Полярний розклад.....	40
7. Практичне заняття II.7. Кореневі (приєднані) вектори. Ланцюги кореневих підпросторів.....	53
8. Практичне заняття II.8. Зведення матриці до нормальної форми Жордана. Приклади матриць третього, четвертого та п'ятого порядків.....	60
9. Практичне заняття II.9. Нормальна форма у дійсному випадку.	74
10.Практичне заняття II.10. Функції від матриці лінійного оператора, експонента оператора.....	79
11.Практичне заняття II.11. Квадратичні форми. Зведення до канонічного вигляду методом Лагранжа.....	84
12.Практичне заняття II.12. Квадратичні форми. Зведення до канонічного вигляду ортогональним (унітарним)	

перетворенням.....	91
13.Практичне заняття П.13. Канонічні рівняння поверхонь	
другого порядку.....	104
14.Практичне заняття П.14. Лінійчаті поверхні.....	109
15.Практичне заняття П.15-16. Зведення рівнянь поверхонь	
другого порядку до канонічного вигляду.....	111
16.Практичне заняття П.17. Класифікація поверхонь другого	
порядку.....	126
17.Практичне заняття П.18. Тензорні добутки лінійних просторів	
і матриць та їхнє застосування.....	129
ЛІТЕРАТУРА.....	134

ВСТУП

У посібнику «Лінійна алгебра: Практикум» містяться методичні рекомендації до виконання домашніх контрольних робіт. Він включає задачі на основні теми з теорії многочленів, унітарних та евклідових просторів, лінійних операторів в таких просторах, білінійних та квадратичних просторів. Розглядається також теорія поверхонь другого порядку, зведення їхніх рівнянь до канонічного вигляду.

Що стосується теорії многочленів, розглядається їхня теорія подільності, алгоритм Евкліда, схема Горнера.

В теорії унітарних та гільбертових просторів розглядаються задачі, пов'язані з прямим ортогональними сумами підпросторів, проекціями векторів на підпростори, метод ортогоналізації Грама-Шмідта.

Вивчається теорія власних і кореневих підпросторів лінійних операторів, зведення матриць цих операторів до нормальної форми Жордана та нормальної форми у дійсних просторах. Зокрема розглядаються усі випадки зведення до нормальної форми матриць другого, третього та четвертого порядку.

Розглянуті методи застосовуються до задач, пов'язаних з визначенням функцій від матриць.

Розв'язуються задачі, пов'язані з теорією нормальних операторів.

Серед менш традиційних тем розглядаються тензорні добутки матриць і їхнє застосування до розв'язання деяких систем лінійних рівнянь.

Розглядаються задачі на зведення до канонічного вигляду різними способами квадратичних форм.

Розглянута техніка застосовується до зведення загальних рівнянь поверхонь другого порядку до канонічного вигляду.

Практичне заняття II.1. Ділення з залишком. Найбільший спільний дільник многочленів. Алгоритм Евкліда.

Теоретичні відомості

Означення 1.1. Многочлен $P(x)$ ділиться на многочлен $Q(x)$ з залишком, якщо

$P(x) = Q(x)S(x) + R(x).$	(1.1)
---------------------------	-------

При цьому $S(x)$ називається неповною часткою, а $R(x)$ – залишком від ділення. Відомо, що вони існують, і степінь $R(x)$ менший за степінь $Q(x)$. Якщо $R(x) = 0$, то кажуть, що $Q(x)$ є дільником $P(x)$.

Теорема 1.1. Число x_0 є коренем многочлена кратності r тоді і тільки тоді, коли $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(r-1)}(x_0) = 0, f^{(r)}(x_0) \neq 0$.

Теорема 1.2. Якщо $D(x)$ – найбільший спільний дільник $P(x)$ і $Q(x)$, то існують многочлени $U(x)$ і $V(x)$, що справедлива рівність

$P(x)U(x) + Q(x)V(x) = D(x).$	(1.2)
-------------------------------	-------

Теорема 1.3 (Безу). Число a є коренем многочлена тоді і тільки тоді, коли він ділиться на $x - a$ без остачі, інакше він дає остачу при діленні, яка дорівнює значенню многочлена в точці a :

Задача 1.1. При яких умовах многочлен $P(x) = x^3 + px + q$ ділиться на $Q(x) = x^2 + mx - 1$?

Розв'язання. Маємо:

$$x^3 + px + q = (x - x_0)(x^2 + mx + 1) = x^3 + (m - x_0)x^2 + (1 - mx_0)x - x_0.$$

При $x = 0$ одержимо: $x_0 = q$ і попередню рівність можна переписати у вигляді:

$$x^3 + px + q = x^3 + (m - q)x^2 - (1 + mq)x + q.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях змінної x , одержимо:

$$\begin{cases} m - q = 0, \\ -(1 + mq) = p. \end{cases}$$

Відповідь: $q = m, p = -(1 + m^2)$.

Задача 1.2. Чому дорівнює кратність кореня $x_0 = 2$ многочлена

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8?$$

Розв'язання. Маємо: $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 21x^2 - 4x + 4$, $f'(2) = 0$;

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 42x - 4, f''(2) = 0;$$

$$f'''(x) = 60x^2 - 120x + 42, f'''(2) = -198 \neq 0.$$

Відповідь: $x = 2$ - корінь кратності 3 даного многочлена.

Задача 1.3. Знайти найбільший спільний дільник многочленів

$P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ і $Q(x) = x^3 + x^2 - x - 1$, використовуючи алгоритм Евкліда.

Розв'язання. Читач самостійно поділить «кутом» перший многочлен на другий, в результаті чого отримає:

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x^3 + x^2 - x - 1)x + (-2x^2 - 3x - 1).$$

Це запишемо у вигляді $P(x) = Q(x)S_1(x) + R_1(x)$, $S_1(x) = x$, $R_1(x) = -2x^2 - 3x - 1$.

Ділимо тепер з остачею $Q(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ на $R_1(x) = -2x^2 - 3x - 1$:

$$Q(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (-2x^2 - 3x - 1)\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}\right).$$

Ділимо тепер $R_1(x) = -2x^2 - 3x - 1$ на $R_2(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$:

$$R_1(x) = -2x^2 - 3x - 1 = \left(-\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{8}{3}x + \frac{4}{3}\right).$$

Отже, одержали найбільший загальний спільний дільник двох даних многочленів: $-\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4}(x+1)$. Дільник з першим коефіцієнтом одиниця має вигляд $D(x) = x+1$.

Задача 1.4. Користуючись алгоритмом Евкліда, знайти многочлени $U(x)$ і $V(x)$ такі, що $P(x)U(x) + Q(x)V(x) = D(x)$, якщо $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$,
 $Q(x) = x^2 - x + 1$.

Розв'язання.

$$P(x) = Q(x)S(x) + R_1(x) \Leftrightarrow$$

$$3x^3 - 2x^2 + x + 2 = (x^2 - x + 1)(3x + 1) + (-x + 1),$$

$$Q(x) = R_1(x)S_1(x) + R_2(x) \Leftrightarrow$$

$$x^2 - x + 1 = (-x + 1)(-x) + 1,$$

$$R_1(x) = R_2(x)R_1(x)$$

$$-x + 1 = 1 \cdot (-x + 1).$$

Звідси $D(x) = R_2(x) = 1$, тобто, многочлени $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$ і

$Q(x) = x^2 - x + 1$ взаємно прості.

Тепер з другої рівності

$$Q(x) - R_1(x)S_1(x) = R_2(x) = D(x) \Leftrightarrow$$

$$x^2 - x + 1 - (-x + 1)(-x) = 1.$$

Підставимо в цю рівність значення $R_1(x)$, виражене з першої рівності:

$$R_1(x) = P(x) - Q(x)S(x) \Leftrightarrow$$

$$-x + 1 = 3x^3 - 2x^2 + x + 2 - (x^2 - x + 1)(3x + 1):$$

$$Q(x) - (P(x) - Q(x)S(x))S_1(x) = R_2(x) = D(x) \Leftrightarrow$$

$$x^2 - x + 1 - (3x^3 - 2x^2 + x + 2 - (x^2 - x + 1)(3x + 1))(-x) = 1.$$

Звідси

$$P(x)(-S_1(x)) + Q(x)(1 + S(x)S_1(x)) = R_2(x) = D(x) \Leftrightarrow$$

$$(3x^3 - 2x^2 + x + 2)x + (x^2 - x + 1)(1 + (3x + 1)(-x)) = 1.$$

Остаточно

$$(3x^3 - 2x^2 + x + 2)x + (x^2 - x + 1)(-3x^2 - x + 1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$P(x)U(x) + Q(x)V(x) = 1.$$

$$\text{Тут } U(x) = x, V(x) = -3x^2 - x + 1.$$

Задача 1.5. Знайти найбільший спільний дільник многочлена

$$P(x) = (x-1)^3(x+1)^2(x-3) \text{ і його похідної.}$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} P'(x) &= ((x-1)^3(x+1)^2(x-3))' = \\ &= 3(x-1)^2(x+1)^2(x-3) + 2(x-1)^3(x+1)(x-3) + (x-1)^3(x+1)^2 = \text{і} \\ &= (x-1)^2(x+1)(3(x+1)(x-3) + 2(x-1)(x-3) + (x-1)(x+1)). \end{aligned}$$

Два доданки у останніх дужках діляться на $x+1$, третій не ділиться, тому весь вираз не ділиться на $x+1$; теж саме можна сказати про неподільність на $x-1$ і на $x-3$. Інших дільників у даного в умові многочлена немає. Отже, найбільший спільний дільник у нього і її похідної – це $D(x) = (x-1)^2(x+1)$.

Задача 1.7. Довести: якщо многочлен $P(x^n)$ ділиться на $x-1$, то він ділиться і на x^n-1 .

Доведення. Нехай

$$P(x^n) = a_0(x^n)^m + a_1(x^n)^{m-1} + \dots + a_k(x^n)^{m-k} + \dots + a_{m-1}x^n + a_m = (x-1)Q(x).$$

Звідси випливає, що

$$a_0 + a_1 + \dots + a_k + \dots + a_{m-1} + a_m = 0.$$

Маємо:

$$a_k(x^n)^{m-k} = a_k((x^n-1)+1)^{m-k} = a_k \sum_{j=0}^{m-k} C_{m-k}^j (x^n-1)^j = a_k \sum_{j=1}^{m-k} C_{m-k}^j (x^n-1)^j + a_k.$$

Тоді

$$P(x^n) = a_0(x^n)^m + \dots + a_k(x^n)^{m-k} + \dots + a_{m-1}x^n + a_m =$$

$$= a_0 \sum_{j=1}^m C_{m-k}^j (x^n - 1)^j + \dots + a_k \sum_{j=1}^{m-k} C_{m-k}^j (x^n - 1)^j + \dots + a_{m-1}(x^n - 1) + (a_0 + a_1 + \dots + a_k + \dots + a_n).$$

Кожен доданок з сум $a_k \sum_{j=1}^{m-k} C_{m-k}^j (x^n - 1)^j$ ділиться на $x^n - 1$, а остання сума у дужках дорівнює нулю, що й доводить твердження.

Задача 1.6. Нехай многочлен $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_kx^{n-k} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ має корені $x_1, x_2, \dots, x_n$. Які корені має многочлен

$$Q(x) = a_0x^n - a_1x^{n-1} + \dots + (-1)^k a_kx^{n-k} + \dots + (-1)^n a_n ?$$

Розв'язання. Підставимо в $Q(x)$ довільний корінь многочлена $P(x)$, взятий з протилежним знаком:

$$Q(-x_j) = (-1)^n a_0x_j^n - (-1)^{n-1} a_1x_j^{n-1} + \dots + (-1)^k (-1)^{n-k} a_kx_j^{n-k} + \dots + (-1)^n a_n =$$

$$= (-1)^n (a_0x_j^n + a_1x_j^{n-1} + \dots + a_kx_j^{n-k} + \dots + a_n) = (-1)^n P(x_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Отже, якщо x_j - корінь $P(x)$, то $-x_j$ - корінь $Q(x)$.

1). Завдання для самостійної роботи: [9], №№ 549, 551, 578, 579, 580.

2. Практичне заняття II.2. Схема Горнера. Результат системи двох рівнянь.

Теоретичні відомості

2.1. Схема Горнера ділення многочлена на біном

Нехай треба поділити многочлен $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_kx^{n-k} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ на біном $x - a$. Позначимо неповну частку, многочлен степені $n-1$ через

$$Q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_kx^{n-k} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}. \text{ Тоді } P(x) = (x - a)Q(x) + R.$$

Знаходження невідомих коефіцієнтів зручно робити, користуючись таблицею:

		a_0		a_1			a_2			$\dots$	a_{n-1}			a_n			
—		—		—			—			—	—			—			(2.1)
a		$b_0 =$		$b_1 =$			$b_2 =$			$b_{n-1} =$			$R =$				
		$= a_0$		$= ab_0 + a_1$			$= ab_1 + a_2$			$\dots = ab_{n-2} + a_{n-1}$			$= ab_{n-1} + a_n$				

Задача 2.1. Користуючись схемою Горнера, обчислити $f(4)$, де

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16.$$

Розв'язання. За теоремою Безу $f(4) = R$, де R - залишок від ділення $f(x)$ на $x - 4$. Цей залишок знайдемо за схемою Горнера:

		1		-3			6			-10			16			
—		—		—			—			—			—			
4		$b_0 =$		$b_1 =$			$b_2 =$			$b_3 =$			$R =$			
		$= 1$		$= 4 - 3 = 1$			$= 4 + 6 = 10$			$4 \cdot 10 - 10 = 30$			$= 4 \cdot 30 + 16 = 136$			

Відповідь. $f(4) = R = 136$.

2.2. Результат

Нехай ϵ поліноми z , взагалі кажучи, комплексними коефіцієнтами

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$ $g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m,$ $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0.$	(2.2)
---	-------

Система двох рівнянь має розв'язки тоді і тільки тоді, коли ці поліноми мають спільний дільник. Нехай перший і другий полінома мають, відповідно, n , і m , взагалі кажучи, комплексних коренів, множини яких ми позначимо $\{a\}$ і $\{b\}$:

$\{a\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, f(x) = a_0 \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i),$ $\{\beta\} = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}, g(x) = b_0 \prod_{j=1}^m (x - \beta_j).$	(2.2)
--	-------

Означення 2.1. Вираз

$R(f, g) = a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j)$	(2.3)
--	-------

Називається результатом двох многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

Твердження 2.1. Поліноми $f(x)$ і $g(x)$ мають спільний корінь тоді і тільки тоді, коли $R(f, g) = 0$.

Теорема 2.1. Результат двох поліномів може бути обчислений за допомогою наступного визначника (Сільвестра):

$ D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_n & & \\ & & \cdot & \cdot & \dots & & \\ & & & a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdot & \dots & b_m & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & b_0 & b_1 & \cdot & \dots & b_m \end{vmatrix}$	(2.4)
---	-------

Розглядаються два поліноми від двох змінних, причому зразу перепишемо їх як поліноми від однієї змінної x , коефіцієнти яких залежать від y :

$f(x) = a_0(y)x^k + a_1(y)x^{k-1} + \dots + a_{k-1}(y)x + a_k(y),$ $g(x) = b_0(y)x^l + b_1(y)x^{l-1} + \dots + b_{l-1}(y)x + b_l(y).$	(2.5)
---	-------

Оскільки ці поліноми розглядаються як функції від x , то їхній результат будемо позначати $R_x(f, g)$. З розглянутої раніше теорії робимо висновок: при наявності спільного кореня $x = \alpha, y = \beta$ він дорівнює нулю або, якщо рівняння $R_x(f, g) \equiv F(y) = 0$ має розв'язок, то тоді ці поліноми мають спільний корінь або обидва їхніх старших коефіцієнти дорівнюють нулю.

Таким чином, знаходження спільних коренів двох поліноміальних рівнянь від двох змінних звелось до розв'язання поліноміального рівняння від однієї змінної. Цей підхід називається методом виключення і належить Ейлеру.

Задача 2.2. При якому значенні λ поліноми $P(x) = x^3 - \lambda x + 2$ і

$Q(x) = x^2 + \lambda x + 2$ мають спільний корінь?

Розв'язання. Дослідимо результат системи рівнянь

$$\begin{cases} x^3 - \lambda x + 2 = 0, \\ x^2 + \lambda x + 2 = 0. \end{cases}$$

Обчислюючи результат, продемонструємо різноманітні властивості визначників:

$$R(P, Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 2 \\ 1 & \lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & \lambda & \lambda + 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda + 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda & 2 \\ \lambda & \lambda + 2 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda + 2 & -2 \\ 0 & 1 & \lambda & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -\lambda & 2 \\ \lambda & 2 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda+2 & -2 \\ 0 & 1 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ \lambda & 2 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda+2 & -2 \\ 0 & 1 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -4\lambda \\ 0 & \lambda & \lambda+2 & -2 \\ 0 & 1 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -4\lambda \\ 0 & \lambda & \lambda+2 & -2 \\ 0 & 1 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2\lambda \\ \lambda & \lambda+2 & -2 \\ 1 & \lambda & 2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ \lambda & \lambda+2 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ \lambda & \lambda+2 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & -\lambda-1 \end{vmatrix} = \\
&= -4(\lambda+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ \lambda & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4(\lambda+1) \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = \\
&= -4(\lambda+1) \left(\lambda \begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 3 \right) = -4(\lambda+1) \left(\lambda \begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 0 & 2 & -\lambda \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} - 3 \right) = \\
&= -4(\lambda+1) \left(\lambda \begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 3 \right) = -4(\lambda+1)(\lambda(\lambda-2)-3) = -4(\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda-3) = \\
&= -4(\lambda+1)^2(\lambda-3).
\end{aligned}$$

Відповідь: $\lambda = -1; \lambda = 3$.

Задача 2.3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 y + 3xy + 2y + 3 = 0, \\ g(x, y) = 2xy - 2x + 2y + 3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо поліноми у лівих частинах як функції від x з коефіцієнтами, що залежать від y :

$$\begin{cases} yx^2 + (3y)x + (2y+3) = 0, \\ (2y-2)x + (2y+3) = 0. \end{cases}$$

$$R_x(f, g) = \begin{vmatrix} y & 3y & 2y+3 \\ 2y-2 & 2y+3 & 0 \\ 0 & 2y-2 & 2y+3 \end{vmatrix} = 2y^2 + 11y + 12 = 2(y+4)\left(y + \frac{3}{2}\right).$$

Старші коефіцієнти даних в умові поліномів не обертаються в нуль при значеннях $y = -4, y = -\frac{3}{2}$.

Знайдемо

$$f(x, -4) = -4x^2 - 12x - 5 = -4\left(x + \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right),$$

$$g(x, -4) = -10x - 5 = -10\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Многочлени мають спільний корінь $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$.

Далі

$$f\left(x, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x = -\frac{3}{2}x(x+3),$$

$$g\left(x, -\frac{3}{2}\right) = -5x.$$

Відповідь. Система має розв'язки: $(x, y) \in \left\{\left(-\frac{1}{2}, -4\right), \left(0, -\frac{3}{2}\right)\right\}$.

Задача 2.4. Виключити x з рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ x^2y + xy^2 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай поліноми системи мають розв'язок $x = \alpha, y = \beta$. Записуючи ці поліноми відносно x з коефіцієнтами, які залежать від y , згідно з

твердженням 2.1 одержимо умову існування спільного розв'язку: $R(y) = 0$, і це рівняння, якому задовольняє β , є результатом виключення змінної "x".

Спочатку запишемо поліноми в системі як поліноми від x з коефіцієнтами, що залежать від y :

$$\begin{cases} x^2 - yx + y^2 - 3 = 0, \\ yx^2 + y^2x - 6 = 0. \end{cases}$$

Маємо:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & -y & y^2 - 3 & 0 \\ 0 & 1 & -y & y^2 - 3 \\ y & y^2 & -6 & 0 \\ 0 & y & y^2 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -y & y^2 - 3 \\ y^2 & -6 & 0 \\ y & y^2 & -6 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} -y & y^2 - 3 & 0 \\ 1 & -y & y^2 - 3 \\ y & y^2 & -6 \end{vmatrix} = \\ & = (y^2 - 3)(y^4 + 6y) - 6(y^3 - 6) + y((y^2 - 3)(2y^3 - 3y) - 6(y^2 - y^2 + 3)) = \\ & = y^6 - 3y^4 + 6y^3 - 18y + 36 - 6y^3 + y(2y^5 - 9y^3 + 9y - 18) = \\ & = 3(y^6 - 4y^4 + 3y^2 - 12y + 12). \end{aligned}$$

Після виключення x одержано рівняння: $y^6 - 4y^4 + 3y^2 - 12y + 12 = 0$.

Інтерполяційний многочлен Лагранжа

Многочлен (Лагранжа) $P(x)$ степені n , який в точках

$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ приймає задані значення:

$P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, \dots, P(x_n) = y_n, P(x_{n+1}) = y_{n+1}$	(2.6)
---	---------

має вигляд:

$P(x) = \sum_{k=1}^{n+1} y_k P_k(x) = \sum_{k=1}^{n+1} y_k \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_{n+1})}{(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_{n+1})}.$	(2.7)
--	---------

Задача 2.4. Записати інтерполяційний многочлен Лагранжа за таблицею значень: $P(1)=2, P(2)=1, P(3)=4, P(4)=3$.

$$\begin{aligned} P(x) &= 2 \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} + \\ &+ 4 \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} + 3 \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} = \\ &= -\frac{1}{3}(x-2)(x-3)(x-4) + \frac{1}{2}(x-1)(x-3)(x-4) - \\ &- 2(x-1)(x-2)(x-4) + \frac{1}{2}(x-1)(x-2)(x-3) = \\ &= -\frac{4}{3}x^3 + 10x^2 - \frac{65}{3}x + 15. \end{aligned}$$

2). Завдання для самостійної роботи: [9], №№ 723, 724.

3. Практичне заняття П.3. Скалярний добуток, нерівність Коші-Буняковського, метод ортогоналізації Грама-Шмідта.

3.1. Скалярний добуток

Задача 3.1. Знайти вектор, що має одиничну норму, ортогональний до векторів $(1 \ 1 \ 1 \ 1)^T, (1 \ -1 \ -1 \ 1)^T, (2 \ 1 \ 1 \ 3)^T$.

Розв'язання. Знайдемо координати вектора $x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T$, ортогональний даним векторам. Скалярні добутки шуканого і даних векторів дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

(від третього рядка відняли суму перших двох рядків)

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x_1 = x_4 = 0, x_3 = -x_2 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & -x_2 & 0 \end{pmatrix}^T = x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Використовуючи умову $\|x\|=1$, одержимо: $\|x\|=|x_2|\sqrt{2}=1 \Rightarrow x_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Відповідь: $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T$, $x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T$.

Задача 3.2. Маючи базис простору $\mathbb{R}^4$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T, f_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Побудувати ортогональний (не обов'язково нормований) базис.

Розв'язання. Позначимо вектори шуканого ортогонального базису через g_1, g_2, g_3 . Візьмемо $g_1 = f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T$. Згідно з методом Грама-Шміда покладемо $\tilde{g}_2 = f_2 - \alpha g_1$, і коефіцієнт α знайдемо з умови ортогональності цього вектора до вектора g_1 :

$$(\tilde{g}_2, g_1) = 0 \Rightarrow (f_2 - \alpha g_1, g_1) = 0 \Rightarrow (f_2, g_1) - \alpha (g_1, g_1) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)} =$$

$$= \frac{\left(\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T \right)}{\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T \right)} = \frac{2}{3}.$$

Звідси

$$\tilde{g}_2 = f_2 - \frac{2}{3} g_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}^T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_2 = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}^T.$$

Зауважимо, що $(g_1, g_1) = 15, (g_2, g_2) = 11$.

Покладемо $\tilde{g}_3 = f_3 - \alpha g_1 - \beta g_2$. Коефіцієнти знайдемо з умови ортогональності цього вектора векторам g_1 і g_2 . При цьому враховуємо, що $(g_2, g_1) = 0$.

$$\begin{cases} (f_3, g_1) - \alpha(g_1, g_1) = 0, \\ (f_3, g_2) - \beta(g_2, g_2) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{(f_3, g_1)}{(g_1, g_1)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}, \\ \beta = \frac{(f_3, g_2)}{(g_2, g_2)} = \frac{30}{111} = \frac{10}{37}. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{aligned} \tilde{g}_3 &= f_3 - \alpha g_1 - \beta g_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T - \frac{10}{37} \begin{pmatrix} 10 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}^T = \\ &= \frac{1}{185} \left(185 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 74 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T - 50 \begin{pmatrix} 10 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}^T \right) = \\ &= -\frac{1}{185} \begin{pmatrix} 19 & -87 & -61 & 72 \end{pmatrix}^T. \end{aligned}$$

Покладемо $g_3 = \begin{pmatrix} 19 & -87 & -61 & 72 \end{pmatrix}^T$.

Наступний крок полягає в знаходженні вектора, ортогонального трьом знайденим попарно ортогональним векторам. Інакше кажучи, треба доповнити знайдену ортогональну систему до ортогонального базису. Нехай $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ - шуканий вектор. Знайдемо його координати з умови його ортогональності кожному з векторів системи $\{g_1, g_2, g_3\}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 10x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 19x_1 - 87x_2 - 61x_3 + 72x_4 = 0. \end{cases} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 10 & -1 & 1 & -3 \\ 19 & -87 & -61 & 72 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -21 & -9 & -33 \\ 0 & -125 & -80 & 15 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & 11 \\ 0 & -25 & -16 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 175 & 75 & 275 \\ 0 & -175 & -112 & 21 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -37 & 296 \end{pmatrix} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 11 \\ 0 & 7 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 14 & 0 & 77 \\ 0 & -14 & 0 & -70 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_4, \\ x_2 = -5x_4, \\ x_3 = 8x_4. \end{cases}$$

Якщо покласти $x_4 = -1$, одержимо $g_4 = (1 \ 5 \ -8 \ -1)^T$.

Відповідь: ортогональний базис (один з можливих):

$$g_1 = (1 \ 2 \ 1 \ 3)^T, g_2 = (10 \ -1 \ 1 \ -3)^T, (19 \ -87 \ -61 \ 72)^T, \\ g_4 = (1 \ 5 \ -8 \ -1)^T.$$

3.2. Метод ортогоналізації Грама-Шмідта.

Задача 3.3. Знайти ортонормовану фундаментальну систему розв'язків лінійної системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Застосуємо метод Гауса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & -7 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_2 - x_4, \\ x_3 = \frac{7}{2}x_2 - 2x_4. \end{cases}$$

Звідси розв'язок системи записується у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x_2 - x_4 \\ x_2 \\ \frac{7}{2}x_2 - 2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Застосуємо метод Грама-Шмідта побудови ортогональної системи, виходячи з фундаментальної системи розв'язків $f_1 = (1 \ 0 \ 2 \ -1)^T$, $f_2 = (3 \ 2 \ 7 \ 0)^T$.

Покладемо $g_1 = f_1 = (1 \ 0 \ 2 \ -1)^T$ і будемо шукати вектор, ортогональний цьому вектору, у вигляді $\tilde{g}_2 = f_2 - \alpha g_1 = (3 \ 2 \ 7 \ 0)^T - \alpha(1 \ 0 \ 2 \ -1)^T$.

Коефіцієнт α знайдемо з умови ортогональності $\tilde{g}_2$ і g_1 : $\alpha = \frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)} =$

$$\alpha = \frac{\left((3 \ 2 \ 7 \ 0)^T, (1 \ 0 \ 2 \ -1)^T\right)}{\left((1 \ 0 \ 2 \ -1)^T, (1 \ 0 \ 2 \ -1)^T\right)^2} = \frac{17}{6}.$$

Звідси

$$\tilde{g}_2 = f_2 - \frac{17}{6}g_1 = (3 \ 2 \ 7 \ 0)^T - \frac{17}{6}(1 \ 0 \ 2 \ -1)^T = \frac{1}{6}(1 \ 12 \ 8 \ 17)^T$$

Тепер можна вибрати $g_2 = (1 \ 12 \ 8 \ 17)^T$.

Для того, щоб одержати ортонормовану фундаментальну систему, треба кожен з одержаних векторів поділити на власну норму. В результаті одержимо:

$$e_1 = \frac{1}{\|g_1\|} g_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} (1 \ 0 \ 2 \ -1)^T, e_2 = \frac{1}{\|g_2\|} g_2 = \frac{1}{\sqrt{498}} (1 \ 12 \ 8 \ 17)^T.$$

Задача 3.4. Знайти 1) ортогональний базис підпростору $E^{(1)}$, породженого векторами $f_1 = (1 \ 1 \ 3 \ 0)^T$, $f_2 = (2 \ 1 \ 1 \ -1)^T$;

2) ортогональний базис ортогонального доповнення $E^{(2)}$;

3) знайти ортогональні проекції вектору $a = (5 \ 2 \ -2 \ 2)^T$ на підпростори $E^{(1)}$ і $E^{(2)}$ і подати його як суму цих проекцій.

Розв'язання. 1). Використовуючи метод Грама-Шміда, знайдемо ортогональний базис $\{g_1, g_2\}$ у підпросторі $E^{(1)}$, поклавши

$g_1 = f_1 = (1 \ 1 \ 3 \ 0)^T \Rightarrow (g_1, g_1) = 11$. Тоді $\tilde{g}_2 = f_2 - \alpha g_1$, і коефіцієнт α знайдемо з умови ортогональності цього вектора до вектора g_1 :

$$(\tilde{g}_2, g_1) = 0 \Rightarrow (f_2 - \alpha g_1, g_1) = 0 \Rightarrow (f_2, g_1) - \alpha (g_1, g_1) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)}.$$

$$\text{Маємо: } \alpha = \frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)} = \frac{((2 \ 1 \ 1 \ -1)^T, (1 \ 1 \ 3 \ 0)^T)}{((1 \ 1 \ 3 \ 0)^T, (1 \ 1 \ 3 \ 0)^T)} = \frac{6}{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{g}_2 = f_2 - \alpha g_1 = f_2 - \frac{6}{11}(1 \ 1 \ 3 \ 0)^T =$$

$$= \frac{1}{11}(11(2 \ 1 \ 1 \ -1)^T - (6 \ 6 \ 18 \ 0)^T) = \frac{1}{11}(16 \ 5 \ -7 \ -11)^T.$$

Тепер покладемо: $g_2 = (16 \ 5 \ -7 \ -11)^T = (g_2, g_2) = 451$.

Знайдемо базис $\{h_1, h_2\}$ у підпросторі $E^{(2)}$, ортогональному до $E^{(1)}$. Координати цих векторів знайдемо з системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 16x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 11x_4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 16 & 5 & -7 & -11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 11 & 0 & -22 & -11 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 - 3x_3, \\ x_4 = x_1 - 2x_3. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 - 3x_3 \\ x_3 \\ x_1 - 2x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Одержали фундаментальну систему розв'язків лінійної системи

$$s_1 = (1 \ -1 \ 0 \ 1)^T, s_2 = (0 \ -3 \ 1 \ -2)^T,$$

які належать $E^{(2)}$, ортогональному доповненню до $E^{(1)}$. Легко бачити, що ця система неортогональна. Ортогоналізуємо її, поклавши $h_1 = s_1 = (1 \ -1 \ 0 \ 1)^T \Rightarrow (h_1, h_1) = 3$. Тоді $\tilde{h}_2 = s_2 - \alpha h_1$, і коефіцієнт α знайдемо з умови ортогональності цього вектора до вектора h_1 :

$$\alpha = \frac{\left((0 \ -3 \ 1 \ -2)^T, (1 \ -1 \ 0 \ 1)^T\right)}{(h_1, h_1)} = \frac{1}{3}.$$

Звідси

$$\begin{aligned}\tilde{h}_2 &= s_2 - \alpha h_1 = (0 \ -3 \ 1 \ -2)^T - \frac{1}{3}(1 \ -1 \ 0 \ 1)^T = \\ &= \frac{1}{3}((0 \ -9 \ 3 \ -6)^T - (1 \ -1 \ 0 \ 1)^T) = \frac{1}{3}(-1 \ -8 \ 3 \ -7)^T.\end{aligned}$$

Покладемо: $h_2 = (-1 \ -8 \ 3 \ -7)^T \Rightarrow (h_2, h_2) = 123$. Отже, вектори $\{g_1, g_2, h_1, h_2\}$ утворюють базис простору. Розкладемо за цим базисом даний за умовою вектор $a = (5 \ 2 \ -2 \ 2)^T$:

$$a = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2.$$

Для знаходження коефіцієнтів розкладу треба помножити рівність за чергою на всі базисні вектори:

$$\begin{aligned}a &= \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 \\ (a, g_1) &= \beta_1 (g_1, g_1) \Rightarrow \beta_1 = \frac{(a, g_1)}{(g_1, g_1)} = \frac{\left((5 \ 2 \ -2 \ 2)^T, (1 \ 1 \ 3 \ 0)^T\right)}{11} = \frac{1}{11},\end{aligned}$$

$$\beta_2 = \frac{(a, g_2)}{(g_2, g_2)} = \frac{\left((5 \ 2 \ -2 \ 2)^T, (16 \ 5 \ -7 \ -11)^T\right)}{451} = \frac{82}{451},$$

$$\gamma_1 = \frac{(a, h_1)}{(h_1, h_1)} = \frac{\left((5 \ 2 \ -2 \ 2)^T, (1 \ -1 \ 0 \ 1)^T \right)}{3} = \frac{5}{3},$$

$$\gamma_2 = \frac{(a, h_2)}{(h_2, h_2)} = \frac{\left((5 \ 2 \ -2 \ 2)^T, (-1 \ -8 \ 3 \ -7)^T \right)}{123} = -\frac{41}{123}.$$

Отже,

$$a = \frac{1}{11}g_1 + \frac{82}{451}g_2 + \frac{5}{3}h_1 + \frac{41}{123}h_2 =$$

$$\begin{aligned} \text{Зауважимо, що } a^{(1)} &= \frac{1}{11}g_1 + \frac{82}{451}g_2 = \frac{1}{11}(1 \ 1 \ 3 \ 0)^T + \frac{82}{451}(16 \ 5 \ -7 \ -11)^T = \\ &= \frac{1}{451}(41(1 \ 1 \ 3 \ 0)^T + 82(16 \ 5 \ -7 \ -11)^T) = \frac{1}{451}(1353 \ 451 \ -451 \ -902)^T = \end{aligned}$$

$$= (3 \ 1 \ -1 \ -2)^T - \text{це ортогональна проекція вектора } a \text{ на підпростір } E^{(1)}.$$

Знайдемо проекцію цього вектора на ортогональний до нього підпростір $E^{(2)}$:

$$\begin{aligned} a^{(2)} &= \frac{5}{3}(1 \ -1 \ 0 \ 1) - \frac{41}{123}(-1 \ -8 \ 3 \ -7)^T = \\ &= \frac{1}{123}(205(1 \ -1 \ 0 \ 1)^T + 41(1 \ 8 \ -3 \ 7)^T) = (2 \ 1 \ -1 \ 4)^T. \end{aligned}$$

$$\text{Перевірка: } (5 \ 2 \ -2 \ 2)^T = (3 \ 1 \ -1 \ -2)^T + (2 \ 1 \ -1 \ 4)^T.$$

Задача 3.5. Для векторів $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$, $y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)^T$ довести тотожність Лагранжа:

$$\begin{aligned} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) = \\ = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + \dots + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1})^2. \end{aligned}$$

З нього вивести нерівність Коші-Буняковського

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}.$$

Зауваження. Цю рівність можна записати у такому вигляді:

$$\|x\|^2 \|y\|^2 = (x, y)^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2 + \dots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{vmatrix}^2.$$

Доведення. Маємо:

$$\begin{aligned} & (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + \dots + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1})^2 = \\ & = x_1^2y_1^2 + \dots + x_n^2y_n^2 + 2x_1y_1x_2y_2 + \dots + 2x_{n-1}y_{n-1}x_ny_n + \\ & + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2x_1y_2x_2y_1 + \dots + x_{n-1}^2y_n^2 + x_n^2y_{n-1}^2 - 2x_{n-1}y_nx_ny_{n-1} = \\ & = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + \dots + x_{n-1}^2y_{n-1}^2 + x_n^2y_n^2 + x_{n-1}^2y_n^2 + x_n^2y_{n-1}^2 = \\ & = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2), \end{aligned}$$

що й треба було довести. Зауваження, що $(x_1y_2 - x_2y_1)^2 + \dots + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1})^2 \geq 0$

доводить нерівність Коші-Буняковського. Легко бачити, що

$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 + \dots + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1})^2 = 0$ тоді і тільки тоді, коли координати двох векторів пропорційні або хоча б один з них нульовий. Інакше кажучи, рівність в нерівності Коші-Буняковського має місце тоді і тільки тоді, коли вектори лінійно залежні.

3). Завдання для самостійної роботи: [9], №№ 1077, 1055, 1087, 1092.

4. Практичне заняття II.4. Ортогональні підпростори, ортогональна проекція вектора на підпростір

Задача 4.1. Знайти проекції напрямного вектора прямої, що має рівняння $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ на осі координат.

Розв'язання. Напрямний вектор прямої має координати $l = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$. Його норма дорівнює: $\|l\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + \dots + 1^2} = \sqrt{n}$. Величина проекції вектора l на вісь з напрямним вектором $e_k = (0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)^T$ (одиниця на k -му місці) дорівнює:

$$p_{e_k}(l) = \frac{1}{\sqrt{n}}(l, e_k) = \frac{1}{\sqrt{n}}((1 \ 1 \ \dots \ 1)^T, (0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)^T) = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Задача 4.2. Знайти проекцію вектора $x(0; 2; 3; 2)^T$ на підпростір розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 - x_4, \\ x_2 = -2x_3. \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - x_4 \\ -2x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Підпростір L розв'язків лінійної системи має базис (неортогональний)

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

який є її системою фундаментальних розв'язків.

Далі нам стануть у пригоді значення:

$$(f_1, f_1) = 6, (f_1, f_2) = -1, (f_2, f_2) = 2, (x, f_1) = -1, (x, f_2) = 2.$$

Знайдемо значення α_1, α_2 , при яких вектор $h = x - \alpha_1 f_1 - \alpha_2 f_2$ буде

ортогональним до базисних векторів f_1, f_2 підпростору. Для цього помножимо

скалярно обидві частини цієї рівності на базисні вектори і кожен добуток

прирівняємо до нуля:

$$\begin{cases} (x, f_1) - \alpha_1(f_1, f_1) - \alpha_2(f_2, f_1) = 0, \\ (x, f_2) - \alpha_1(f_1, f_2) - \alpha_2(f_2, f_2) = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 6\alpha_1 + \alpha_2 = -1, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{3}{7}, \\ \alpha_2 = \frac{11}{7}. \end{cases}$$

Отже, проекція вектора x на підпростір L розв'язків лінійної системи дорівнює

$$P_L(x) = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = -\frac{3}{7}(1; -2; 1; 0)^T + \frac{11}{7}(-1; 0; 0; 1)^T = \frac{1}{7}(-14; 6; -3; 11)^T.$$

Вектор, що проектує вектор x на підпростір L , дорівнює:

$$h = x - P_L(x) = (0; 2; 3; 2)^T - \frac{1}{7}(-14; 6; -3; 11)^T = \frac{1}{7}(14; 8; 24; 3)^T, \|h\| = \frac{13}{7}\sqrt{5}.$$

Задача 4.3. Знайти відстань від точки $M(1; 2; -1; 1)$ до гіперплощини

$$\Pi_0 = \{f_0 + t_1 f_1 + t_2 f_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}, \text{ де}$$

$$f_0 = (0 \quad -1 \quad 1 \quad 1)^T, f_1 = (0 \quad -3 \quad -1 \quad 5)^T, f_2 = (4 \quad -1 \quad -3 \quad 3)^T.$$

Розв'язання. Точці $M(1; 2; -1; 1)$ відповідає радіус-вектор $r_0 = (1 \quad 2 \quad -1 \quad 1)^T$.

Досить знайти проекцію вектора $P_\Pi(r_0 - f_0)$ на лінійний підпростір

$$\Pi = \{t_1 f_1 + t_2 f_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}\},$$

$$r_0 - f_0 = (1 \quad 2 \quad -1 \quad 1)^T - (0 \quad -1 \quad 1 \quad 1)^T = (1 \quad 3 \quad -2 \quad 0)^T.$$

Тоді норма вектора

$$h = (1 \quad 3 \quad -2 \quad 0)^T - \alpha_1(0 \quad -3 \quad -1 \quad 5)^T - \alpha_2(4 \quad -1 \quad -3 \quad 3)^T. \text{ буде шуканою}$$

відстанню. Очевидно, $P_\Pi(r_0 - f_0) = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ і $(h, f_1) = (h, f_2) = 0$. Маємо:

$$(h, f_1) = ((1; 3; -2; 0) - \alpha_1(0; -3; -1; 5) - \alpha_2(4; -1; -3; 3), (0; -3; -1; 5)) = 0,$$

$$(h, f_2) = ((1; 3; -2; 0) - \alpha_1(0; -3; -1; 5) - \alpha_2(4; -1; -3; 3), (4; -1; -3; 3)) = 0.$$

Звідси одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5\alpha_1 + 3\alpha_2 = -1, \\ 3\alpha_1 + 5\alpha_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{2}, \alpha_2 = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$h = (1; 3; -2; 0) + \frac{1}{2}(0; -3; -1; 5) - \frac{1}{2}(4; -1; -3; 3) = (-1; 2; -1; 1) \Rightarrow \|h\| = \sqrt{7}.$$

Задача 4.4. Нехай $g = \{g_1, g_2, \dots, g_n\} \subset \mathbb{R}^n$. Довести, що сума квадратів проєкцій цих векторів на довільний одновимірний підпростір дорівнює 1 тоді і тільки тоді, коли $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ - ортонормований базис.

Доведення. Необхідність цієї умови було доведено в [2], стор. 34, Зауваження.

Доведемо його достатність. Візьмемо довільний орт $x \in \mathbb{R}^n$, спроекуємо на лінійний підпростір, породжений їм, вектори системи і скористуємось рівністю (4.5) [2]:

$$\begin{aligned} (x_1 g_{11} + x_2 g_{21} + \dots + x_n g_{n1})^2 + \dots + (x_1 g_{1n} + x_2 g_{2n} + \dots + x_n g_{nn})^2 = \\ = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1 \end{aligned}$$

Ця рівність справедлива для довільного вектора $x \in \mathbb{R}^n$. Тому, підставляючи $x = e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $j = 1, \dots, n$, одержимо:

$$\sum_{k=1}^n g_{jk}^2 = 1, j = 1, \dots, n.$$

Підносячи вирази в лівій частині до квадрати, отримаємо:

$$\sum_{j=1}^n x_j^2 \sum_{k=1}^n g_{jk}^2 + 2 \sum_{i \neq j} x_i x_j (g_{i1} g_{j1} + \dots + g_{in} g_{jn}) = x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

З доведеного $x_j^2 \sum_{k=1}^n g_{jk}^2 = x_j^2$, звідки $\sum_{i \neq j} x_i x_j (g_{i1} g_{j1} + \dots + g_{in} g_{jn}) = 0$.

Підставляючи, наприклад, $x_i = x_j = 0 \forall i, j \neq k, i, j \neq l, x_k = x_l = \frac{1}{\sqrt{2}}, k \neq l$, одержимо:

$$g_{k1}g_{l1} + \dots + g_{kn}g_{ln} = 0.$$

Як було показано в [2], стор. 34, 35 такі властивості ортогональності мають водночас вектори-рядки і вектори-стовпчики матриці G .

Це й доводить ортонормованість базису $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$.

4). Завдання для самостійної роботи: [7], 1370, 1374, 1406, [9], №№ 1091.

5. Практичне заняття П.5. Власні числа та вектори лінійного оператора. Характеристичний многочлен матриці оператора як інваріант.

Теоретичні відомості

Означення 5.1. Число $\lambda \in K$ називається власним числом оператора A , якщо існує ненульовий вектор x такий, що $Ax = \lambda x$. x називається власним вектором, що відповідає власному числу λ .

Зауваження. Ця рівність еквівалентна рівності $(A - \lambda I)x = 0$.

Характеристичний многочлен матриці:

$$\chi(\lambda, A) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^n + A_1 \lambda^{n-1} + \dots + A_k \lambda^{n-k} + \dots + A_n =$$

$$= \lambda^n - Sp(A) \lambda^{n-1} + (-1)^k \left(\sum_{i_1 \dots i_k} M_{i_1 \dots i_k}^{i_1 \dots i_k} \right) \lambda^{n-k} + \dots + (-1)^n \det(A).$$

Тут позначено через $M_{i_1 \dots i_k}^{i_1 \dots i_k}$, $i_1 < \dots < i_k$ головний мінор, на діагоналі якого знаходяться елементи $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$, $i_1 < \dots < i_k$.

Теорема 5.1. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ є власним для матриці оператора A тоді і лише тоді,

Коли воно є коренем характеристичного многочлена оператора.

Теорема 5.2. Власні вектори, що відповідають різним власним числам, лінійно незалежні.

Означення 5.3. Число λ називається регулярним числом оператора A , якщо Оператор $\lambda I - A$ невироджений, тобто, має обернений.

Задача 5.1. Знайти власні числа і власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - (3+1+4)\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \right) \lambda - \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5.$$

Знайдемо власні вектори, що відповідають знайденим власним числам.

1). $\lambda_1 = 1$.

$$(I - A)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x_2 = x_1, x_3 = -x_2 = -x_1.$$

Власний підпростір матриці, що відповідає власному числу $\lambda_1 = 1$, породжується базисним вектором, наприклад, $f_1 = (1; 1; -1)^T$.

2). $\lambda_2 = 2$.

$$(2I - A)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = -4x_1, x_3 = \frac{3}{2}x_2 = -6x_1.$$

Власний підпростір матриці, що відповідає власному числу $\lambda_1 = 2$, породжується базисним вектором, наприклад, $f_2 = (1; -4; -6)^T$.

2). $\lambda_2 = 5$.

$$(5I - A)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 8 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 9 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x_1 = x_2, x_3 = 3x_2.$$

Власний підпростір матриці, що відповідає власному числу $\lambda_1 = 5$, породжується базисним вектором, наприклад, $f_3 = (1; 1; 3)^T$.

Як відомо, власні вектори, що відповідають різним власним числам, лінійно незалежні. Оскільки одержано три лінійно незалежних власних вектори, то в трьохвимірному просторі вони утворюють базис.

Задача 5.2. Знайти власні числа і власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - (1+1+2)\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) \lambda - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 2.$$

Знайдемо власні вектори, що відповідають знайденим власним числам.

1). $\lambda_{1,2} = 1$.

$$(I - A)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = x_1, x_2 = x_3 = x_1.$$

Власний підпростір матриці, що відповідає власному числу $\lambda_1 = 1$, породжується базисним вектором, наприклад, $f_1 = (1; 1; 1)^T$.

Треба звернути увагу на те, що кратність кореня характеристичного рівняння не завжди співпадає з розмірністю власного підпростору, що відповідає цьому власному числу.

2). $\lambda_3 = 2$.

$$(2I - A)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x_2 = 0, x_3 = x_1.$$

Власний підпростір матриці, що відповідає власному числу $\lambda_3 = 2$, породжується базисним вектором, наприклад, $f_1 = (1; 0; 1)^T$.

Ще раз зазначимо, що власні вектори даної матриці не утворюють базис. Систему цих векторів треба доповнювати до базису, що буде зроблено при вивченні нормальної форми Жордана матриці.

Нагадаємо, що власні вектори нормальної матриці (в частинному випадку – ермітової, тобто, матриці самоспряженого оператора, а також унітарної) утворюють базис, причому, завжди можна знайти ортогональний базис.

Задача 5.3. Знайти власні числа матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ y & 0 & x & \dots & x \\ y & y & 0 & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ y & y & y & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. З результату прикладу II.8 (Доповнення II) [1] маємо:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -x & -x & \dots & -x \\ -y & \lambda & -x & \dots & -x \\ -y & -y & \lambda & \dots & -x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -y & -y & -y & \dots & \lambda \end{vmatrix} = \frac{-y(\lambda + x)^n + x(\lambda + y)^n}{x - y} = 0 \Rightarrow$$

$$-y(\lambda + x)^n + x(\lambda + y)^n = 0 \Rightarrow y(\lambda + x)^n = x(\lambda + y)^n \Rightarrow \frac{\lambda + x}{\lambda + y} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}.$$

Позначимо $\frac{x}{y} = a^n, a \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = a \left(\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1.$

Позначимо також $\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, \dots, n-1.$ Звідси

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_k + x}{\lambda_k + y} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = a\varepsilon_k &\Rightarrow \lambda_k + x = a\varepsilon_k \lambda_k + ya\varepsilon_k \Rightarrow (1 - a\varepsilon_k) \lambda_k = ya\varepsilon_k - x \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda_k &= \frac{ya\varepsilon_k - x}{1 - a\varepsilon_k} = ay \frac{\varepsilon_k - a^{n-1}}{1 - a\varepsilon_k}, k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Задача 5.4. Знайти власні числа матриці

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Маємо:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Використаємо доведений факт [1]

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & -\alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \alpha + \beta & -\alpha\beta & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \alpha + \beta & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha + \beta \end{vmatrix} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \quad \forall \alpha \neq \beta.$$

Покладемо

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \lambda, \\ \alpha\beta = 1. \end{cases}$$

Власні числа знаходяться із співвідношення

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt[n+1]{1} = \cos \frac{2\pi k}{n+1} + i \sin \frac{2\pi k}{n+1}, k = 1, \dots, n.$$

Зауважимо, що серед вписаних коренів немає того, що відповідає $k=0$, оскільки за умовою $\beta \neq \alpha$.

Звідси і з умови $\alpha\beta=1$ випливає:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2}{\alpha\beta} = \alpha^2 = \cos \frac{2\pi k}{n+1} + i \sin \frac{2\pi k}{n+1}, k=1, \dots, n.$$

Звідси

$$\alpha = \pm \left(\cos \frac{\pi k}{n+1} + i \sin \frac{\pi k}{n+1} \right),$$

$$\beta = \pm \left(\cos \frac{\pi k}{n+1} - i \sin \frac{\pi k}{n+1} \right).$$

Зауважимо, що треба брати однакові знаки перед дужками, оскільки, $\alpha\beta=1$.

Звідси $\lambda_k = \pm 2 \cos \frac{\pi k}{n+1}, k=1, \dots, n$. Помітимо, що тут двічі повторюються

однакові значення, оскільки

$$-\cos \frac{\pi k}{n+1} = \cos \left(\pi - \frac{\pi k}{n+1} \right) = \cos \left(\frac{\pi(n+1-k)}{n+1} \right), k=1, \dots, n.$$

Отже, знайдено власні числа матриці: $\lambda_k = 2 \cos \frac{\pi k}{n+1}, k=1, \dots, n$.

Задача 5.5. Знайти власні числа матриці

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_1 & \alpha_1 \beta_2 & \dots & \alpha_1 \beta_{n-1} & \alpha_1 \beta_n \\ \alpha_2 \beta_1 & \alpha_2 \beta_2 & \dots & \alpha_2 \beta_{n-1} & \alpha_2 \beta_n \\ . & . & \dots & . & . \\ \alpha_{n-1} \beta_1 & \alpha_{n-1} \beta_2 & \dots & \alpha_{n-1} \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \beta_n \\ \alpha_n \beta_1 & \alpha_n \beta_2 & \dots & \alpha_n \beta_{n-1} & \alpha_n \beta_n \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Коефіцієнти характеристичного многочлена, починаючи з третього (при λ^{n-2}) – це суми головних мінорів матриці. Зрозуміло, що в таких мінорах вектори-стовпчики пропорційні, тому вони всі дорівнюють нулю.

Отже, характеристичний многочлен має вигляд:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n - Sp(A)\lambda^{n-1} = \lambda^{n-1}(\lambda - Sp(A)) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2,\dots,n-1} = 0, \lambda_n = Sp(A) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k.$$

Знайдемо власні вектори, що відповідають знайденим власним числам.

1). $\lambda = 0 \Rightarrow Ax = 0$. Розв'язуємо систему методом Гауса, вважаючи, що існує $\alpha_j \neq 0$ (інакше матриця була б нульовою):

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_1 & \alpha_1 \beta_2 & \dots & \alpha_1 \beta_{n-1} & \alpha_1 \beta_n \\ \alpha_2 \beta_1 & \alpha_2 \beta_2 & \dots & \alpha_2 \beta_{n-1} & \alpha_2 \beta_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n-1} \beta_1 & \alpha_{n-1} \beta_2 & \dots & \alpha_{n-1} \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \beta_n \\ \alpha_n \beta_1 & \alpha_n \beta_2 & \dots & \alpha_n \beta_{n-1} & \alpha_n \beta_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_1 & \alpha_1 \beta_2 & \dots & \alpha_1 \beta_{n-1} & \alpha_1 \beta_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \alpha_j \beta_1 & \alpha_j \beta_2 & \dots & \alpha_j \beta_{n-1} & \alpha_j \beta_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n = 0$$

Це означає, що у підпросторі векторів, координати яких задовольняють цьому лінійному рівнянню, довільна лінійно незалежна сукупність векторів породжує базис підпростору власних векторів матриці.

2). $\lambda = Sp(a)$, якщо $Sp(a) \neq 0$.

Оскільки кратність цього кореня дорівнює 1, підпростір власних векторів, що йому відповідають, одновимірний. Розглянемо j -у координату вектора $(A - Sp(a)I)x$, яка повинна дорівнювати нулю.

Оскільки, як було помічено, підпростір власних векторів, що відповідають власному числу $\lambda = Sp(a) \neq 0$, одновимірний, досить знайти лише один вектор $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)^T$, координати якого задовольняють попередньому рівнянню.

Легко бачити, що йому задовольняє вектор $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)^T = (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)^T$.

Задача 5.6. Нехай $P(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \dots + a_{m-1} t + a_m$ - многочлен (поліном). Нехай $Ax = \lambda x$. Довести, що $P(\lambda)$ - власне число оператора $P(A)$, і йому відповідає той самий власний вектор.

Доведення. Якщо $Ax = \lambda x$, то $A^2 x = A(Ax) = \lambda Ax = \lambda^2 x, \dots, A^k x = \lambda^k x$. Тоді

$$P(A)x = a_0 A^m x + a_1 A^{m-1} x + \dots + a_{m-1} Ax + a_m Ix = (a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m) x = P(\lambda)x.$$

Задача 5.7. Знайти власні числа матриці-циркулянта

$$C_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, матриця діє на вектори $e_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ канонічного базису за формулою $C_n e_k = e_{k+1} \Rightarrow C_n^l e_k = e_{k+l}$, звідки випливає, що $C_n^n = I$. Звідси робимо висновок, що власні числа циркулянта є коренями рівняння $t^n = 1$. Позначимо $\varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi}{n}i\right)$. Подіємо матрицею на вектор $u_l = \sum_{k=1}^n \varepsilon^{kl} e_k$:

$$C_n u_l = \sum_{k=1}^n \varepsilon^{kl} C_n e_k = \sum_{k=1}^n \varepsilon^{kl} e_{k+1} = \sum_{k=1}^n \varepsilon^{-l} \varepsilon^{(k+1)l} e_{k+1} = \varepsilon^{-l} \sum_{k=1}^n \varepsilon^{(k+1)l} e_{k+1} = \varepsilon^{-l} u_l.$$

Наслідок. Нехай $\varepsilon_k = \exp\left(\frac{2\pi k}{n}i\right), k = 0, 1, \dots, n-1$ - корені з одиниці. Розглянемо многочлен $Q(t) = b_1 t^{n-1} + b_2 t^{n-2} + \dots + b_{n-1} t + b_n$. Тоді $Q(\varepsilon_0), \dots, Q(\varepsilon_{n-1})$ - власні числа циркулянта $Q(C_n) = b_1 C_n^{n-1} + b_2 C_n^{n-2} + \dots + b_{n-1} C_n + b_n I$.

Доведення. З результату, одержаному в задачі 5.7,

$\varepsilon_k = \exp\left(\frac{2\pi k}{n}i\right), k = 0, 1, \dots, n-1$ - власні числа циркулянта C_n . Тоді з твердження

задачі 5.6 випливає справедливність даного твердження.

Теорема 5.3. Нехай μ - власне число матриці:

$$Ax = \mu x, x \neq 0 \Rightarrow \chi(\mu, A) = \det(\mu I - A) = 0.$$

Нехай $g(\gamma) \triangleq \frac{\chi(\gamma, A)}{\gamma - \mu}$. Тоді довільний вектор-стовпчик матриці-полінома $g(A)$

є власним вектором, що відповідає власному числу μ .

Доведення. По-перше, пояснимо, що $g(\gamma)$ - поліном. Це випливає з теореми Безу: $\chi(\gamma, A) - \chi(\mu, A) = \chi(\gamma, A)$ ділиться на $\gamma - \mu$ без остачі. Звідси $\chi(\gamma, A) = (\gamma - \mu)g(\gamma)$, і за теоремою Гамільтона-Келі

$$\chi(A, A) = (A - \mu I)g(A) = 0.$$

З правила множення матриць випливає, що при множенні матриці $A - \mu I$ на довільний ненульовий стовпчик матриці $g(A)$ одержуємо нуль-стовпчик (якщо помножимо на нульовий стовпчик цієї матриці, все рівно одержуємо нуль-стовпчик). Це й говорить, що кожен вектор-стовпчик матриці $g(A)$ є власним вектором матриці A , що відповідає власному числу μ .

Наслідок. Якщо μ - просте власне число матриці A , то всі ненульові стовпчики матриці $g(A)$ колінеарні, тобто, їхні координати пропорційні.

Дійсно, в цьому випадку $\dim \ker(A - \mu I) = 1$, підпростір власних векторів одновимірний, з чого і випливає справедливість твердження.

Зауважимо, що тоді і вектори-рядки матриці $g(A)$ теж колінеарні.

Задача 5.8. Не розв'язуючи систем лінійних рівнянь, знайти власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 22 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \\ 8 & 16 & -5 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо характеристичний многочлен матриці і її власні числа:

$$\chi(\lambda, A) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 3)(\lambda + 2)(\lambda + 1).$$

1). $\lambda_1 = 3$. Звідси $g_1(\lambda) = \frac{\chi(\lambda, A)}{\lambda - 3} = (\lambda + 2)(\lambda + 1) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$. Тоді

$$g_1(A) = \begin{pmatrix} 40 & 80 & -20 \\ 0 & 0 & 0 \\ 40 & 80 & -20 \end{pmatrix}.$$

Власний вектор $f_1 = (1; 0; 1)^T$.

2). $\lambda_2 = -2$. Звідси $g_2(\lambda) = \frac{\chi(\lambda, A)}{\lambda + 2} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$. Тоді

$$g_2(A) = \begin{pmatrix} -10 & -30 & 10 \\ 5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Власний вектор $f_2 = (-2; 1; 0)^T$.

3). $\lambda_3 = -1$. Звідси $g_3(\lambda) = \frac{\chi(\lambda, A)}{\lambda + 1} = (\lambda - 3)(\lambda + 2) = \lambda^2 - \lambda - 6$. Тоді

$$g_3(A) = \begin{pmatrix} -4 & -8 & 4 \\ 4 & 8 & -4 \\ 8 & 16 & -8 \end{pmatrix}.$$

Власний вектор $f_3 = (-1; 1; 2)^T$.

Задача 5.9. Знайти характеристичний і мінімальний многочлени матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda - 1) + (\lambda - 2) = \\ &= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda - 2)^3. \end{aligned}$$

Отже, знайдено характеристичний многочлен: $\chi(\lambda) = (\lambda - 2)^3$.

Оскільки $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$, многочлен $\lambda - 2$ не є характеристичним.

Знайдемо $(A - 2I)^2$:

$$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $P_2(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ - мінімальний.

5). Завдання для самостійної роботи: [9], №№ 1032, 1034, 1036.

6. Практичне заняття П.6. Спряжений оператор та його матриця.

Самоспряжені оператори. Полярний розклад.

Теоретичні відомості.

Лінійний простір лінійних операторів $A: E_n \rightarrow E_m$ будемо позначать $L(E_n, E_m)$.

Якщо $A \in L(E_n, E_m)$, то $A^* \in L(E_m, E_n)$ і

$$(y, Ax)_m = (A^* y, x)_n$$

Властивості спряження: $(AB)^* = B^* A^*$, $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Самоспряжений оператор: $A: E_n \rightarrow E_n, A^* = A$.

Матриця спряженого оператора у ортогональному базисі має властивість:

$$a_{jk}^* = \overline{a_{kj}}, \quad k = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Означення 6.1. Число $\lambda \in K$ називається власним числом оператора A , якщо існує ненульовий вектор x такий, що $Ax = \lambda x$. x називається власним вектором, що відповідає власному числу λ .

Зауваження. Ця рівність еквівалентна рівності $(A - \lambda I)x = 0$.

Число є власним для лінійного оператора тоді і тільки тоді, коли воно є коренем характеристичного многочлена

$$\chi(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

Твердження 6.1. Якщо деякий підпростір унітарного простору інваріантний відносно лінійного оператора, то його ортогональне доповнення інваріантне відносно оператора, спряженого до даного.

Означення 6.2. Лінійний оператор $V \in L(E, E)$ називається ізометричним, якщо $(Vx, Vy) = (x, y)$.

Означення 6.3. Якщо ізометричний оператор переводить весь простір на весь простір і є ізометричним, то він називається унітарним.

Означення 6.4. Оператор, що діє в унітарному просторі називається нормальним, якщо він комутує зі своїм спряженим:

$$AA^* = A^*A.$$

Задача 6.1. Нехай відома матриця лінійного оператора у неортогональному базисі і відома матриця Грама цього базиса. Знайти матрицю оператора, спряженого до даного.

Розв'язання. Нехай $[A]_{ff}$ - матриця оператора у неортогональному базисі $f = \{f_1, f_2, \dots, f_n\} \subset \mathbb{R}^n$; G_f - матриця Грама цієї системи векторів, яка, як відомо, симетрична. Нагадаємо, що скалярний добуток векторів-стовпчиків у базисі f знаходиться за формулою:

$([x]_f, [y]_f) = [x]_f^T G_f [y]_f.$	(6.1)
---------------------------------------	-------

За означенням спряженого оператора

$$([A]_{ff} [x]_f, [y]_f) = ([x]_f, [A]_{ff}^* [y]_f).$$

За попередньою формулою цю рівність перепишемо у вигляді

$$\left([A]_{ff}[x]_f\right)^T G_f[y]_f = [x]_f G_f [A]_{ff}^* [y]_f \Leftrightarrow$$

$$[x]_f^T [A]_{ff}^T G_f [y]_f = [x]_f G_f [A]_{ff}^* [y]_f.$$

Оскільки рівність має місце тотожно при всіх $[x]_f, [y]_f \in \mathbb{R}^n$, одержуємо:

$G_f [A]_{ff}^* = [A]_{ff}^T G_f.$	(6.2)
------------------------------------	-------

Звідси знаходимо матрицю спряженого оператора у дійсному просторі:

$[A]_{ff}^* = (G_f)^{-1} [A]_{ff}^T G_f.$	(6.3)
---	-------

Задача 6.2. Знайти матрицю спряженого оператора до лінійного оператора

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

у неортогональному базисі, якщо відомо його матрицю Грама:

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Методом Гауса розв’яжемо матричне рівняння (6.2) відносно матриці спряженого оператора

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} [A]_{ff}^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -2 & 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & -3 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 5 & 3 & -4 \\ -2 & -1 & 2 & -3 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -7 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 & -1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right).$$

Відповідь: $[A]_{ff}^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$

Задача 6.3. Знайти матрицю спряженого оператора до лінійного оператора

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

у неортогональному базисі $f_1 = (1; 2; 1)^T$, $f_2 = (1; 1; 2)^T$, $f_3 = (1; 1; 0)^T$, якщо координати базисних векторів задано у канонічному базисі.

Розв'язання. Знайдемо матрицю Грама системи векторів, яка утворює даний базис простору:

$$G = \begin{pmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & (f_1, f_3) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & (f_2, f_3) \\ (f_3, f_1) & (f_3, f_2) & (f_3, f_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю спряженого оператора за формулою (6.3):

$$[A]_{ff}^* = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{pmatrix}.$$

Задача 6.4. Знайти ортонормований базис, в якому симетрична матриця лінійного оператора A

$$[A]_{ee} = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix},$$

задана в ортонормованому канонічному базисі, має діагональну форму.

Розв'язання. Знайдемо власні числа матриці, які є корені характеристичного рівняння:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 11 & -2 & 8 \\ -2 & \lambda - 2 & -10 \\ 8 & -10 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 18\lambda^2 - 81\lambda + 1458 = (\lambda - 9)(\lambda - 18)(\lambda + 9).$$

Тут випущено зрозумілі, але дещо громіздкі перетворення.

Знайдемо власні вектори оператора.

1). $\lambda_1 = 9$.

$$(A - 9I)x = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 18 & -36 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f_1 = x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g_1 = \left(\frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \right)^T, \|g_1\|=1.$$

2). $\lambda_2 = 18$.

$$(A - 18I) = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 2 & -16 & 10 \\ -8 & 10 & -13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{7} & \frac{8}{7} \\ 0 & -\frac{108}{7} & \frac{54}{7} \\ 0 & \frac{54}{7} & -\frac{27}{7} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f_2 = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow g_2 = \left(-\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \right)^T, \|g_2\|=1.$$

3). $\lambda_3 = -9$.

$$(A + 9I) = \begin{pmatrix} 20 & 2 & -8 \\ 2 & 11 & 10 \\ -8 & 10 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{10} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{54}{5} & \frac{54}{5} \\ 0 & \frac{54}{5} & \frac{54}{5} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$f_3 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow g_3 = \left(\frac{1}{3} \quad -\frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} \right)^T, \|g_3\|=1.$$

В ортогональному базисі

$$g_1 = \left(\frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \right)^T, g_2 = \left(-\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \right)^T, g_3 = \left(\frac{1}{3} \quad -\frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} \right)^T$$

власних векторів матриця оператора має діагональний вигляд з власними числами на діагоналі:

$$[A]_{gg} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Ортогональна матриця переходу від канонічному базису до базису з власних векторів оператора має вигляд

$$[U]_{eg} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

При цьому $\left([U]_{eg}\right)^{-1} [A]_{ee} [U]_{eg} = [A]_{gg}$.

Зауважимо, що визначник матриці переходу додатний, дорівнює 1 (перевірте!), тому базис з власних векторів має ту ж саму орієнтацію, що і канонічний.

Зауваження. Визначник ортогональної матриці може приймати одне із значень: 1 або -1.

Доведення. За означенням, якщо U - ортогональна, то

$$U^*U = 1 \Rightarrow \det(U^*U) = \det(U^*)\det U = (\det U)^2 = 1 \Rightarrow \det U = \pm 1.$$

Задача 6.5. Знайти квадратний корінь з матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Характеристичний многочлен матриці має вигляд:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4).$$

Знайдемо власні вектори матриці, що відповідають власним числам

$\lambda_{1,2} = 1, \lambda = 4$. Зауважимо, що в силу симетричності матриці її власні вектори, що відповідають різним власним числам, ортогональні. Власному числу $\lambda_{1,2} = 1$ відповідає пара лінійно незалежних векторів – базис цього власного підпростору.

1). $\lambda_{1,2} = 1$.

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Методом Грама-Шміда ортогоналізуємо одержану фундаментальну систему

Розв'язків $f_1 = (1; 0; -1)^T$, $f_2 = (0; 1; -1)^T$. Зауважимо:

$$(f_1, f_1) = 2, (f_2, f_2) = 2, (f_1, f_2) = 1.$$

Звідси, поклавши $\tilde{g}_1 = f_1 = (1; 0; -1)^T$, знайдемо один з ортогональних до нього

власних векторів: $\tilde{g}_2' = f_2 - \frac{(f_2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 = (0; 1; -1)^T - \frac{1}{2}(1; 0; -1)^T = \frac{1}{2}(-1; 2; -1)^T$.

Покладемо: $\tilde{g}_2 = (-1; 2; -1)^T$.

2). $\lambda_3 = 4$.

$$A - 4I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = x_2 = x_1.$$

Покладемо $\tilde{g}_3 = (1; 1; 1)^T$.

Отже, побудовано ортогональний базис простору $\mathbb{R}^3$, що складається з власних векторів даної в умові матриці:

$$g = \left\{ \tilde{g}_1 = (1; 0; -1)^T, \tilde{g}_2 = (-1; 2; -1)^T, \tilde{g}_3 = (1; 1; 1)^T \right\}.$$

Матриця переходу від канонічного базису до базису g має вигляд:

$$[V]_{eg} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обернена до неї:

$$[V]_{eg}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матриця, що є квадратним коренем з даної матриці A у базисі власних векторів g , який є також базисом власних векторів кореня з A , має вигляд:

$$[\sqrt{A}]_{gg} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } [\sqrt{A}]_{ee} &= [V]_{eg} [\sqrt{A}]_{gg} [V]_{eg}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Задача 6.6. Зобразити матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

У вигляді добутку симетричної і ортогональної матриць

Розв'язання. Маємо:

$$AA^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 6 & -12 \\ 6 & 33 & 6 \\ -12 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

Характеристичний многочлен:

$$\det(\lambda I - AA^*) = \lambda^3 - 81\lambda^2 + 1944\lambda - 11664 = (\lambda - 9)(\lambda - 36)^2.$$

Власні числа: $\lambda_1 = 9, \lambda_{2,3} = 36$. Знайдемо власні вектори, що відповідають цим власним числам.

1). $\lambda_1 = 9$. Маємо:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 15 & 6 & -12 \\ 6 & 24 & 6 \\ -12 & 6 & 15 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 24 & 6 \\ 15 & 6 & -12 \\ -12 & 6 & 15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -4 \\ 0 & 54 & 27 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -18 & -9 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 = x_3 = -2x_2 \Rightarrow f_1 = (2; -1; 2)^T. \end{aligned}$$

2). $\lambda_2 = 36$. Маємо:

$$\begin{pmatrix} -12 & 6 & -12 \\ 6 & -3 & 6 \\ -12 & 6 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = 2x_1 + 2x_3 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3)^T = (x_1, 2x_1 + 2x_3, x_3)^T.$$

Звідси

$$f_2 = (1; 2; 0)^T, f_3 = (0; 2; 1)^T.$$

Одержані вектори утворюють базис власних векторів матриці AA^* ;

$$f = \{f_1 = (2; -1; 2)^T, f_2 = (1; 2; 0)^T, f_3 = (0; 2; 1)^T\}.$$

Запишемо матрицю переходу від канонічного базису e до базису f :

$$[T]_{ef} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Методом Гауса знайдемо обернену матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -5 & 0 & 5 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -4 & 2 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -45 & -36 & -9 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & -16 & 8 & 20 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -45 & 0 & -25 & -10 & 20 \\ 0 & 0 & 36 & -16 & 8 & 20 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 18 & 9 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & -4 & 2 & 5 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 18 & 0 & 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & -9 & 0 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & -4 & 2 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -4 & 2 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$[T]_{ef}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Звідси $[B]_{ee} = [T]_{ef} [B]_{ff} [T]_{ef}^{-1} =$

$$= \frac{1}{9} [T]_{ef} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 14 & 2 & -4 \\ 2 & 17 & 2 \\ -4 & 2 & 14 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$[B]_{ee} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 14 & 2 & -4 \\ 2 & 17 & 2 \\ -4 & 2 & 14 \end{pmatrix}.$$

Звідси, не приводячи громіздкі, але зрозумілі обчислення,

$$[B]_{ee}^{-1} = 3 \begin{pmatrix} 14 & 2 & -4 \\ 2 & 17 & 2 \\ -4 & 2 & 14 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 13 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & -2 \\ 4 & -2 & 13 \end{pmatrix}.$$

За формулою (10.8) [2] $[A]_{ee} = [B]_{ee} U \Rightarrow U = [B]_{ee}^{-1} [A]_{ee} =$

Звідси $U = [B]_{ee}^{-1} [A]_{ee} =$

$$\frac{1}{54} \begin{pmatrix} 13 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & -2 \\ 4 & -2 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 36 & -18 & 36 \\ 36 & 36 & -18 \\ -18 & 36 & 36 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 36 & -18 & 36 \\ 36 & 36 & -18 \\ -18 & 36 & 36 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: матриця $[A]_{ee} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ зображується у вигляді добутку

додатної матриці $[B]_{ee} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 14 & 2 & -4 \\ 2 & 17 & 2 \\ -4 & 2 & 14 \end{pmatrix}$ і ортогональної матриці

$$U = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} : [A]_{ee} = [B]_{ee} U.$$

Задача 6.7. Знову знайдемо квадрат модуля визначника матриці Вандермонда від коренів з одиниці, яку також називають матрицею Фур'є:

$$\det V_n = V(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}), \varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} = \exp\left(\frac{2\pi k}{n} i\right), k = 1, \dots, n-1,$$

$$\det V_n = V(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_{n-1} \\ 1 & \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \dots & \varepsilon_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \dots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Розглянемо матрицю, спряжену до V_n :

$$V_n^* = \bar{V}_n^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \bar{\varepsilon}_1 & \bar{\varepsilon}_1^2 & \dots & \bar{\varepsilon}_1^{n-1} \\ 1 & \bar{\varepsilon}_2 & \bar{\varepsilon}_2^2 & \dots & \bar{\varepsilon}_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \bar{\varepsilon}_{n-1} & \bar{\varepsilon}_{n-1}^2 & \dots & \bar{\varepsilon}_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Доведемо, що $V_n V_n^* = n^n I$. Розглянемо добуток довільного рядка матриці V_n на довільний стовпчик матриці V_n^* :

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_1^m & \varepsilon_2^m & \dots & \varepsilon_{n-1}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{\varepsilon}_2^k \\ \bar{\varepsilon}_2^k \\ \vdots \\ \bar{\varepsilon}_2^k \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j^m \bar{\varepsilon}_j^k = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j^{m-k} = \frac{e^{i \frac{2\pi(m-k)n}{n}} - 1}{e^{i \frac{2\pi(m-k)}{n}} - 1} = 0 \quad \forall m \neq k.$$

Якщо $m = k$, то $\varepsilon_j^k \bar{\varepsilon}_j^k = 1 \quad \forall k = 0, \dots, n-1$, і цей добуток дорівнює n , що й доводить

формулу. Оскільки $|\det V_n| = |\det V_n^*|$, то $|\det V_n| |\det V_n^*| = |\det V_n|^2 = n^n \Rightarrow |\det V_n| = n^{\frac{n}{2}}$.

Наслідок: матриця $U_n \triangleq (\sqrt{n})^{-1} V_n$ - унітарна.

6). **Завдання для самостійної роботи:** [7], 1543, 1555, 1557, 1574, [9], №№ 1111.

7. Практичне заняття II.7. Кореневі (приєднані) вектори. Ланцюги кореневих підпросторів.

Теоретичні відомості

Теорема Гамільтона-Келі. Характеристичний многочлен оператора є його аннулюючим многочленом. Інакше кажучи, кожен оператор є коренем свого характеристичного многочлена.

Нехай характеристичний многочлен розкладено на множники над, взагалі кажучи, полем комплексних чисел:

$$\chi(\lambda, A) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{r_m}, \quad r_1 + \dots + r_m = n.$$

Згідно з теоремою Гамільтона-Келі

$$\chi(A, A) = (A - \lambda_1 I)^{r_1} (A - \lambda_2 I)^{r_2} \dots (A - \lambda_m I)^{r_m} = 0.$$

Звідси випливає, що якщо взяти $x \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda_2 I)^{r_2} \dots (A - \lambda_m I)^{r_m} x \neq 0$, то

$$f_1 = (A - \lambda_2 I)^{r_2} \dots (A - \lambda_m I)^{r_m} x \in \text{Ker}(A - \lambda_1 I)^{r_1}.$$

Так само можна знайти вектори з ядер інших аналогічних операторів. Такі вектори називаються кореневими (приєднаними). Може статись так, що

$$\text{Ker}(A - \lambda_1 I)^{r_1} = \text{Ker}(A - \lambda_1 I)^{l_1} \quad \forall l_1 < r_1.$$

Це свідчитиме, що матриця має мінімальний многочлен, який не співпадає з характеристичним.

Задача 7.1. Знайти власні і кореневі вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

Не розв'язуючи лінійних систем для знаходження цих векторів.

Знайдемо власні числа матриці:

$$\begin{aligned} \chi(\lambda, A) &= \det(\lambda I - A) = \\ &= \lambda^3 - (1+1+2)\lambda^2 + \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) \lambda - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \chi(\lambda, A) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2). \end{aligned}$$

Звідси

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

З попередніх міркувань випливає, що, взявши, наприклад, $x = (1; 0; 0)^T$ одержимо кореневий вектор з $\text{Ker}(A - I)^2$:

Маємо:

$$(A - 2I)x = f_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку: подіємо спочатку першим степенем матриці

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}:$$

$$f_1 = (A - I) f_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

а потім ще раз тією самою матрицею. В результаті вектор f_2 помножиться на другу степінь матриці $A - I$:

$$(A - I)^2 f_2 = (A - I) f_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Остання рівність показує, що f_1 - власний вектор матриці A , що відповідає власному числу $\lambda_1 = 1$, а f_2 - кореневий висоти 2.

Для знаходження власного вектора f_3 , що відповідає власному числу 2, знайдемо спочатку

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Подіємо цією матрицею, наприклад, на вектор $e_2 = (0; 1; 0)^T$:

$$f_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку. Покажемо, що f_3 , дійсно, власний вектор, що відповідає власному числу 2:

$$(A - 2I) f_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В результаті весь простір розпадається в пряму суму знайденого кореневого підпростору, що відповідає числу $\lambda_1 = 1$ і власного підпростору, що відповідає власному числу $\lambda_2 = 2$:

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A - I)^2 \dot{+} \text{Ker}(A - 2I).$$

При цьому маємо ланцюг ядер: $\text{Ker}(A - I)^2 \supset \text{Ker}(A - I) \supset \{0\}$.

В ньому діє оператор:

$$(A - I): \text{Ker}(A - I)^2 \rightarrow \text{Ker}(A - I), (A - I): \text{Ker}(A - I) \rightarrow \{0\}.$$

Побудований базис називається жордановим. Виходячи з рівностей

$$(A - I)f_1 = 0,$$

$$(A - I)f_2 = f_1,$$

$$(A - 2I)f_3 = 0,$$

одержимо:

$$Af_1 = f_1,$$

$$Af_2 = f_1 + f_2,$$

$$Af_3 = 2f_3.$$

Це дає змогу виписати у новому, жордановому базисі, матрицю оператора, яка називається жордановою нормальною формою даної матриці:

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, одержана матриця є прямою сумою двовимірної клітини Жордана і одновимірної клітини.

Задача 7.2. Знайти власні і кореневі вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Випускаючи кропіткі, але зрозумілі обчислення, випишемо характеристичний многочлен матриці:

$$\chi(\lambda, A) = \det(\lambda I - A) = \lambda^4 - 7\lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda - 54 = (\lambda - 3)^3(\lambda + 2)$$

Знайдемо кореневий вектор, що відповідає кореню характеристичного рівняння $\lambda_1 = 3$. Для цього помножимо матрицю $A + 2I$ на деякий вектор, наприклад, $e_1 = (1; 0; 0; 0)^T$:

$$f_3 = (A + 2I)e_1 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Можуть бути випадки: $\dim \text{Ker}(A - 3I)^3 = 3, \dim \text{Ker}(A - 3I)^2 = 2$ або $\text{Ker}(A - 3I)^3 = \text{Ker}(A - 3I)^2 \Rightarrow \dim \text{Ker}(A - 3I)^2 = 3$. Щоб з'ясувати це, знайдемо дефект матриці $A - 3I$:

$$\begin{aligned} A - 3I &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -4 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Очевидно, ранг цієї матриці дорівнює 2, отже, дефект також дорівнює 2. Це означає, що $\dim \text{Ker}(A - 3I) = 2$, тобто, у матриці існує два лінійно незалежних власних вектори – базис $\text{Ker}(A - 3I)$. Тоді $\dim \text{Ker}(A - 3I)^2 = 3$. Значить, у матриці є мінімальний многочлен, що не співпадає з характеристичним: $P(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 2)$. В результаті маємо розклад простору в пряму суму наступних підпросторів:

$$\mathbb{R}^4 = \text{Ker}(A - 3I)^2 \dot{+} \text{Ker}(A + 2I).$$

Оскільки $f_3 \in \text{Ker}(A - 3I)$, то вектор $f_2 = (A - 3I)f_3 \in \text{Ker}(A - 3I)$. Знайдемо цей власний вектор:

$$f_2 = (A - 3I)f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -4 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Знайти в такий спосіб вектор $f_1 \in \text{Ker}(A - 3I)$, лінійно незалежний з $f_2 \in \text{Ker}(A - 3I)$ не вдається. Його треба шукати як розв'язок системи $(A - 3I)x = 0$, що можна зробити, застосовуючи метод Гауса. Насправді, можна використати систему, яку було одержано при знаходженні рангу матриці $A - 3I$. Звідси одержуємо розв'язок: $(x_1; x_2; x_1; -2x_1 - x_2)^T$. Легко бачити, що, підстановка $x_1 = 5, x_2 = -5$ дає знайдений вектор $f_2 = (5; -5; 5; -5)^T$. Взявши $x_1 = x_1 = 1$, отримаємо лінійно незалежний з f_2 вектор $f_1 = (1; 1; 1; -3)^T$ (перевірте!).

З побудови базису маємо наступні розклади:

$$\begin{aligned} Af_1 &= 3f_1, \\ Af_2 &= 3f_2 \\ Af_3 &= f_2 + 3f_3, \\ Af_4 &= -2f_4. \end{aligned}$$

Матриця в цьому базисі має вигляд:

$$A_J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

7). Завдання для самостійної роботи: [8], №№ 6.4.12 – 6.4.15.

8. Практичне заняття П.8. Зведення матриці до нормальної форми Жордана. Приклади матриць третього, четвертого та п'ятого порядків.

Розглянемо всі випадки зведення матриці до нормальної форми Жордана в залежності від кратностей її власних чисел. В цьому розділі будуть розглядатись матриці з дійсними власними числами. Випадок комплексних власних чисел буде розглянуто у розділі 5.4 для матриці 2-го порядку. Почнемо з матриць третього порядку.

Випадок 8.1. Всі три корені $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристичного многочлена різні. Нагадаємо, що такі корені називаються простими. Очевидно, що $\dim \text{Ker}(A - \lambda_1 I) = \dim \text{Ker}(A - \lambda_2 I) = \dim \text{Ker}(A - \lambda_3 I) = 1$, Простір розпадається в пряму суму власних підпросторів матриці:

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A - \lambda_1 I) \oplus \text{Ker}(A - \lambda_2 I) \oplus \text{Ker}(A - \lambda_3 I)$$

і жорданова форма J_A матриці має вигляд

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Випадок 8.2. $\chi(A, t) = (t - \lambda_1)^2 (t - \lambda_2)$. В цьому випадку ядро оператора $A - \lambda_2 I$ може бути тільки одновимірне. Нехай $\dim \text{Ker}(A - \lambda_1 I) = 2$. Це означає, що жордановий базис можна вибрати з власних векторів оператора A ,

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A - \lambda_1 I) \oplus \text{Ker}(A - \lambda_2 I)$$

В такому базисі її жорданова матриця має діагональний вигляд:

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що в цьому випадку мінімальний многочлен матриці $(t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$ не співпадає з характеристичним і є його дільником.

Для знаходження жорданового базису досить розв'язати лінійні системи

$$(A - \lambda_1 I)x = 0 \text{ та } (A - \lambda_2 I)x = 0.$$

Цікаво зауважити, що вектори $g_1, g_2 \in \text{Ker}(A - \lambda_1 I), g_3 \in \text{Ker}(A - \lambda_2 I)$ жорданового базису можна знайти, не розв'язуючи системи, а саме: нехай x і y – будь-які лінійно незалежні вектори з $\mathbb{R}^3$. Тоді $(A - \lambda_2 I)x, (A - \lambda_2 I)y$ (підбираємо x і y так, щоб ці одержані вектори були ненульовими) - лінійно незалежні і належать $\text{Ker}(A - \lambda_1 I)$, як це вже пояснювалось. Повторимо це ще раз: $(A - \lambda_1 I)((A - \lambda_2 I)x) = ((A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I))x = 0$, аналогічно з другим

вектором. Так само виберемо вектор z з $\mathbb{R}^3$ і $(A - \lambda_1 I)z$ (якщо він ненульовий) належить $\text{Ker}(A - \lambda_2 I)$.

Випадок 8.3. $\chi(A, t) = (t - \lambda_1)^2 (t - \lambda_2)$. В цьому випадку знову ядро оператора $A - \lambda_2 I$ може бути тільки одновимірне. Нехай тепер $\dim \text{Ker}(A - \lambda_1 I) = 1$. Це означає, що оператор має одновимірний підпростір власних векторів і одновимірний відносно $\text{Ker}(A - \lambda_1 I)$ підпростір кореневих векторів $\text{Ker}(A - \lambda_1 I)^2$; його розмірність дорівнює 2. Маємо ланцюг ядер:

$$\text{Ker}(A - \lambda_1 I)^2 \supset \text{Ker}(A - \lambda_1 I) \supset \{0\},$$

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A - \lambda_1 I)^2 \oplus \text{Ker}(A - \lambda_2 I)$$

Виберемо жордановий базис, взявши вектор $x \in \mathbb{R}^3$ так, що $(A - \lambda_2 I)x \neq 0$. Тоді $(A - \lambda_2 I)x \in \text{Ker}(A - \lambda_1 I)^2$. Слід вибирати x таким чином, щоб $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)x \neq 0$. Покладемо $g_2 = (A - \lambda_2 I)x$. Тоді $g_1 = (A - \lambda_1 I)g_2 = (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)x \in \text{Ker}(A - \lambda_1 I)$. Власний вектор g_3 з $\text{Ker}(A - \lambda_2 I)$ знайдемо, розв'язавши систему $(A - \lambda_2 I)x = 0$ або, як і раніше, взявши вектор z з $\mathbb{R}^3$ так, щоб вектор $(A - \lambda_1 I)^2 z$ був ненульовий, тоді він належить $\text{Ker}(A - \lambda_2 I)$.

З виписаних рівностей маємо:

$$Ag_1 = \lambda_1 g_2$$

$$Ag_2 = g_1 + \lambda_1 g_2$$

$$Ag_3 = \lambda_2 g_3$$

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Випадок 8.4. $\chi(A, t) = (t - \lambda)^3$. Нехай $\dim \text{Ker}(A - \lambda I) = 1$, тобто, $\text{rank}(A - \lambda I) = 2$. Тоді маємо ланцюг (довгий) ядер:

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A - \lambda I)^3 \supset \text{Ker}(A - \lambda I)^2 \supset \text{Ker}(A - \lambda I) \supset \{0\}$$

Беремо вектор g_3 з $\mathbb{R}^3$ так, щоб вектор $(A - \lambda I)^2 g_3$ був ненульовий, тоді $g_2 = (A - \lambda I)g_3$ належить $\text{Ker}(A - \lambda I)^2$ і $g_1 = (A - \lambda I)g_2$ належить $\text{Ker}(A - \lambda I)$. Звідси маємо:

$$\begin{aligned} Ag_1 &= \lambda g_1 \\ Ag_2 &= g_1 + \lambda g_2 \\ Ag_3 &= g_2 + \lambda g_3 \end{aligned}$$

і

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Випадок 8.5. $\chi(A, t) = (t - \lambda)^3$. Нехай $\dim \text{Ker}(A - \lambda I) = 2$, тобто, $\text{rank}(A - \lambda I) = 1$. Тоді маємо ланцюг (короткий) ядер:

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A - \lambda I)^2 \supset \text{Ker}(A - \lambda I) \supset \{0\}$$

Беремо вектор g_3 з $\mathbb{R}^3$ так, щоб вектор $(A - \lambda I)g_3$ був ненульовий, тоді $g_2 = (A - \lambda I)g_3$ належить $\text{Ker}(A - \lambda I)$. Розв'язавши систему $(A - \lambda I)x = 0$, виберемо вектор g_1 лінійно незалежний з g_2 . Маємо:

$$\begin{aligned} Ag_1 &= \lambda g_1 \\ Ag_2 &= \lambda g_2 \\ Ag_3 &= g_2 + \lambda g_3 \end{aligned}$$

В цьому базисі жорданова матриця має вигляд:

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Розглянемо тепер деякі випадки матриць 4-го порядку. Інші випадки читач, користуючись пропонованою технікою, зможе розглянути самостійно. Попередні приклади дають змогу не пояснювати процедуру зведення до нормальної форми Жордана занадто ретельно.

Випадок 8.6. Корені характеристичного рівняння прості. Матриця зводиться до діагонального вигляду у базисі, що складається з власних векторів матриці.

Випадок 8.7. $\chi(A, t) = (t - \lambda_1)^2(t - \lambda_2)(t - \lambda_3)$

а). Якщо $\text{rank}(A - \lambda_1 I) = 3$, а значить $\dim \text{Ker}(A - \lambda_1 I) = 1$,

$\dim \text{Ker}(A - \lambda_1 I)^2 = 2$, жорданова нормальна форма матриці має вигляд:

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

b). Якщо $\text{rank}(A - \lambda_1 I) = 2$, а значить $\dim \text{Ker}(A - \lambda_1 I) = 2$, жорданова нормальна форма матриці має діагональний вигляд:

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Випадок 8.8. $\chi(A, t) = (t - \lambda_1)^2 (t - \lambda_2)^2$

a). $\dim \text{Ker}(A - \lambda_1 I) = \dim \text{Ker}(A - \lambda_1 I) = 2$. Матриця зводиться до діагонального вигляду:

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

b). $\dim \text{Ker}(A - \lambda_1 I) = 1$, $\dim \text{Ker}(A - \lambda_2 I) = 2$. Тоді автоматично $\dim \text{Ker}(A - \lambda_1 I)^2 = 2$.

Матриця зводиться до нормальної форми Жордана:

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

c). $\dim \text{Ker}(A - \lambda_1 I) = \dim \text{Ker}(A - \lambda_2 I) = 1$ Тоді автоматично $\dim \text{Ker}(A - \lambda_1 I)^2 = \dim \text{Ker}(A - \lambda_2 I)^2 = 2$.

Матриця зводиться до нормальної форми Жордана:

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Випадок 8.9. $\chi(A, t) = (t - \lambda)^4$

а). $\dim \text{Ker}(A - \lambda I) = 1$. Маємо довгий ланцюг ядер:

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A - \lambda I)^4 \supset \text{Ker}(A - \lambda I)^3 \supset \text{Ker}(A - \lambda I)^2 \supset \text{Ker}(A - \lambda I) \supset \{0\}$$

і нормальну форму матриці:

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

б). $\dim \text{Ker}(A - \lambda I) = 2$. В такій ситуації ми не можемо нічого сказати про $\dim \text{Ker}(A - \lambda I)^2$, тому ядро $\text{Ker}(A - \lambda I)^2$ треба досліджувати окремо.

б1). Якщо $\dim \text{Ker}(A - \lambda I)^2 = 4$, то, знайшовши два лінійно незалежні вектори

$f_1, f_3 \in \text{Ker}(A - \lambda I)$, побудуємо відносний (відносно $\text{Ker}(A - \lambda I)$) базис в

$\text{Ker}(A - \lambda I)^2 - \{f_2, f_4\}$, щоб виконувались співвідношення

$f_1 = (A - \lambda I) f_2, f_3 = (A - \lambda I) f_4$. В цьому базисі матриця зводиться до

нормальної форми Жордана:

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

вона є прямою сумою двох двовимірних клітин Жордана.

b2). Нехай $\dim \text{Ker}(A - \lambda I) = 2$, $\dim \text{Ker}(A - \lambda I)^2 = 3$. Тоді маємо ланцюг ядер

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A - \lambda I)^3 \supset \text{Ker}(A - \lambda I)^2 \supset \text{Ker}(A - \lambda I) \supset \{0\}.$$

Жордановий базис в такій ситуації будувати досить просто: беремо довільний вектор $g_4 \in \mathbb{R}^4 = \text{Ker}(A - \lambda I)^3$ і знаходимо:

$$g_3 = (A - \lambda I)g_4 \in \text{Ker}(A - \lambda I)^2 \rightarrow g_2 = (A - \lambda I)g_3 \in \text{Ker}(A - \lambda I).$$

Безумовно, треба вибирати g_4 так, щоб всі ці вектори були ненульовими. Вектор

$$g_1 \in \text{Ker}(A - \lambda I)$$

знайдемо як лінійно незалежний з $g_2 \in \text{Ker}(A - \lambda I)$ розв'язок системи $(A - \lambda I)x = 0$. В цьому базисі матриця зводиться до нормальної форми

Жордана:

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Розглянемо кілька прикладів зведення матриці до нормальної форми Жордана. Кожного разу цікаво також виписати матрицю переходу від канонічного базису до жорданового, але ми не будемо цього робити, оскільки вигляд такої матриці зрозумілий, якщо знайдено жордановий базис, він дається формулою (2.3.8).

Приклад 8.1. Маємо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Після простих обчислень випишемо характеристичний многочлен цієї матриці: $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$.

Оскільки $\dim(\text{Ker}(A - 2I)) = 1$, треба знайти лише $\text{rank}(A - I)$

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\text{rank}(A - I) = \dim(\text{Im}(A - I)) = 2$ і $\dim(\text{Ker}(A - I)) = 3 - 2 = 1$. Після цього можна не знаходити матрицю $(A - I)^2$, тому що $\dim(\text{Ker}(A - I)^2)$ може дорівнювати тільки 2, інших варіантів бути не може. У результаті можна побудувати такий базис:

$e = e_1 \in \text{Ker}(A - I)^2$, $e_1 \notin \text{Ker}(A - I)$, $e_2 = (A - I)e_1 \in \text{Ker}(A - I)$, - власний вектор, тобто $Ae_2 = e_2$; e_3 - власний вектор A , що відповідає власному числу $\lambda = 2$, $Ae_3 = 2e_3$. У такому базисі

$$\begin{aligned} Ae_1 &= e_1 + e_2, \\ Ae_2 &= e_2, \\ Ae_3 &= 2e_3 \end{aligned} \tag{9.1}$$

Базис Жордана будується так: $f_1 = e_2$, $f_2 = e_1$, $f_3 = e_3$. У ньому оператор A діє таким чином:

$$\begin{aligned} Af_1 &= f_1, \\ Af_2 &= f_1 + f_2, \\ Af_3 &= 2f_3 \end{aligned} \tag{9.2}$$

Згадаємо, як виписати матрицю, виходячи з такої системи лінійних рівностей (формули (5.1), (5.9)): треба коефіцієнти, що знаходяться у рядках, записати у стовпчики. При цьому матимемо таку ж саму матрицю, рядки якої збігаються з рядками попередньої системи. Це спостереження дає змогу одразу виписати матрицю в нормальній формі, не переходячи до жорданового базису.

Зауваження. Розв'язуючи інші приклади, будемо користуватись цим правилом. Це дасть змогу не виписувати систему вигляду (9.1), а обмежуватись системами вигляду (9.2)

Тепер можна виписати матрицю Жордана:

$$A_j = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Приклад 8.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Після простих обчислень знайдемо характеристичний многочлен цієї матриці: $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^3$.

Обчислимо $\text{rank}(A - I) = \dim(\text{Im}(A - I))$:

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

звідки $\dim(\text{Im}(A-I))=2$ і $\dim(\text{Ker}(A-I))=3-2=1$. Це означає, що розмірність $\text{Ker}(A-I)^2$ відносно $\text{Ker}(A-I)$ може дорівнювати тільки 1, тобто, $\dim(\text{Ker}(A-I)^2)=2$. В цьому можна впевнитись безпосереднім обчисленням:

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

звідки $\dim(\text{Im}(A-I)^2)=1$, $\dim(\text{Ker}(A-I)^2)=3-1=2$. Тепер, зрозуміло, $\dim(\text{Ker}(A-I)^3)=3$, бо інших варіантів бути не може (в силу теореми Гамільтона–Келі і за допомогою безпосередніх обчислень: $\chi(A)=(A-A)^3=0$).

Маємо жордановий базис в L :

$$e_3 = (1, 0, 0)^T, \quad e_2 = (A-I)e_3, \quad e_1 = (A-I)e_2 = (A-I)^2 e_3;$$

e_3 - власний вектор. Відзначимо, що вектор e_3 був «вгаданий»: проста перевірка показує, що він не міститься в ядрах $\text{Ker}(A-I)$ і $\text{Ker}(A-I)^2$. У цьому базисі

$$Ae_1 = e_1,$$

$$Ae_2 = e_1 + e_2,$$

$$Ae_3 = e_2 + e_3$$

Звідси

$$A_j = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тобто, A_j - клітина Жордана.

Приклад 8.3. Маємо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 3 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -11 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що її характеристичний многочлен має вигляд $\chi(\lambda) = (\lambda + 1)^4$.

Перетворимо матрицю $A + I$ для знаходження її рангу і подальшого опису $\ker(A + I)$:

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 4 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -14 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 10 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси $\text{rank}(A + I) = \dim(\text{Im}(A + I)) = 2$, $\dim(\text{Ker}(A + I)) = 4 - 2 = 2$.

Знайдемо $\text{rank}(A + I)^2 = \dim(\text{Im}(A + I)^2)$:

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 4 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 4 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

Легко бачити, що $\text{rank}(A+I)^2 = \dim \text{Im}(A+I)^2 = 1$, звідки

$\dim \text{Ker}(A+I)^2 = 4 - 1 = 3$. Очевидно, $\dim \text{Ker}(A+I)^3 = 4$.

Маємо $e_4 = e \in \text{Ker}(A+I)^3$ - базис в $\text{Ker}(A+I)^3$ відносно

$\text{Ker}(A+I)^2$; $e_3 = (A+I)e_4$ базис в $\text{Ker}(A+I)^2$ відносно

$\text{Ker}(A+I)$; $e_2 = (A+I)e_3$, e_2, e_4 - власні вектори, базис в $\text{Ker}(A+I)$. В цьому базисі

$$Ae_1 = -e_1,$$

$$Ae_2 = -e_2,$$

$$Ae_3 = e_2 - e_3$$

$$Ae_4 = e_3 - e_4.$$

Звідси

$$A_j = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Приклад 8.4. Маємо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо характеристичний многочлен: $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^4(\lambda + 1)$.

Власному числу $\lambda = -1$ відповідає одновимірний власний простір і клітина (-1) у матриці Жордана A_j . Розглянемо більш детально $\lambda = 1$. Знайдемо $\text{rank}(A - I) = \dim(\text{Im}(A - I))$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідки $\dim \text{Im}(A - I) = \text{rank}(A - I) = 4 \Rightarrow \dim \ker(A - I) = 5 - 4 = 1$. Тоді

$$\dim \ker(A - I)^2 = 2, \dim \ker(A - I)^3 = 3, \dim \ker(A - I)^4 = 4.$$

Таким чином, можна побудувати базис в $\ker(A-I)^4$. Візьмемо такий вектор $x \in \mathbb{R}^4$, що $(A+I)x \neq 0$ і всі інші вектори, що будуть утворюватись з нього, щоб були ненульові. Покладемо

$$f_4 = (A+I)x, f_3 = (A-I)f_4, f_2 = (A-I)f_3, f_1 = (A-I)f_2.$$

Власний вектор f_5 матриці A , що відповідає власному числу $\lambda = -1$, знайдемо, розв'язавши систему $(A+I)f_5 = 0$. Запишемо дію оператора у такому базисі

$$\begin{aligned} Af_1 &= f_1, \\ Af_2 &= f_1 + f_2, \\ Af_3 &= f_2 + f_3, \\ Af_4 &= f_3 + f_4, \\ Af_5 &= -f_5. \end{aligned}$$

Таким чином, жорданова нормальна форма матриці буде мати вигляд:

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

8). Завдання для самостійної роботи: [7], №№ 1090-1094.

9. Практичне заняття II.9. Нормальна форма у дійсному випадку

Нехай матриця має кратні комплексно спряжені корені. Тоді її нормальна форма запишеться у вигляді

$$\begin{pmatrix}
 \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & & & & & \\
 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & & & & & \\
 \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & & & & & \\
 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 & \dots & & & & & \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & \dots & & & & & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & & \dots & \bar{\lambda} & 1 & \dots & 0 & 0 \\
 & & & & & & \dots & 0 & \bar{\lambda} & \dots & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\
 & & & & & & \dots & 0 & 0 & \dots & \bar{\lambda} & 1 \\
 & & & & & & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{\lambda}
 \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

Покажемо, як зіставити даній матриці аналог нормальної форми – матрицю з дійсними елементами. Нехай $f_r \in \text{Ker}(A - \lambda I)^r$, тобто, $(A - \lambda I)^r f_r = 0$. Звідси

$$(A - \lambda I) f_r = f_{r-1} \in \text{Ker}(A - \lambda I)^{r-1},$$

...

$$(A - \lambda I) f_2 = f_1 \in \text{Ker}(A - \lambda I),$$

$$(A - \lambda I) f_1 = 0.$$

f_r має комплексні координати, тому його можна зобразити у вигляді $f_r = g_r + ih_r$, де вектори g_r, h_r мають дійсні координати. Враховуючи це, перепишемо рівності у вигляді

$$(A - (\alpha + i\beta)I)(g_r + ih_r) = g_{r-1} + ih_{r-1},$$

$$(A - (\alpha + i\beta)I)(g_{r-1} + ih_{r-1}) = g_{r-2} + ih_{r-2},$$

...

$$(A - (\alpha + i\beta)I)(g_2 + ih_2) = g_1 + ih_1,$$

$$(A - (\alpha + i\beta)I)(g_1 + ih_1) = 0.$$

Звідси одержимо:

$$\begin{aligned}
Ag_1 &= \alpha g_1 - \beta h_1, \\
Ah_1 &= \beta g_1 + \alpha h_1, \\
Ag_2 &= g_1 + \alpha g_2 - \beta h_2, \\
Ah_2 &= h_1 + \beta g_2 + \alpha h_2, \\
&\dots \\
Ag_r &= g_{r-1} + \alpha g_r - \beta h_r, \\
Ah_r &= h_{r-1} + \beta g_r + \alpha h_r.
\end{aligned} \tag{9.2}$$

В результаті знаходимо матрицю в новому базисі $\{g_k, h_k\}, k=1, \dots, r$:

$$A_{(g,h),(g,h)} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \tag{9.3}$$

Ця матриця схожа на жорданову клітину. На її діагоналі знаходяться блоки

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \text{ а над діагоналлю – блоки з одиничних матриць } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 9.1. Звести до дійсної нормальної форми матрицю

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо характеристичний многочлен матриці, випускаючи технічні подробиці:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \lambda - \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \lambda - \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 18\lambda - 27 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) =$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = (\lambda - 1) \left(\lambda - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) \left(\lambda - \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right).$$

Отже, власними числами матриці є: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \lambda_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

Знайдемо власні вектори матриці.

1). $\lambda_1 = 1$. Розв'яжемо систему $(A - \lambda I)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x_1 = x_2 = x_3.$$

Для одержання нормованого власного вектора покладемо $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Отже, власний вектор одиничної норми, що відповідає власному числу $\lambda_1 = 1$ - це

$$f = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T.$$

2). $\lambda_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

Для знаходження власного вектора, щоб не розв'язувати систему з ірраціональними коефіцієнтами, знайдемо спочатку допоміжний вектор з $Ker(A^2 - A + I)$. З теореми Гамільтона-Келі випливає:

$$(A - \lambda_2 I)((A - \lambda_3 I)(A - I)x) = 0 \Rightarrow (A - \lambda_3 I)(A - I)x \in Ker(A - \lambda_2 I).$$

Візьмемо, наприклад, $x = 3e_1 = (3; 0; 0)^T$. Тоді

$$(A - I)e_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Звідси одержимо:

$$\begin{aligned} (A - \lambda_3 I)(A - I)x &= \left(\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1-i\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \\ &= \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{i3\sqrt{3}}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i3\sqrt{3}}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i3\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{6} \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{3} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + i3\sqrt{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{9\sqrt{2}}{6} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + i \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Отже, знайдено вектори ортонормованого базису, в якому матриця буде мати дійсну нормальну форму:

$$f = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Також в нашому випадку $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Врахуємо, що $Af = f$.

Згідно з двома першими рівностями (10.2) можна записати:

$$\begin{aligned}
Ag &= \frac{1}{2}g - \frac{\sqrt{3}}{2}h, \\
Ah &= \frac{\sqrt{3}}{2}g + \frac{1}{2}h.
\end{aligned}$$

В результаті у базисі $p = \{f, g, h\}$ матриця буде мати вигляд:

$$[A]_{p,p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Матриця ортогонального оператора U переходу до нового базису від канонічного складається з векторів-стовпчиків координат базисних векторів:

$$[U]_{p,p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

9). Завдання для самостійної роботи: [7], №№ 1101-1104, 1106, 1107.

10. Практичне заняття П.10. Функції від матриці лінійного оператора, експонента оператора.

Приклад 10.1. Знайти $\sqrt{A}$, де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розглянути обидві гілки багатозначного відображення «корінь квадратний».

Розв'язання. Знайдемо корені характеристичного многочлена матриці:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2.$$

Знайдемо розмірність $\text{Ker}(A - 4I)$.

$$A - 4I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси $\dim \text{Ker}(A - 4I) = 1$. З теореми Гамільтона-Келі $\text{Ker}(A - 4I)^2 = \mathbb{R}^2$. Це означає, що будь-який вектор з $\mathbb{R}^2$ знаходиться у $\text{Ker}(A - 4I)^2$. Візьмемо

$$f_2 = (-1; 0)^T. \quad \text{Тоді} \quad f_1 = (A - 4I) f_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Матриця оператора}$$

переходу від канонічного до жорданового базису має вигляд:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = T J_A T^{-1} \Rightarrow \sqrt{A} = T \sqrt{J_A} T^{-1}.$$

Як відомо,

$$\sqrt{J(\lambda)}_{1,2} = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \Rightarrow \pm \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\sqrt{A}_{1,2} = \pm \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Приклад 10.2. Знайти $\exp(A)$ і $\sin(A)$, де

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. 1). $\exp(A)$.

Помітимо, що $\det(A) = 0$. Знайдемо корені характеристичного многочлена матриці:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 1).$$

Знайдемо $\dim \text{Ker} A$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 10 & 6 & -14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank}(A) = 2.$$

Звідси $\dim \text{Ker} A = 3 - 2 = 1$ і $\dim \text{Ker} A^2 = 2$.

З теореми Гамільтона-Келі випливає:

$$f_2 = (A - I)e_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 6 & 3 & -9 \\ 5 & 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \in \text{Ker} A^2.$$

Звідси

$$f_1 = Af_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \in \text{Ker} A.$$

Знайдемо власний вектор, що відповідає власному числу 1, розв'язавши методом Гауса систему $(A - \lambda I)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 6 & 3 & -9 \\ 5 & 3 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \\ -15 & -9 & 24 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = (x_1; x_1; x_1)^T.$$

Візьмемо $f_3 = (1; 1; 1)^T$. Маємо:

$$Af_1 = 0,$$

$$Af_2 = f_1,$$

$$Af_3 = f_3.$$

В цьому базисі матриця має вигляд:

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

звідки

$$\exp(J_A) = \begin{pmatrix} \exp(0) & \exp'(0) & 0 \\ 0 & \exp(0) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}.$$

Матриця оператора переходу до жорданового базису:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -3 & 6 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Тоді $A = TJ_A T^{-1}$. Звідси

$$\exp(A) = T \exp(J_A) T^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -3 & 6 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & e \\ -3 & 3 & e \\ -2 & 3 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3e-1 & e & -3e+1 \\ 3e & e+3 & -3e-3 \\ 3e-1 & e+1 & -3e \end{pmatrix}.$$

2). $\sin(A)$.

$$\sin(J_A) = \begin{pmatrix} \sin(0) & \sin'(0) & 0 \\ 0 & \sin(0) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(1) \end{pmatrix}.$$

$$\sin(A) = T \sin(J_A) T^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -3 & 6 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\sin(1)+1 & \sin(1)+1 & -3\sin(1)-2 \\ 3\sin(1)+3 & \sin(1)-3 & -3\sin(1)-6 \\ 3\sin(1)+2 & \sin(1)+2 & -3\sin(1)-4 \end{pmatrix}.$$

10). **Завдання для самостійної роботи:** [7], №№ 1102, 1103, 1104б 1120.

11. Практичне заняття П.11. Квадратичні форми. Зведення до канонічного вигляду методом Лагранжа

Теоретичні відомості

Нехай в деякому базисі задано квадратичну форму, яку запишемо таким чином:

$$\Omega(x, x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + F(x_2, \dots, x_n), \quad (11.1)$$

причому, форма $F(x_2, \dots, x_n)$ не містить x_1 .

Введемо нові змінні за формулами

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ y_i &= x_i \quad \forall i = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Обчислимо

$$\frac{1}{a_{11}}y_1^2 = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + G(x_2, \dots, x_n),$$

де $G(x_2, \dots, x_n)$ - квадратична форма, що не містить x_1 .

Отже, $\Omega(x, x) =$

$$= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + F(x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{a_{11}}y_1^2 - G(x_2, \dots, x_n) + F(x_2, \dots, x_n),$$

і з квадратичною формою $\Phi(x_2, \dots, x_n) = F(x_2, \dots, x_n) - G(x_2, \dots, x_n)$, якщо в ній коефіцієнт при x_2^2 не дорівнює нулю, можна зробити таку ж саму процедуру. Якщо при всіх квадратах змінних коефіцієнти не дорівнюватимуть нулю, то квадратична форма приведеться до діагонального вигляду.

Розглянемо випадок, коли всі коефіцієнти при квадратах змінних дорівнюють нулю. Тоді квадратична форма буде мати вигляд

$$\Omega(x, x) = 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_{n-1}x_n. \quad (11.3)$$

Введемо заміни:

$$\begin{aligned}x_1 &= y_1 - y_2, \\x_2 &= y_1 + y_2, \\x_k &= y_k \quad \forall k = 3, \dots, n.\end{aligned}\tag{11.4}$$

Зауважимо, що старі змінні можна однозначно виразити через нові, тому перетворення не вироджене. В результаті квадратична форма буде мати вигляд

$$\Omega(x, x) = 2a_{12}y_1^2 - 2a_{12}y_2^2 + \dots\tag{11.5}$$

Зауважимо, що члени, що не виписані, не містять y_1^2 , тому доданок $2a_{12}y_1^2$ не може зникнути при зведенні подібних. Далі ми приходимо до випадку, розглянутого раніше. Таким чином, квадратична форма зведеться до канонічного вигляду.

Задача 11.1. Привести до канонічного вигляду квадратичну форму

$$\Omega(x, x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

Маємо:

$$\begin{aligned}\Omega(x, x) &= (x_1^2 + 2x_1x_2) + (2x_2^2 + 4x_2x_3) + 5x_3^2 = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2) + x_3^2 = \\&= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 + x_3^2.\end{aligned}$$

Ввівши заміну

$$\begin{aligned}y_1 &= x_1 + x_2, \\y_2 &= x_2 + 2x_3, \\y_3 &= x_3,\end{aligned}$$

Приведемо квадратичну форму до канонічного вигляду:

$$\tilde{\Omega}(y, y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

При цьому матриця переходу до нових координат має вигляд:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Задача 11.2. Привести до канонічного вигляду квадратичну форму

$$\Omega(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4.$$

Маємо:

$$\Omega(x, x) = (x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4) + (x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4) + x_3^2 - 2x_4^2.$$

Введемо заміну:

$$y_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4.$$

Звідси

$$y_1^2 = (x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4) + (x_3^2 - 2x_3x_4) + x_4^2 \Rightarrow$$

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 = y_1^2 - (x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4) - (x_3^2 - 2x_3x_4) - x_4^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Omega(x, x) &= y_1^2 - (x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4) - (x_3^2 - 2x_3x_4) - x_4^2 + (x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4) + x_3^2 - 2x_4^2 = \\ &= y_1^2 + (4x_2x_3 - 6x_2x_4) + 2x_3x_4 - 3x_4^2. \end{aligned}$$

Введемо заміну:

$$x_2 = y_2 - y_3,$$

$$x_3 = y_2 + y_3,$$

$$y_4 = x_4.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \Omega(x, x) &= y_1^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2 - 6y_2y_4 + 6y_3y_4 + 2y_2y_4 + 2y_3y_4 - 3y_4^2 = \\ &= y_1^2 + 4y_2^2 - 4y_2y_4 + y_4^2 - 4y_3^2 + 8y_3y_4 - 4y_4^2 = y_1^2 + (2y_2 - y_4)^2 - 4(y_3 - y_4)^2. \end{aligned}$$

Введемо заміну:

$$z_1 = y_1,$$

$$z_2 = 2y_2 - y_4,$$

$$z_3 = y_3 - y_4.$$

В результаті квадратична форма буде приведена до канонічної форми:

$$\Omega(x, x) = z_1^2 + z_2^2 - 4z_3^2,$$

де

$$z_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4,$$

$$z_2 = x_2 + x_3 - x_4,$$

$$z_3 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_4.$$

Задача 11.3. Привести до канонічного вигляду квадратичну форму

$$\begin{aligned}\Omega_n(x, x) &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \\ &= x_1^2 + x_1(x_2 + x_3 + \dots + x_n) + x_2^2 + x_2(x_3 + x_4 + \dots + x_n) + \dots + x_{n-1}^2 + x_{n-1}x_n + x_n^2.\end{aligned}$$

Розв'язання. Щоб краще розібратись у ситуації, розглянемо спочатку частинні випадки.

$$1). \quad n = 2. \quad \Omega_2(x, x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + 2\frac{x_2}{2} + \frac{x_2^2}{4} + \frac{3}{4}x_2^2 = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2.$$

Після заміни $y_1 = x_1 + \frac{x_2}{2}, y_2 = x_2$ квадратична форма матиме наступний вигляд:

$$\Omega_2(x(y), x(y)) = y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2.$$

$$3). \quad n = 2.$$

$$\Omega_3(x, x) = x_1^2 + x_1(x_2 + x_3) + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2.$$

Не будемо робити аналогічні дії, що їх рекомендує метод Лагранжа, а покажемо, як перейти від $\Omega_2(x, x)$ до $\Omega_3(x, x)$. Розглянемо для цього допоміжну квадратичну форму від двох змінних $x_1, \tilde{x}_2 = x_2 + x_3$:

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_2 &= x_1^2 + x_1\tilde{x}_2 + \tilde{x}_2^2 = x_1^2 + x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 = \\ &= x_1^2 + x_1(x_2 + x_3) + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 + x_2x_3 = \Omega_3 + x_2x_3.\end{aligned}$$

З попереднього результату маємо:

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_2 &= x_1^2 + x_1\tilde{x}_2 + \tilde{x}_2^2 = \left(x_1 + \frac{\tilde{x}_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\tilde{x}_2^2 = \left(x_1 + \frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(x_2 + x_3)^2 = \\ &= \left(x_1 + \frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2) = \left(x_1 + \frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 + \frac{3}{2}x_2x_3 + \frac{3}{4}x_3^2.\end{aligned}$$

Враховуючи отриману формулу, яка дає зв'язок між Ω_3 і $\tilde{\Omega}_2$, будемо мати:

$$\begin{aligned}\Omega_3 &= \tilde{\Omega}_2 - x_2x_3 = \left(x_1 + \frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 + \frac{1}{2}x_2x_3 + \frac{3}{4}x_3^2 = \\ &= \left(x_1 + \frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2^2 + 2x_2\frac{x_3}{3} + \left(\frac{x_3}{3}\right)^2\right) + \frac{3}{4}x_2^2 - \frac{1}{12}x_3^2 = \\ &= \left(x_1 + \frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2 + \frac{x_3}{3}\right)^2 + \frac{8}{12}x_2^2 = \left(x_1 + \frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2 + \frac{x_3}{3}\right)^2 + \frac{4}{6}x_2^2 = \\ &= y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{4}{6}y_3^2,\end{aligned}$$

де

$$y_1 = x_1 + \frac{x_2 + x_3}{2}, y_2 = x_2 + \frac{x_3}{3}, y_3 = x_3.$$

Радимо читачу одержати аналогічну формулу для Ω_4 :

$$\Omega_4 = y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{4}{6}y_3^2 + \frac{5}{8}y_4^2,$$

де

$$y_1 = x_1 + \frac{x_2 + x_3 + x_4}{2}, y_2 = x_2 + \frac{x_3 + x_4}{3}, y_3 = x_3 + \frac{x_4}{4}, y_4 = x_4.$$

На основі розгляду частинних випадків вимальовується формула:

$$\Omega_n = y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{4}{6}y_3^2 + \frac{5}{8}y_4^2 + \dots + \frac{k+1}{2k}y_k^2 + \dots + \frac{n+1}{2n}y_n^2,$$

де

$$y_1 = x_1 + \frac{x_2 + x_3 + \dots + x_n}{2}, y_2 = x_2 + \frac{x_3 + x_4 + \dots + x_n}{3}, \dots,$$

$$y_k = x_k + \frac{x_{k+1} + \dots + x_n}{k+1}, \dots, y_n = x_n \quad (k=1, \dots, n-1).$$

Доведемо цю формулу, використовуючи метод математичної індукції. В двох частинних випадках формула справедлива. Покажемо її справедливість для $n+1$, тобто, доведемо формулу

$$\Omega_{n+1} = y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{4}{6}y_3^2 + \frac{5}{8}y_4^2 + \dots + \frac{k+1}{2k}y_k^2 + \dots + \frac{n+1}{2n}y_n^2 + \frac{n+2}{2(n+1)}y_{n+1}^2,$$

де $y_k = x_k + \frac{x_{k+1} + \dots + x_{n+1}}{k+1}, \dots, y_{n+1} = x_{n+1} \ (k=1, \dots, n)$.

Застосуємо перехід від Ω_n до Ω_{n+1} аналогічний тому, який використовувався при переході від Ω_2 до Ω_3 .

Розглянемо для цього допоміжну квадратичну форму від n змінних $x_1, \dots, x_{n-1}, \tilde{x}_n = x_n + x_{n+1}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_n &= x_1^2 + x_1(x_2 + \dots + x_{n-1} + \tilde{x}_n) + x_2^2 + x_2(x_3 + \dots + x_{n-1} + \tilde{x}_n) + \dots + x_{n-1}^2 + x_{n-1}\tilde{x}_n + \tilde{x}_n^2 = \\ &= x_1^2 + x_1(x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1}) + x_2^2 + x_2(x_3 + \dots + x_n + x_{n+1}) + \dots + x_{n-1}^2 + x_{n-1}(x_n + x_{n+1}) + \\ &= (x_n + x_{n+1})^2 = x_1^2 + x_1(x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n + x_{n+1}) + x_2^2 + x_2(x_3 + \dots + x_n + x_{n+1}) + \dots + \\ &\quad + x_{n-1}^2 + x_{n-1}(x_n + x_{n+1}) + x_n^2 + x_n x_{n+1} + x_{n+1}^2 + x_n x_{n+1} = \Omega_{n+1} + x_n x_{n+1}. \end{aligned}$$

Звідси, використовуючи припущення індукції, одержимо:

$$\begin{aligned} \Omega_{n+1} &= \tilde{\Omega}_n - x_n x_{n+1} = \tilde{y}_1^2 + \frac{3}{4}\tilde{y}_2^2 + \frac{4}{6}\tilde{y}_3^2 + \frac{5}{8}\tilde{y}_4^2 + \dots + \frac{k+1}{2k}\tilde{y}_k^2 + \dots + \frac{n+1}{2n}\tilde{y}_n^2 - x_n x_{n+1} = \\ &= \left(x_1 + \frac{x_2 + x_3 + \dots + x_n + x_{n+1}}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(x_2 + \frac{x_3 + x_4 + \dots + x_n + x_{n+1}}{3} \right)^2 + \dots + \\ &\quad + \frac{n+1}{2n} (x_n + x_{n+1})^2 - x_n x_{n+1}. \end{aligned}$$

Перетворимо окремо два останніх доданки:

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{2n} (x_n + x_{n+1})^2 - x_n x_{n+1} &= \frac{n+1}{2n} x_n^2 + \frac{n+1}{n} x_n x_{n+1} + \frac{n+1}{2n} x_{n+1}^2 - x_n x_{n+1} = \\ &= \frac{n+1}{2n} x_n^2 + \frac{1}{n} x_n x_{n+1} + \frac{n+1}{2n} x_{n+1}^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n+1}{2n} \left(x_n^2 + \frac{2}{n+1} x_n x_{n+1} + \left(\frac{x_{n+1}}{n+1} \right)^2 \right) + \frac{n+1}{2n} x_{n+1}^2 - \frac{x_{n+1}^2}{2n(n+1)} = \\
&= \frac{n+1}{2n} \left(x_n + \frac{x_{n+1}}{n+1} \right)^2 + \frac{(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)} x_{n+1}^2 = \frac{n+1}{2n} \left(x_n + \frac{x_{n+1}}{n+1} \right)^2 + \frac{n+2}{2(n+1)} x_{n+1}^2 = \\
&= \frac{n+1}{2n} y_n^2 + \frac{n+2}{2(n+1)} y_{n+1}^2,
\end{aligned}$$

звідки й випливає потрібний результат.

Випишемо матрицю T переходу від старих змінних до нових:

$$y = Tx = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}.$$

11). Завдання для самостійної роботи: [7], №№ 1102 – 1103.

12. Практичне заняття II.12. Квадратичні форми. Зведення до канонічного вигляду ортогональним (унітарним) перетворенням.

Означення 12.1. Відображення $\Omega: E_n \times E_n \rightarrow \mathbb{C}$ називається білінійною формою, якщо $\forall x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in E_n, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ воно має властивості:

$\Omega(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 \Omega(x_1, y) + \alpha_2 \Omega(x_2, y),$ $\Omega(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \overline{\beta_1} \Omega(x, y_1) + \overline{\beta_2} \Omega(x, y_2).$	(12.1)
---	--------

Білінійній формі взаємно однозначно відповідає матриця (матриця білінійної форми):

$\Omega(x, y) = (Ax, y).$	(12.2)
---------------------------	--------

В конкретних базисах білінійна форма запишеться у вигляді

$\begin{aligned}\Omega(x, y) &= y^T Ax = (y_1 \quad \dots \quad y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (Ax, y) = \\ &= \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \sum_{k,j=1}^n a_{kj} x_j y_k.\end{aligned}$	(12.3)
--	--------

Означення 12.2. Рангом білінійної форми називається ранг її матриці.

Означення 12.3. Білінійна Ω форма називається симетричною, якщо $\Omega(y, x) = \Omega(x, y)$. Далі будемо розглядати саме такі форми.

Легко бачити, що в разі унітарного простору оператор A , що відповідає симетричній формі, буде самоспряженим.

Означення 12.4. $\Omega(x, x)$ називається квадратичною формою.

В конкретному базисі квадратична форма запишеться у вигляді:

$\begin{aligned}\Omega(x, x) &= x^T Ax = (x_1 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (Ax, x) = \\ &= \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = \sum_{k,j=1}^n a_{kj} x_j x_k =\end{aligned}$	(12.4)
---	--------

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n.$$

Як і в теорії самоспряжених операторів, в теорії квадратичних форм постає задача зведення її до канонічного вигляду:

$$\Omega(x, x) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2. \quad (12.5)$$

Для цього треба вибрати відповідний базис. Це можна зробити неєдиним способом. В попередньому виразі, взагалі кажучи, можуть бути ненульовими не всі коефіцієнти, якщо її ранг $r < n$. Тобто, форма зведеться до виразу

$$\Omega(x, x) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{rr}x_r^2. \quad (12.6)$$

Нехай $[U]_{eg}$ - ортогональна (унітарна у комплексному випадку) матриця оператора U переходу від канонічного базису $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ до базису $g = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, $Ue_k = g_k, k = 1, \dots, n$. $Ag_k = \lambda_k g_k, k = 1, \dots, n \Rightarrow [A]_{ee} [g_k]_e = \lambda_k [g_k]_e$, власних векторів симетричного (ермітового) оператора A . Тоді, як відомо, матриця переходу переводить вектор-стовпчик з $\mathbb{R}^n$, що відповідає розкладу довільного вектора $[y]_g$ у новому базисі з власних векторів у вектор-стовпчик $[x]_e$ розкладу того самого вектора у старому, канонічному базисі: $[x]_e = [U]_{eg} [y]_g$. Врахуємо це при перетворенні квадратичної форми:

$$\begin{aligned} \Omega(x, x) &= ([A]_{ee} [x]_e, [x]_e) = ([A]_{ee} [U]_{eg} [y]_g, [U]_{eg} [y]_g) = \\ &= \left(([U]_{eg})^* [A]_{ee} [U]_{eg} [y]_g, [y]_g \right) = \left(([U]_{eg})^{-1} [A]_{ee} [U]_{eg} [y]_g, [y]_g \right) = ([A]_{gg} [y]_g, [y]_g). \end{aligned}$$

Тут був врахований той факт, що спряжений до унітарного оператора – це його обернений, а також формула переходу до матриці оператора у іншому базисі.

Матриця $[A]_{gg}$ діагональна з власними числами на головній діагоналі. Таким

чином одержано зведення матриці до канонічного вигляду, що в розгорнутому вигляді відповідає (14.7).

Задача 12.1. Ортогональним перетворенням привести до канонічного вигляду квадратичну форму

$$\Omega(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Запишемо матрицю квадратичної форми і знайдемо її власні числа і вектори:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 4\lambda^2 - 9\lambda - 5 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5).$$

1). $\lambda = -1$. Знайдемо власні вектори, що відповідають цьому двократному власному числу:

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = -x_1 - x_2.$$

Вектори з підпростору $\ker(A + I)$ мають вигляд:

$$\ker(A + I) = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x_1; x_2; x_3) = (x_1; x_2; -x_1 - x_2)\}.$$

Поклавши $x_1 = x_2 = 1 \Rightarrow x_3 = -2$, а потім $x_1 = 1, x_2 = -1 \Rightarrow x_3 = 0$, одержимо ортогональні вектори: $\tilde{X}_1 = (1, -1, 0)^T, \tilde{X}_2 = (1, 1, -2)^T$. Після нормування одержимо базис власного підпростору, що відповідає власному числу $\lambda = -1$:

$$X_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T, X_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right)^T.$$

1). $\lambda = 5$. Знайдемо власний вектор, що відповідає цьому простому власному числу:

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_3 = x_2 = x_1.$$

Звідси знаходимо нормований власний вектор: $X_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T$.

Тепер можна виписати матрицю U оператора переходу від канонічного базису до базису власних векторів:

$$[U]_{eg} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

При цьому

$$X_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T = [U]_{eg} (1; 0; 0)^T,$$

$$X_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right)^T = [U]_{eg} (0; 1; 0)^T,$$

$$X_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T = [U]_{eg} (0; 0; 1)^T.$$

Зауважимо, що, оскільки $\det U = 1 > 0$, ця матриця не змінює орієнтацію систем базисних векторів. Оскільки для ортогонального оператора U має місце співвідношення $U^* = U^T = U^{-1}$, то

$$[U]_{eg}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

У базисі з власних векторів квадратична форма має канонічну форму:

$$\Omega(X, X) = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$$

де $[y]_g = [U]_{eg}^{-1} [x]_e$. Матриця квадратичної форми:

$$[A]_{gg} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Радимо читачу перевірити співвідношення $[U]_{eg} [A]_{gg} ([U]_{eg})^{-1} = [A]_{ee}$.

Задача 12.2. Методом ортогональних перетворень привести до канонічного вигляду квадратичну форму

$$\Omega_n(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

Зауважимо, що раніше ця форма була зведена до канонічного вигляду методом Лагранжа.

Для зручності розглянемо допоміжну форму

$$\tilde{\Omega}_n(x, x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + \dots + 2x_n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2x_i x_j = 2x_1^2 + 2x_2^2 + \dots + 2x_n^2 + \sum_{i, j=1}^n x_i x_j.$$

Тоді $\Omega_n(x, x) = \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_n(x, x)$. Формі $\tilde{\Omega}_n(x, x)$ відповідає симетрична матриця

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо її власні числа:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & \dots & -1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -1 & -1 & \dots & \lambda - 2 \end{vmatrix}.$$

Підставляючи $\lambda = 1$, одержимо визначник, у якого всі рядки рівні і ранг відповідної матриці дорівнює одиниці, звідки випливає, що $\lambda_1 = 1$ - корінь характеристичного рівняння кратності $n-1$. З симетричності матриці квадратичної форми робиться висновок, що власні вектори матриці утворюють підпростір розмірності $n-1$. Ще одне власне число λ_2 знайдемо, використовуючи вигляд вільного члена характеристичного многочлена матриці: $(-1)^{n-1} \lambda_1^{n-1} \lambda_2 = (-1)^{n-1} \det(A) \Rightarrow \lambda_2 = \det(A)$. Отже, досить знайти визначник квадратичної форми матриці:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n+1 & n+1 & \dots & n+1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix} = (n+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (n+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = n+1.$$

Отже, $\lambda_2 = n + 1$.

Звідки зразу робиться висновок, що в нових змінних, якщо вибрати базис власних векторів матриці квадратичної форми, квадратична форма буде мати канонічний вигляд, тобто, суми квадратів з коефіцієнтами, які є власними числами матриці квадратичної форми:

$$\Omega_n(x, x) = \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_n(x, x) = \frac{1}{2} \left(2x_1^2 + 2x_2^2 + \dots + 2x_n^2 + \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \right) =$$

$$\frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2 + (n+1)y_n^2) = \frac{1}{2} y_1^2 + \frac{1}{2} y_2^2 + \dots + \frac{1}{2} y_{n-1}^2 + \frac{n+1}{2} y_n^2,$$

де $y_1, \dots, y_{n-1}, y_n$ лінійно залежать від $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$. Цей зв'язок ми знайдемо, одержавши матрицю переходу від канонічного базису до базису з власних векторів матриці квадратичної форми. Візьмемо $\lambda_1 = 1$. Власні вектори матриці допоміжної квадратичної форми знайдемо з системи

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n = 0.$$

Зрозуміло, що базисні вектори, виходячи з даного співвідношення, можна вибрати нескінченною кількістю способів. Виберемо їх так, щоб вони були попарно ортогональні і нормовані. Наприклад, таким чином:

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1; -1; \dots; 0), g_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1; 1; -2; \dots; 0), \dots, g_k = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}(1; 1; \dots; 1; -k; 0; \dots; 0),$$

$$g_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}(1; 1; \dots; 1; -(n-1); 0)$$

Читає з легкістю перевірить, що всі такі вектори між собою попарно ортогональні і їхні норми дорівнюють одиниці.

Знайдемо тепер власний вектор, що відповідає власному числу $n+1$ (будемо виписувати тільки основну матрицю системи, оскільки права частина – це стовпчик з нулів):

$$\begin{aligned} (A - (n+1)I)x = 0 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \dots & 1-n & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тут до останнього рядка були додані всі попередні рядки. Тепер будемо віднімати перший рядок від всіх інших крім останнього. В результаті будемо мати:

$$\begin{pmatrix} 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ n & -n & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ n & 0 & \dots & -n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язуючи друге, третє і так до $n-1$ -го рівняння, одержимо:

$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1}$. Тепер з першого рівняння знайдемо:

$$(1-n)x_1 + (n-2)x_1 + x_n = 0 \Rightarrow x_n = x_1.$$

Остаточно довільний власний вектор матриці квадратичної форми, що відповідає власному числу $\lambda_2 = (n+1)$ має вигляд $(x_1; x_1; \dots; x_n)$. Після нормування одержимо: $g_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}; \frac{1}{\sqrt{n}}; \dots; \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$. Тепер виписуємо ортогональну матрицю $[U]_{eg}$ переходу від канонічного базису до базису з власних векторів матриці квадратичної форми:

$$[U]_{eg} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{2\sqrt{3}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \cdot & \cdot & & \dots & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{n-1}{\sqrt{(n-1)n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}.$$

З ортогональності цієї матриці випливає, що обернена до неї – це її транспонована матриця. Отже,

$$[U]_{eg}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{2}{2\sqrt{3}} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \dots & -\frac{n-1}{\sqrt{(n-1)n}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо зв'язок між старими і новими координатами:

$$[y]_g = [U]_{eg}^{-1} [x]_e =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{2}{2\sqrt{3}} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \dots & -\frac{n-2}{\sqrt{(n-1)n}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \\ \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 + x_2 - 2x_3) \\ \frac{1}{2\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}(x_1 + \dots + x_{n-2} - (n-2)x_{n-1}) \\ \frac{1}{\sqrt{n}}(x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n) \end{pmatrix}.$$

Зауваження: цілком очевидно, що ортонормований базис з власних векторів можна вибрати неєдиним способом (навіть нескінченною кількістю), тому і формул переходу від старих змінних до нових існує безліч. Більш точно: нехай

$$u_1 = (u_{11}; u_{21}; \dots; u_{n1})^T, \dots, u_{n-1} = (u_{1,n-1}; u_{2,n-1}; \dots; u_{n,n-1})^T, u_n = (u_{1,n}; u_{2,n}; \dots; u_{n,n})^T \quad -$$

ортонормований базис з власних векторів матриці квадратичної форми. Записуючи ці стовпчики в матрицю (там вони повинні бути теж стовпчиками), одержимо матрицю переходу, як і в попередньому випадку. Тоді нові змінні, в яких матриця буде мати канонічний вигляд, запишуться за допомогою вже відомої формули: $[y]_g = [U]_{eg}^{-1} [x]_e$. В більш розгорнутому вигляді читач виписе ці формули самостійно. Треба пам'ятати, що для ортогональної матриці обернена до неї – це її транспонована.

Задача 12.3. Методом Якобі привести квадратичну форму до канонічного вигляду:

$$\Omega(x, x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

Обчислюючи кутові мінори матриці квадратичної форми, одержимо:

$$\Delta_0 = 1, \Delta_1 = 2, \Delta_2 = -\frac{1}{4}, \Delta_3 = -\frac{17}{4} \Rightarrow a'_{11} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} = \frac{1}{2}, a'_{22} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = -8, a'_{33} = \frac{\Delta_2}{\Delta_3} = \frac{1}{17}.$$

Вводячи нові змінні за методом Якобі,ведемо квадратичну форму до вигляду:

$$\Omega(x(x'), x(x')) = 2(x'_1)^2 - 8(x'_2)^2 + \frac{1}{17}(x'_3)^2.$$

Покажемо, як переходять до нового базису у методі Якобі. Перехід здійснюється за формулами:

$$\begin{cases} e'_1 = t_{11}e_1, \\ e'_2 = t_{12}e_1 + t_{22}e_2, \\ e'_3 = t_{13}e_1 + t_{23}e_2 + \dots + t_{33}e_3. \end{cases}$$

Як відомо з теорії, коефіцієнти розкладу векторів нового базису за старим знаходяться як розв'язки лінійних систем:

$$\begin{cases} a_{11}t_{1k} + a_{12}t_{2k} + \dots + a_{1k}t_{kk} = 0, \\ a_{21}t_{1k} + a_{22}t_{2k} + \dots + a_{2k}t_{kk} = 0, \\ \dots \\ a_{k-1,1}t_{1k} + a_{k-1,2}t_{2k} + \dots + a_{k-1,k}t_{kk} = 0, \\ a_{k1}t_{1k} + a_{k2}t_{2k} + \dots + a_{kk}t_{kk} = 1. \end{cases}$$

1). $k = 1$.

$$t_{11} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{1}{2}.$$

2). $k = 2$.

$$\begin{cases} a_{11}t_{12} + a_{12}t_{22} = 0, \\ a_{12}t_{12} + a_{22}t_{22} = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t_{12} + \frac{3}{2}t_{22} = 0, \\ \frac{3}{2}t_{12} + t_{22} = 1. \end{cases} \Rightarrow t_{12} = 6, t_{22} = -8.$$

2). $k = 3$.

$$\begin{cases} a_{11}t_{13} + a_{12}t_{23} + a_{13}t_{33} = 0, \\ a_{12}t_{13} + a_{22}t_{23} + a_{23}t_{33} = 0, \\ a_{13}t_{13} + a_{23}t_{23} + a_{33}t_{33} = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t_{13} + \frac{3}{2}t_{23} = 0, \\ \frac{3}{2}t_{13} + t_{23} + 2t_{33} = 0, \\ 2t_{23} + t_{33} = 1. \end{cases} \Rightarrow t_{13} = \frac{8}{17}, t_{23} = -\frac{12}{17}, t_{33} = \frac{1}{17}.$$

Запишемо тепер матрицю оператора переходу до нового базису:

$$[T]_{e,e'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 6 & \frac{8}{17} \\ 0 & -8 & -\frac{12}{17} \\ 0 & 0 & \frac{1}{17} \end{pmatrix}.$$

Тоді перехід від нових координат до старих знаходиться за формулою

$$[x]_e = [T]_{e,e'} [x]_{e'}.$$

Зауважимо, що на діагоналі матриці знаходяться раніше знайдені коефіцієнти квадратичної форми у нових координатах.

Задача 12.4. Знайти ранг та сигнатуру квадратичної форми

$$\Omega(x, x) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 = 2x_1(x_2 + x_3).$$

Матриця квадратичної форми:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці, отже, і самої форми дорівнює 2. Зробимо заміну

$$x_1 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2),$$

$$x_2 + x_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

В результаті одержимо: $\Omega(x(y), x(y)) = \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2$. Звідси одержимо сигнатуру квадратичної форми – вона дорівнює 0.

12). Завдання для самостійної роботи: [7], №№ 1175 – 1178.

13. Практичне заняття П.13. Канонічні рівняння поверхонь другого порядку

Задача 13.1. Написати рівняння поверхні, утвореної обертанням еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0. \text{ навколо осі } Ox.$$

Розв'язання. Як відомо, в рівняння кривої, що обертається навколо осі Ox , треба замість квадрата іншої змінної, в даному випадку, y^2 , підставити $y^2 + z^2$.

В результаті одержимо: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$. Це рівняння еліпсоїда обертання.

Задача 13.2. Написати рівняння поверхні, утвореної обертанням гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \text{ навколо осі } Oz.$$

Розв'язання. Як відомо, в рівняння кривої, що обертається навколо осі Oz , треба замість квадрата іншої змінної, в даному випадку, x^2 , підставити $x^2 + y^2$.

В результаті одержимо: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$. Це рівняння однопорожнинного гіперболоїда обертання.

Задача 13.3. Написати рівняння поверхні, утвореної обертанням параболи $x^2 = 2pz, y = 0$ навколо осі Oz .

Розв'язання. Як відомо, в рівняння кривої, що обертається навколо осі Oz , треба замість квадрата іншої змінної, в даному випадку, x^2 , підставити $x^2 + y^2$.

В результаті одержимо: $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} = 2z$. Це рівняння еліптичного параболоїда обертання.

Задача 13.4. Написати рівняння поверхні, утвореної обертанням пари прямих $z^2 = k^2x^2, y = 0$ навколо осі Oz .

Розв'язання. Як відомо, в рівняння кривої, що обертається навколо осі Oz , треба замість квадрата іншої змінної, в даному випадку, x^2 , підставити $x^2 + y^2$.

В результаті одержимо: $z^2 = k^2x^2 + k^2y^2$. Це рівняння конуса обертання.

Задача 13.5. Написати рівняння дотичної до еліпсоїда $4x^2 + 16y^2 + 8z^2 = 1$ площини, паралельної до площини $x - 2y + 2z + 17 = 0$. Знайти відстань між цими площинами.

Розв'язання. Виходячи з умови, будемо шукати рівняння дотичної площини у вигляді $x - 2y + 2z + d = 0$. Як відомо, рівняння дотичної площини до еліпсоїда

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в точці $(x_0; y_0; z_0)$ записується у вигляді $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$, що в даному випадку дає: $4x_0 x + 16y_0 y + 8z_0 z = 1$. З умови паралельності площин маємо: $\frac{4x_0}{1} = \frac{16y_0}{-2} = \frac{8z_0}{2} \Rightarrow x_0 = z_0 = -2y_0$. Підставляючи в рівняння еліпсоїда, одержимо:

$$4(-2y_0)^2 + 16y_0^2 + 8(-2y_0)^2 = 1 \Rightarrow y_0^2 = \frac{1}{64} \Rightarrow y_0 = \pm \frac{1}{8}. \text{ Звідси } x_0 = z_0 = \mp \frac{1}{4}. \text{ Отже,}$$

$$-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + d = 0 \Rightarrow d = 1, \text{ А також } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + d = 0 \Rightarrow d = -1. \text{ Маємо дві}$$

дотичні площини: маємо дві дотичні площини:

$$x - 2y + 2z + 1 = 0, x - 2y + 2z - 1 = 0.$$

Використовуючи вирази для відхилень площин від початку координат,

$$\text{отримаємо відстань між площинами: } d = |\delta_1 - \delta_2| = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

Задача 13.6. Написати рівняння конуса з вершиною в початку координат $O(0;0;0)$ з напрямною лінією, яка визначається поверхнями $x^2 - 2z + 1 = 0, y - z + 1 = 0$.

Розв'язання. Нехай точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ задовольняє рівнянню напрямної.

$$\text{Звідси } z_0 = \frac{x_0^2 + 1}{2}, y_0 = z_0 - 1 = \frac{x_0^2 + 1}{2} - 1 = \frac{x_0^2 - 1}{2}. \text{ Рівняння прямої, яка проходить}$$

$$\text{через точки } O(0;0;0) \text{ і } M_0\left(x_0; \frac{x_0^2 - 1}{2}; \frac{x_0^2 + 1}{2}\right):$$

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{\frac{x_0^2 - 1}{2}} = \frac{z}{\frac{x_0^2 + 1}{2}}.$$

Виключимо x_0 з цієї системи:

$$\begin{cases} \frac{2y}{x} = \frac{x_0^2 - 1}{x_0} \\ \frac{2z}{x} = \frac{x_0^2 + 1}{x_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2y}{x} + \frac{2z}{x} = \frac{2x_0^2}{x_0} \\ \frac{2z}{x} - \frac{2y}{x} = \frac{2}{x_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{z}{x} = x_0 \\ \frac{z}{x} - \frac{y}{x} = \frac{1}{x_0} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{z}{x} + \frac{y}{x} \right) \left(\frac{z}{x} - \frac{y}{x} \right) = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{z^2}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = z^2.$$

Задача 13.7. Написати рівняння кругового конуса з вершиною в точці, що лежить у площині yOz . Відомо, що точка $M_1\left(1;1;-\frac{5}{2}\right)$ належить конусу, і його віссю L є пряма $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{-1}$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку координати вершини $M^*(0; y^*; z^*)$ конуса, розв'язавши лінійну систему

$$\begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{-1}, \\ x=0. \end{cases} \Rightarrow M^*(0;1;0).$$

Загальним підходом до задач такого характеру є знаходження рівняння напрямної лінії конуса. Проведемо площину, що проходить через дану в умові задачі точку $M_1\left(1;1;-\frac{5}{2}\right)$, ортогональну до осі конуса. Очевидно, цим рівнянням буде $2(x-1) - 2(y-1) - \left(z + \frac{5}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2x - 2y - z - \frac{5}{2} = 0$. Знайдемо точку перетину M_2 цієї площини з віссю конуса:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2}, \\ \frac{x-2}{2} = \frac{z+1}{-1}, \\ 2x - 2y - z - \frac{5}{2} = 0. \end{cases} \Rightarrow x=1, y=0, z=-\frac{1}{2}.$$

$\left|\overline{M_1M_2}\right|^2 = (1-1)^2 + (1-0)^2 + \left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 = 5$. Отже, основою конуса з віссю L є круг радіусу $\sqrt{5}$. Його границя, коло такого ж радіусу, можна мислити як перетин одержаної площини зі сферою радіуса $\sqrt{5}$ з центром в точці $M_2\left(1;0;-\frac{1}{2}\right)$. Отже система рівнянь, яка дає напрямну лінію конуса, в якій координати лінії будемо позначати x_0, y_0, z_0 , запишеться у вигляді

$$\begin{cases} 2x_0 - 2y_0 - z_0 - \frac{5}{2} = 0, \\ (x_0 - 1)^2 + y_0^2 + \left(z_0 + \frac{1}{2}\right)^2 = 5. \end{cases}$$

Рівняння довільної твірної конуса має вигляд

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y-1}{y_0-1} = \frac{z}{z_0}.$$

Ми одержимо рівняння конуса після виключення параметрів x_0, y_0, z_0 з системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_0 - 2y_0 - z_0 - \frac{5}{2} = 0, \\ (x_0 - 1)^2 + y_0^2 + \left(z_0 + \frac{1}{2}\right)^2 = 5, \\ \frac{x}{x_0} = \frac{y-1}{y_0-1} = \frac{z}{z_0}. \end{cases}$$

Після позначення $\frac{x}{x_0} = \frac{y-1}{y_0-1} = \frac{z}{z_0} = \frac{1}{t}$ одержимо:

$$\begin{cases} x_0 = tx, \\ y_0 = t(y-1)+1, \\ z_0 = tz. \end{cases}$$

Підставляючи в перше рівняння системи будемо мати:

$$t(2x - 2(y-1) - z) = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{1}{t} = \frac{2}{9}(2x - 2y - z + 2).$$

З другого рівняння системи маємо:

$$(tx-1)^2 + (t(y-1)+1)^2 + \left(tz + \frac{1}{2}\right)^2 = 5 \Rightarrow$$

$$\left(x - \frac{1}{t}\right)^2 + \left(y - 1 + \frac{1}{t}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2t}\right)^2 = \frac{5}{t^2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{2}{9}(2x - 2y - z + 2)\right)^2 + \left(y - 1 + \frac{2}{9}(2x - 2y - z + 2)\right)^2 + \left(z + \frac{1}{9}(2x - 2y - z + 2)\right)^2 = \\ = \frac{20}{81}(2x - 2y - z + 2)^2. \end{aligned}$$

Введемо позначення $2x - 2y - z + 2 = u$. Тоді рівняння запишеться у вигляді:

$$(9x - 2u)^2 + (9y - 9 + 2u)^2 + (9z + u)^2 = 20u^2 \Rightarrow$$

$$81x^2 + 81y^2 + 81z^2 - 11u^2 - 36xu + 36yu + 36zu - 162y - 36u = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 81x^2 + 81y^2 + 81z^2 - u(11u + 36x - 36y - 36z) - 162y - 36u = 0.$$

Читає, самостійно підставивши значення $u = 2x - 2y - z + 2$, одержить рівняння конуса.

Задача 13.8. Написати рівняння асимптотичного конуса двопорожнинного гіперболоїда

$$-x^2 + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1.$$

Відповідь: $x^2 - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 0$.

13). Завдання для самостійної роботи: [7], №№ 1175 – 1178.

14. Практичне заняття II.14. Лінійчаті поверхні

Задача 15.1. Знайти рівняння поверхні, утвореною рухом прямої, що ковзає по трьох прямих:

$$I. \begin{cases} x = z, \\ y = -1, \end{cases} \quad II. \begin{cases} x = -z, \\ y = 1, \end{cases} \quad III. \begin{cases} x = 1, \\ y = z. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо рівняння пучка прямих, що проходять через першу пряму:

$$x - z + \lambda(y + 1) = 0.$$

Нехай довільна площина з цього пучка перетинає третю пряму в точці $P_0(x_0, y_0, z_0): x_0 = 1, y_0 = z_0$. Підставляючи ці значення в рівняння пучка, знайдемо параметр λ :

$$1 - z_0 + \lambda(z_0 + 1) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{z_0 - 1}{z_0 + 1}.$$

Рівняння пучка площин, що проходять через точку $P_0(1, y_0, y_0)$, мають вигляд:

$x - z + \frac{z_0 - 1}{z_0 + 1}(y + 1) = 0.$	(14.1)
---	--------

Запишемо тепер рівняння пучка площин, що проходять через другу пряму:

$$x + z + \mu(y - 1) = 0.$$

Визначимо параметр μ , для тієї площини, що перетинає третю пряму в тій самій точці $P_0(1, y_0, y_0)$. Підставимо її координати в рівняння пучка:

$$1 + z_0 + \mu(z_0 - 1) = 0, \text{ звідки } \mu = -\frac{z_0 + 1}{z_0 - 1}. \text{ Рівняння пучка буде мати вигляд:}$$

$x + z - \frac{z_0 + 1}{z_0 - 1}(y - 1) = 0.$	(14.2)
---	--------

Шукана пряма задається системою (15.1)-(15.2). Виключаючи з неї z_0 , одержимо рівняння поверхні:

$$\frac{z_0 - 1}{z_0 + 1} = \frac{z - x}{y + 1}, \frac{z_0 + 1}{z_0 - 1} = \frac{z + x}{y - 1} \Rightarrow \frac{z + x}{y - 1} \frac{z - x}{y + 1} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Це лінійчата поверхня, однопорожнинний гіперболоїд обертання.

Задача 14.2. Знайти рівняння поверхні, утвореною рухом прямої, що ковзає по двох прямих:

$$I. \begin{cases} x = y, \\ z = 0, \end{cases} II. \begin{cases} x - y = 2, \\ x + y = z \end{cases}$$

і залишається паралельною площині $x + y = 0$.

Розв'язання. Напишемо рівняння пучка площин, що проходять через другу пряму: $x - y - 2 + \lambda(x + y - z) = 0$. Нехай $P_0(x_0, y_0, z_0), x_0 = y_0, z_0 = 0$ - точка перетину довільної площини пучка з першою прямою. Визначимо з цієї умови

$$\lambda : -2 + 2\lambda x_0 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{x_0}. \text{ Рівняння пучка має вигляд: } x - y - 2 + \frac{1}{x_0}(x + y - z) = 0.$$

Напишемо рівняння площини, яка проходить через точку $P_0(x_0, x_0, 0)$ паралельно площині $x + y = 0$: $(x - x_0) + (y - x_0) = 0$. Це рівняння і рівняння пучка визначають потрібну пряму. Виключаючи з цих рівнянь x_0 , одержимо

$$\text{шукане рівняння поверхні: } x_0 = \frac{x + y}{2} \Rightarrow x - y - 2 = -\frac{2}{x + y}(x + y - z). \text{ Звідси}$$

$$x^2 - y^2 = 2z.$$

14). Завдання для самостійної роботи: [8], №№ 1181 – 1184.

15. Практичне заняття П.15-16. Зведення рівнянь поверхонь другого порядку до канонічного вигляду

В розгорнутому вигляді загальне рівняння 2-го порядку від трьох змінних має вигляд:

$2\Omega(\xi, \xi) \triangleq a_{11}\xi_1^2 + a_{22}\xi_2^2 + a_{33}\xi_3^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + 2a_{13}\xi_1\xi_3 + 2a_{23}\xi_2\xi_3 +$ $+ 2a_{14}\xi_1 + 2a_{24}\xi_2 + 2a_{34}\xi_3 + a_{44} = 0.$	(15.1)
---	--------

Ввівши позначення

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$	(15.2)
---	--------

$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}, b = a_{44},$	(15.3)
--	--------

перепишемо рівняння у вигляді

$(A\xi, \xi) + 2(a, \xi) + b = 0,$	(15.4)
------------------------------------	--------

де A - симетрична матриця, в якій хоча б один позадіагональний елемент не дорівнює нулю (інакше квадратична форма $\Omega(\xi, \xi) = (A\xi, \xi)$ мала б діагональний вигляд) .

Зробимо перетворення зсуву так, щоб позбавитись від лінійних членів. Нехай

$x = \xi + r \Rightarrow \xi = x - r.$	(15.5)
--	--------

Тут x - вектор старих координат, x' - вектор нових координат, $r \sim (x_{01}, x_{02}, x_{03})^T$ - вектор зсуву нової системи до старої. Відзначимо також, що r - радіус-вектор нового початку координат системи $Ox_1x_2x_3$ в системі $O\xi_1\xi_2\xi_3$.

Після заміни (15.5) рівняння (15.4) перепишеться у вигляді

$(Ax, x) + 2(Ar + a, x) + ((Ar, r) + 2(a, r) + b) = 0.$	(15.6)
---	--------

Будемо тепер вимагати виконання співвідношення

$Ar + a = 0.$	(15.7)
---------------	--------

Запишемо також цю умову у координатній формі:

$a'_{13} = \frac{1}{2} \frac{\partial F(x_{01}, x_{02}, x_{03})}{\partial \xi_1} = a_{11}x_{01} + a_{12}x_{02} + a_{13}x_{03} + a_{14} = 0,$ $a'_{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial F(x_{01}, x_{02}, x_{03})}{\partial \xi_2} = a_{12}x_{01} + a_{22}x_{02} + a_{23}x_{03} + a_{24} = 0,$ $a'_{33} = \frac{1}{2} \frac{\partial F(x_{01}, x_{02}, x_{03})}{\partial \xi_3} = a_{12}x_{01} + a_{22}x_{02} + a_{23}x_{03} + a_{24} = 0,$ $a'_{33} = 2F(x_{01}, x_{02}, x_{03}) = a_{11}x_{01}^2 + a_{22}x_{02}^2 + a_{33}x_{03}^2 +$ $+ 2a_{12}x_{01}x_{02} + 2a_{13}x_{01}x_{03} + 2a_{23}x_{02}x_{03} + 2a_{14}x_{01} + 2a_{24}x_{02} + 2a_{34}x_{03} + a_{44}.$	(15.8)
---	--------

Якщо $\det(A) \neq 0$, можна знайти вектор зсуву з умови

$Ar = -a \Rightarrow r = -A^{-1}a.$	(15.9)
-------------------------------------	--------

(Випадок $\det(A) = 0$ розглянемо окремо.)

Якщо ввести позначення

$$(Ar, r) + 2(a, r) + b = -(a, r) + 2(a, r) + b = (a, r) + b = -C,$$

рівняння перепишеться у вигляді

$(Ax, x) = C.$	(15.10)
----------------	---------

При перетворенні симетрії у просторі

$x = -\tilde{x}$ рівняння (18.10) не змінить свого вигляду:

$$(Ax, x) = (-A\tilde{x}, -\tilde{x}) = (A\tilde{x}, \tilde{x}).$$

Отже, крива симетрична відносно початку координат і тому називається центральною. Вона характеризується умовою $\det(A) \neq 0$. Приклади центральних поверхонь другого порядку – це еліпсоїд, гіперболоїд. Сюди

можна також включити конус, що має вершину в початку координат. Він також має рівняння другого степеня: $x_3^2 = \alpha x_1^2 + \beta x_2^2$.

Задача 15.1. Звести рівняння другого степеня

$$x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0.$$

до канонічного вигляду.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді (15.4): $(Au, u) + 2(a, u) + b = 0$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}:$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) + 2 \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) + 14 = 0.$$

Треба визначити, чи є ця поверхня центральною. Обчислимо визначник матриці квадратичної форми:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -8 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -36 \neq 0.$$

Отже, поверхня центральна.

Знайдемо матрицю, обернену до матриці квадратичної форми:

$$A^{-1} = -\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Згідно з (15.9) маємо координати центру поверхні:

$$r = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = -A^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Введемо нові координати за формулами:

$$u' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо вільний член рівняння у нових координатах за формулою:

$$C = - \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) - 14 = -6.$$

У нових координатах рівняння запишеться таким чином:

$$(Au', u') = 6 \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} u', u' \right) = 6.$$

Знайдемо власні числа і вектори матриці квадратичної форми:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 & -1 \\ 3 & \lambda - 1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 =$$

$$= \lambda^2(\lambda + 2) - 9(\lambda^2 - 4) = \lambda^2(\lambda + 2) - 9(\lambda + 2)(\lambda - 2) = (\lambda + 2)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) =$$

$$= (\lambda + 2)(\lambda - 3)(\lambda - 6).$$

Отже, власні числа: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$.

Знайдемо відповідні їм власні вектори.

1). $\lambda_1 = -2$.

$$(A + 2I)x = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси одержимо нормований власний вектор: $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right)^T$.

2). $\lambda_1 = 3$.

$$(A - 3I)x = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Одержимо нормований власний вектор: $u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T$.

2). $\lambda_1 = 6$.

$$(A - 3I)x = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -3 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Одержимо нормований власний вектор: $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}} \right)^T$.

Легко бачити, що матриця переходу від канонічного базису до базису власних векторів має додатний визначник, отже, при такому переході не змінюється орієнтація.

Ця матриця переходу має наступний вигляд:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Нові координати пов'язані зі старими за формулою $(x''; y''; z'') = T^{-1}(x', y', z')$.

Канонічне рівняння у нових координатах має вигляд:

$$-2(x'')^2 + 3(y'')^2 + 6(z'')^2 = -6 \Rightarrow \frac{(x'')^2}{3} - \frac{(y'')^2}{2} - (z'')^2 = 1.$$

Це рівняння двопорожнинного гіперболоїда.

Покажемо, як можна знайти коефіцієнти, використовуючи інваріанти рівняння.

$$I_4 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & -6 \\ -2 & 4 & -5 & 14 \end{vmatrix} = -216.$$

$$\text{Звідси } a''_{44} = \frac{I_4}{I_3} = \frac{-216}{-36} = 6.$$

Запишемо тепер рівняння (15.13):

$$-2(x'')^2 + 3(y'')^2 + 6(z'')^2 + 6 = 0.$$

А це співпадає з результатом, отриманим раніше.

Задача 15.2. Звести рівняння другого степеня

$$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 - 14x_1 - 4x_2 + 14x_3 + 16 = 0$$

до канонічного вигляду.

Розв'язання. Маємо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо інваріанти поверхні.

$$I_3 = \delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & -6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 54.$$

Поверхня центральна

$$I_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & -7 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 & 7 \\ -7 & -2 & 7 & 16 \end{vmatrix} = 0.$$

Поверхня вироджена. Єдина центральна вироджена поверхня - це конус.

Характеристичне рівняння:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 27\lambda - 54 = (\lambda + 3)^2 (\lambda - 6).$$

Звідси канонічне рівняння має вигляд:

$$-3(x'_1)^2 - 3(x'_2)^2 + 6(x'_3)^2 = 0 \Leftrightarrow (x'_1)^2 + (x'_2)^2 - 2(x'_3)^2 = 0.$$

Координати центра поверхні (вершини конуса) знаходяться за формулою:

$$r_0 = -A^{-1}a = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицю перетворення координат читач запише самостійно, знайшовши власні вектори матриці.

Наведемо теоретичні відомості у **параболічному** випадку.

Два розв'язки характеристичного рівняння ненульові, наприклад, $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$, а третій $\lambda_3 = 0$. В цій ситуації $I_3 = 0$. Поверхня нецентральна або має нескінченну кількість центрів. Виберемо новими осями координат осі з напрямними векторами, які є власними для матриці A , вважаючи, що вони утворюють праву трійку. Перетворене шляхом повороту рівняння матиме вигляд:

$\lambda_1 (x'_1)^2 + \lambda_2 (x'_2)^2 + 2a'_{14}x'_1 + 2a'_{24}x'_2 + 2a'_{34}x'_3 + a'_{44} = 0.$	(15.11)
---	-----------

$I_4 \neq 0$. Поверхня не вироджена.

$$I_4 = \Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & a'_{14} \\ 0 & \lambda_2 & 0 & a'_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a'_{34} \\ a'_{14} & a'_{24} & a'_{34} & a'_{44} \end{vmatrix} = -a'_{34} \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ a'_{14} & a'_{24} & a'_{34} \end{vmatrix} = -(a'_{34})^2 \lambda_1 \lambda_2.$$

Звідси $a'_{34} \neq 0$.

Складемо систему рівнянь (15.8)

$$\frac{\partial F}{\partial x'_1} = \frac{\partial F}{\partial x'_2} = \frac{\partial F}{\partial x'_3} = 0$$

для знаходження центрів поверхні і запишемо матрицю розширеної такої системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & 0 & 0 & a'_{14} \\ 0 & \lambda_2 & 0 & a'_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a'_{34} \end{array} \right)$$

Ранги основної матриці дорівнює 2, а розширеної – 3. Отже, розв'язків вона не має, і поверхня нецентральна.

Паралельним переміщенням перенесемо початок координат нової систему на параболоїд. За формулами (15.8) знайдемо, як зміняться коефіцієнти рівняння при членах першої степені і вільні члени:

$$\begin{aligned}a''_{14} &= \lambda_1 x'_{01} + a'_{14}, \\a''_{24} &= \lambda_2 x'_{02} + a'_{24}, \\a''_{34} &= a'_{34} \neq 0, \\a''_{44} &= \lambda_1 (x'_{01})^2 + \lambda_2 (x'_{02})^2 + 2a'_{14}x'_{01} + 2a'_{24}x'_{02} + 2a'_{34}x'_{03} + a'_{44}.\end{aligned}$$

Виберемо вектор зсуву так, щоб початок координат опинився на поверхні, і щоб його координати в старій системі задовольняли системі:

$\begin{aligned}\lambda_1 x'_{01} + a'_{14} &= 0, \\ \lambda_2 x'_{02} + a'_{24} &= 0, \\ \lambda_1 (x'_{01})^2 + \lambda_2 (x'_{02})^2 + 2a'_{14}x'_{01} + 2a'_{24}x'_{02} + 2a'_{34}x'_{03} + a'_{44} &= 0.\end{aligned}$	(15.15)
---	---------

Зв'язок між новими і попередніми координатами:

$\begin{aligned}x'_1 &= x''_1 + x'_{01} = x''_1 - \frac{a'_{14}}{\lambda_1}, \\ x'_2 &= x''_2 + x'_{02} = x''_2 - \frac{a'_{24}}{\lambda_2}.\end{aligned}$	(15.16)
--	---------

В новому рівнянні вже не буде коефіцієнтів при перших степенях x''_1, x''_2 і вільного члена. Коефіцієнт a''_{34} знайдемо з застосуванням інваріанта:

$$I_4 = \Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a''_{34} \\ 0 & 0 & a''_{34} & 0 \end{vmatrix} = -\lambda_1 \lambda_2 (a''_{34})^2.$$

Звідси

$a''_{34} = \pm \sqrt{\frac{I_4}{-\lambda_1 \lambda_2}}.$	(15.17)
---	---------

Тоді рівняння (15.11) запишеться у вигляді

$$\lambda_1 (x''_1)^2 + \lambda_2 (x''_2)^2 \pm 2 \sqrt{\frac{I_4}{-\lambda_1 \lambda_2}} x''_3 = 0.$$

Від вибору знаку перед коренем залежить орієнтація осі Ox''_3 .

Запишемо канонічне рівняння поверхні:

$\frac{(x''_1)^2}{\mp \frac{1}{\lambda_1} \sqrt{\frac{I_4}{-\lambda_1 \lambda_2}}} + \frac{(x''_2)^2}{\mp \frac{1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{I_4}{-\lambda_1 \lambda_2}}} = 2x''_3.$	(15.18)
---	---------

Це еліптичний або гіперболічний параболоїд, причому, завжди дійсний, оскільки підкореневий вираз завжди додатний, оскільки він, як ми бачили, дорівнює квадрату коефіцієнта a''_{34} .

Задача 15.3. Звести рівняння другого степеня

$$2x_1^2 + 10x_2^2 - 2x_3^2 + 12x_1x_2 + 8x_2x_3 + 12x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 1 = 0$$

до канонічного вигляду.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді (15.4): $(Au, u) + 2(a, u) + b = 0$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}:$$

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) + 2 \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) - 1 = 0.$$

Знайдемо визначник матриці квадратичної форми і її власні числа:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -6 & 0 \\ -6 & \lambda - 10 & -4 \\ 0 & -4 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 10\lambda^2 - 56\lambda = \lambda(\lambda - 14)(\lambda + 4).$$

Отже, поверхня параболічного типу.

Знайдемо власні вектори.

1). $\lambda_1 = 14$.

$$\begin{pmatrix} -12 & 6 & 0 \\ 6 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$x_2 = 2x_1, x_2 = 4x_3 \Rightarrow x_1 = 2x_3, x_2 = 4x_3 \Rightarrow (x_1; x_2; x_3)^T = x_3(2; 4; 1)^T.$$

Нормований вектор, що відповідає власному числу $\lambda = 14$: $f_1 = \frac{1}{\sqrt{21}}(2; 4; 1)^T$,

2). $\lambda_2 = -4$.

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 6 & 14 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси $x_2 = -x_1, x_3 = 2x_1$ і

$$(x_1; x_2; x_3) = x_1(1; -1; 2).$$

Нормований вектор, що відповідає власному числу $\lambda_2 = -4$: $f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1; -1; 2)^T$.

3). $\lambda_3 = 0$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (x_1; x_2; x_3)^T = x_2(-3; 1; 2).$$

Нормований вектор, що відповідає власному числу $\lambda_3 = 0$: $f_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}(-3; 1; 2)^T$.

Таким чином, одержано ортогональну матрицю переходу до нового базису:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{4}{\sqrt{21}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{21}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}.$$

При цьому $u = Uu'$,

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{4}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

$$a' = (a'_{14}; a'_{24}; a'_{34})^T = U^{-1}a = U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{4}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Виберемо тепер точку на поверхні, в яку перейде новий початок координат:

$$\begin{cases} \lambda_1 x'_{01} + a'_{14} = 0, \\ \lambda_2 x'_{02} + a'_{24} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_{01} = -\frac{a'_{14}}{\lambda_1}, \\ x'_{02} = -\frac{a'_{24}}{\lambda_2}. \end{cases}$$

$$\lambda_1 (x'_{01})^2 + \lambda_2 (x'_{02})^2 + 2a'_{14}x'_{01} + 2a'_{24}x'_{02} + 2a'_{34}x'_{03} + a'_{44} = 0.$$

Коефіцієнт a''_{34} знайдемо за формулою

$$a''_{34} = \pm \sqrt{\frac{I_4}{-\lambda_1 \lambda_2}}.$$

Тут

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 6 \\ 6 & 10 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 256.$$

$$\text{Звідси } a''_{34} = \pm \sqrt{\frac{256}{14 \cdot 4}} = \pm \frac{8}{\sqrt{14}}.$$

Тепер рівняння поверхні запишеться у вигляді

$$14(x_1'')^2 - 4(x_2'')^2 \pm \frac{16}{\sqrt{14}} x_3'' = 0 \Rightarrow 14(x_1'')^2 - 4(x_2'')^2 = \mp \frac{16}{\sqrt{14}} x_3''.$$

Виберемо тут знак «+» так, щоб у перерізі при $x_3'' > 0$ була б гіпербола, якій відповідає канонічне рівняння:

$$7(x_1'')^2 - 2(x_2'')^2 = \frac{8}{\sqrt{14}} x_3''.$$

Одержали рівняння гіперболічного параболоїда.

Задача 15.4. Звести рівняння другого степеня

$$2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1 - 10x_2 - 2x_3 - 1 = 0$$

до канонічного вигляду.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді (15.4): $(Au, u) + 2(a, u) + b = 0$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні числа матриці квадратичної форми:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 18\lambda = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 6) \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 0.$$

Запишемо перших три рівняння з (15.8) для знаходження центрів:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 1 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 - 5 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 1 = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & | & -1 \\ -1 & 5 & 1 & | & 5 \\ -2 & 1 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & | & -1 \\ -1 & 5 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow .$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 9 & 0 & 9 \\ -1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$x_3 = x_3, x_2 = 1$. Одержали лінію центрів поверхні. Візьмемо $x_3 = x_3 = 0, x_2 = 1$.

Підставимо ці координати в ліву частину рівняння поверхні:

$a''_{14} = 2F(0,1,0) = -6$. Запишемо тепер канонічне рівняння поверхні:

$$3(x''_1)^2 + 6(x''_2)^2 - 6 = 0 \Rightarrow (x''_1)^2 + 2(x''_2)^2 = 2.$$

Одержали рівняння еліптичного циліндра.

15). Завдання для самостійної роботи: [11], №№ 941 – 944.

17. Практичне заняття II.17. Класифікація поверхонь другого порядку

Таблиця типів поверхонь другого порядку

В основу покладено дослідження характеристичного рівняння

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0,$$

де

$$I_1 = \text{sp}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

а також

$$I_4 = \Delta = \det(\tilde{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

I. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$.

I.1. $\Delta \neq 0, a_{44}'' = \frac{\Delta}{\delta} \neq 0$ - поверхня не вироджена. Її канонічне рівняння має вигляд:

$$\frac{(x_1'')^2}{\left(-\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}\right)} + \frac{(x_2'')^2}{\left(-\frac{\Delta}{\delta\lambda_2}\right)} + \frac{(x_3'')^2}{\left(-\frac{\Delta}{\delta\lambda_3}\right)} = 1.$$

Можливі випадки:

А). $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, \frac{\Delta}{\delta} < 0$ - еліпсоїд.

Б). $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0, \frac{\Delta}{\delta} > 0$ - уявний еліпсоїд.

В). $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0, \frac{\Delta}{\delta} < 0$ - однопорожнинний гіперболоїд.

Г). $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0, \frac{\Delta}{\delta} > 0$ - двопорожнинний гіперболоїд.

I.2. $\Delta = 0, a_{44}'' = \frac{\Delta}{\delta} = 0$ - поверхня вироджена. Канонічне рівняння має вигляд:

$$\lambda_1 (x_1'')^2 + \lambda_2 (x_2'')^2 + \lambda_3 (x_3'')^2 = 0.$$

А). $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$ - дійсний конус.

Б). $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ - уявний конус.

II. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$.

Можливі випадки:

II.1. Якщо $\Delta \neq 0, a_{34} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{\lambda_1 \lambda_2}}$ - поверхня не вироджена. Канонічне рівняння має форму

$$\frac{\frac{(x_1'')^2}{\frac{1}{\lambda_1} \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1 \lambda_2}}}}{\frac{(x_2'')^2}{\frac{1}{\lambda_2} \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1 \lambda_2}}}} = 2x_3''.$$

Можливі випадки:

А). $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ - еліптичний параболоїд.

Б). $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ - гіперболічний параболоїд.

II.2. Якщо $\Delta = 0, a_{34} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{\lambda_1 \lambda_2}} = 0$ - поверхня вироджена.

1. $a_{44}'' = 2F(x_{01}', x_{02}', x_{03}') \neq 0$. Канонічне рівняння має форму

$$\frac{\frac{(x_1'')^2}{\left(-\frac{2F(x_{01}', x_{02}', x_{03}')}{\lambda_1}\right)}}{\frac{(x_2'')^2}{\left(-\frac{2F(x_{01}', x_{02}', x_{03}')}{\lambda_2}\right)}} = 1.$$

А). $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, a_{44}'' < 0$ - еліптичний циліндр.

Б). $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, a_{44}'' > 0$ - уявний еліптичний циліндр.

В). $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, a_{44}'' < 0$ - гіперболічний циліндр.

2. $a_{44}'' = 2F(x_{01}', x_{02}', x_{03}') = 0$

Поверхня розпадається на пару площин.

А). $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ - дійсні площини.

Б). $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ - уявні площини.

III. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$.

1). Якщо $a_{14}' \neq 0$, канонічне рівняння має форму

$$(x_2'')^2 = -2 \frac{a_{14}''}{\lambda_2} x_1''.$$

Поверхня – параболічний циліндр. При $a_{14}' = 0, a_{34}' \neq 0$ одержимо поверхню такого ж вигляду.

2). $a_{14}' = a_{34}' = 0$. Канонічне рівняння має вигляд

$$(x_2'')^2 = -2 \frac{F(x_{01}', x_{02}', x_{03}')}{\lambda_2} \Leftrightarrow x_2'' = \pm \sqrt{-\frac{2F(x_{01}', x_{02}', x_{03}')}{\lambda_2}}.$$

Поверхня – це пара прямих дійсних або уявних – паралельних або таких, що суміщаються.

Других варіантів не існує. Класифікація повна.

Задача 17.1. Визначити тип поверхні

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0.$$

Розв'язання.

$$I_4 = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 36, I_3 = \delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -36 \neq 0, I_2 = 0, I_1 = 7 \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta}{\delta} = \frac{36}{-36} = -1 < 0 \Rightarrow \text{поверхня не вироджена.}$$

$$\lambda_1 = -2 < 0, \lambda_2 = 3 > 0, \lambda_3 = 6 > 0 \Rightarrow \text{однопорожнинний гіперболоїд.}$$

$$-\frac{\Delta}{\delta} \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1} = -\frac{1}{2}, -\frac{\Delta}{\delta} \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{3}, -\frac{\Delta}{\delta} \frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\frac{(x_1'')^2}{\left(-\frac{\Delta}{\delta \lambda_1}\right)} + \frac{(x_2'')^2}{\left(-\frac{\Delta}{\delta \lambda_2}\right)} + \frac{(x_3'')^2}{\left(-\frac{\Delta}{\delta \lambda_3}\right)} = 1 \Rightarrow \frac{(x_1'')^2}{\left(-\frac{1}{2}\right)} + \frac{(x_2'')^2}{\left(\frac{1}{3}\right)} + \frac{(x_3'')^2}{\left(\frac{1}{6}\right)} = 1.$$

Задача 17.2. Визначити тип поверхні

$$5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0.$$

Розв'язання.

$$I_4 = \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 16, I_3 = \delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, I_2 = -14, I_1 = 5 \Rightarrow$$

$\lambda_1 = 7 > 0, \lambda_2 = -2 < 0, \lambda_3 = 0 \Rightarrow$ однопорожнинний гіперболоїд.

$$\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1 \lambda_2}} = \sqrt{-\frac{16}{7(-2)}} = \sqrt{\frac{8}{7}} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1} \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1 \lambda_2}} = \frac{1}{7} \sqrt{\frac{8}{7}}, \frac{1}{\lambda_2} \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1 \lambda_2}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{8}{7}}.$$

Звідки

$$\frac{(x'')^2}{\left(\frac{1}{7} \sqrt{\frac{8}{7}}\right)} - \frac{(y'')^2}{\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{8}{7}}\right)} = 2z''.$$

16-17). **Завдання для самостійної роботи:** [11], №№ 945 – 947

18. Практичне заняття II.18.

Тензорні добутки лінійних просторів і матриць та їхнє застосування

Теоретичні відомості

Нехай векторам $x \in E^{(1)}, y \in E^{(2)}$ у вибраних базисах f, g відповідають вектори-стовпчики

$$[x]_f = (x_1; \dots; x_m)^T \in \mathbb{R}^m, [y]_g = (y_1; \dots; y_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Тоді вектору $x \otimes y \in E^{(1)} \otimes E^{(2)}$ зіставляється вектор-стовпчик

$$\begin{aligned} [x \otimes y]_{f \otimes g} &= [x]_f \otimes [y]_g = (x_1[y]_g; \dots; x_m[y]_g)^T = \\ &= (x_1 y_1; \dots; x_1 y_n; \dots; x_m y_1; \dots; x_m y_n)^T \in \mathbb{R}^{mn}. \end{aligned}$$

Означення 18.1. Тензорним (кронекерівським) добутком $A \otimes B$ двох матриць $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \triangleq M_{nn}$ і $B \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \triangleq M_{mm}$ називається блочна матриця

$C = A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2m}B \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mm}B \end{pmatrix}.$	(18.1)
---	--------

Задача 18.1. Нехай $x = (x_1; x_2; x_3)^T \in \mathbb{R}^3, y = (y_1; y_2)^T \in \mathbb{R}^2$.

Записати вектор $z = x \otimes y$ і матрицю $C = A \otimes B$, а також вектор, результат добутку: $Cz = (A \otimes B)(x \otimes y)$.

Розв'язання. В позначеннях [2] $m = 3, n = 2$.

$$x \otimes y = (x_1 y; x_2 y; x_3 y)^T = (x_1 y_1; x_1 y_2; x_2 y_1; x_2 y_2; x_3 y_1; x_3 y_2)^T \in \mathbb{R}^6$$

$$C = A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & a_{13}B \\ a_{21}B & a_{22}B & a_{23}B \\ a_{31}B & a_{32}B & a_{33}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{13}b_{11} & a_{13}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & a_{13}b_{21} & a_{13}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & a_{23}b_{11} & a_{23}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{23}b_{21} & a_{23}b_{22} \\ a_{31}b_{11} & a_{31}b_{12} & a_{32}b_{11} & a_{32}b_{12} & a_{33}b_{11} & a_{33}b_{12} \\ a_{31}b_{21} & a_{31}b_{22} & a_{32}b_{21} & a_{32}b_{22} & a_{33}b_{21} & a_{33}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Запишемо спочатку результат множення першого рядка матриці $C = A \otimes B$ на вектор-стовпчик $z = x \otimes y$:

$$\begin{aligned}(Cz)_1 &= ((A \otimes B)(x \otimes y))_1 = \\&= a_{11}b_{11}x_1y_1 + a_{11}b_{12}x_1y_2 + a_{12}b_{11}x_2y_1 + a_{12}b_{12}x_2y_2 + a_{13}b_{11}x_3y_1 + a_{13}b_{12}x_3y_2 = \\&= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 a_{1i}x_i b_{1j}y_j.\end{aligned}$$

Знайдемо координату добутку $(A \otimes B)(x \otimes y)$, яка є результатом множення k -го рядка матриці $A \otimes B$, де $k = (r-1)n + s = 2(r-1) + s$, $1 \leq r \leq m = 3$, $1 \leq s \leq n = 2$.

$$\text{Маємо: } (Cz)_k = ((A \otimes B)(x \otimes y))_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 a_{ri}x_i b_{sj}y_j.$$

Задача 18.2. Довести, що $sp(A \otimes B) = sp(A)sp(B)$.

Доведення. З (П.4) випливає, що на діагоналі r -го блоку знаходяться елементи $a_{rr}b_{11}, a_{rr}b_{22}, \dots, a_{rr}b_{nn}$. Слід такого блоку знаходиться за формулою

$$sp(a_{rr}B) = a_{rr}b_{11} + a_{rr}b_{22} + \dots + a_{rr}b_{nn} = a_{rr}sp(B). \text{ Звідси}$$

$$sp(A \otimes B) = (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{rr})sp(B) = sp(A)sp(B).$$

Введемо позначення: $A^{1\otimes} \triangleq A, A^{2\otimes} \triangleq A \otimes A, \dots, A^{(k+1)\otimes} \triangleq A \otimes A^{k\otimes}$.

Задача 18.3. Довести, що $A^{(k+l)\otimes} = A^{k\otimes} \otimes A^{l\otimes}$.

Доведення. З асоціативності тензорного добутку випливає:

$$A^{(k+l)\otimes} = A \otimes A^{(k+l-1)\otimes} = A^{2\otimes} \otimes A^{(k+l-2)\otimes} = \dots = A^{k\otimes} \otimes A^{l\otimes}.$$

Задача 18.4. Довести, що $rank(A \otimes B) = rank(A)rank(B)$.

Доведення. Як відомо, $A \otimes B = (A \otimes I_n)(I_m \otimes B)$. Матриця $I_m \otimes B$ блочно-діагональна. При доведенні теореми 2.1 [2] показано, що матрицю $A \otimes I_n$ можна звести до блочно-діагонального вигляду. Блоки цих матриць можна звести до діагонального вигляду. Ранг діагональної матриці дорівнює кількості ненульових діагональних елементів. Легко підрахувати кількість ненульових

елементів блочно-діагональної матриці, що складається з діагональних матриць: воно дорівнює $\text{rank}(A)\text{rank}(B)$.

Задача 18.5. Знайти власні числа тензорного добутку матриць A і B безпосередньо і використовуючи формулу для власних чисел, якщо відомі власні числа кожної з матриць, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 2B & B \\ B & 2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} & 2 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 & 4 \\ 10 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & 2 & 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Випускаючи зрозумілі перетворення, знаходимо власні числа цієї матриці:

$$\nu_1 = -6; \nu_2 = -2; \nu_3 = 7; \nu_4 = 21.$$

Знаходимо тепер власні числа кожної з даних матриць:

$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 3; \mu_1 = -2; \mu_2 = 7$. Звідси, як відомо, спектр тензорного добутку матриць, його власні числа, дорівнюють:

$$\lambda_j \mu_k, j, k = 1, 2 \Rightarrow \sigma(A \otimes B) = \{-6; -2; 7; 21\}.$$

Задача 18.6. Розв'язати матричне рівняння $AX + XB^T = C$, де A і B - матриці з задачі 18.5, а

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Зіставимо матриці C вектор з тензорного добутку просторів:

$$\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 : c = (C_{1*}; C_{2*})^T = (2; 1; 6; 4)^T.$$

Тепер, як відомо [2], досить розв'язати рівняння $Gx \triangleq (A \otimes I + I \otimes B^T)x = c$.

Знайдемо відповідні векторні добутки та ліву частину рівняння:

$$A \otimes I = \begin{pmatrix} 2I & I \\ I & 2I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad I \otimes B^T = \begin{pmatrix} B^T & 0 \\ 0 & B^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A \otimes I + I \otimes B^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Отже, одержано рівняння

$$(A \otimes I + I \otimes B^T)x = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Її розв'язком буде вектор $x = (1; -1; 1; 0)^T$. Йому відповідає матриця

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

18). Завдання для самостійної роботи: [12], №№ 77 (a-h).

ЛІТЕРАТУРА

1. Алгебра та аналітична геометрія (Частина 1): Лекції [Електронний ресурс]: курс лекц. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад. Ю. Є. Бохонов. – Електронні текстові дані (1 файл: 4,9 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 269 с.
2. Алгебра та аналітична геометрія: Частина 2. [Електронний ресурс]: Курс лекц. для студ. спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад. Ю. Є. Бохонов. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,76 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 202 с.
3. Алгебра та геометрія: Лінійна алгебра. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 124 «Системний аналіз» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад. Ю. Є. Бохонов. – Електронні текстові дані (1 файл: 4,31 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 296 с.
4. Конспект лекцій з курсу «Аналітична геометрія та лінійна алгебра» [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів спеціальності 124 «Системний аналіз» / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. О. О. Калюжний, А. Ю. Мальцев, Г. Б. Подколзін, Ю. А. Чаповський ; КПІ ім. Ігоря Сікорського.
5. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П Дубовик., І. І. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с.
6. Мартиненко М. А. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення: навч. посіб. Для студ. Вищ. Навч. закл./М. А. Мартиненко, І. І. Юрик. – К.: Видавничий Дім «Слово», 2007. – 296 с.
7. Вища математика. Збірник задач : навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав, В. І. Дев'ятко, Р. К. Клименко, В. В. Крочук, М. А. Мартиненко ; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2011. – 480 с.

8. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. / И. В. Проскуряков. - М.: «Наука», 1978. 384 с.
9. Икрамов Х.Д. Задачи по линейной алгебре: сборник задач / Х. Д. Икрамов. - М.: «Наука», 1975. 319 с.
10. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре: задачник / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. - М.: «Наука», 1977. 288 с.

ДОДАТКОВА

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник / П. С. Александров. - М.: «Наука», 1979, 511 с.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник / Д. В. Беклемишев. - М.: «Наука», 1984, 175 с.
3. Беллман Р. Введение в теорию матриц: учебник / Р. Беллман. - М.: «Наука», 1969, 367 с.
4. Блох Э. Л. Основы линейной алгебры и некоторые ее приложения: учебное пособие / Э. Л. Блох, Л. И. Лошинский, В. Я. Турин. - М.: Высшая школа, 1971. 256 с.
5. Бубнов В.А. Линейная алгебра: компьютерный практикум / В.А. Бубнов, Г. С. Толстова, О. Е. Клемешева. - М.: ЛБЗ, 2012. 168 с.
6. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра: учебник / Б. Л. Ван дер Варден. - М.: «Наука», 1976. 648 с.
7. Винберг Э.Б. Курс алгебры: учебник / Э. Б. Винберг. - М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2001. 544 с.
8. Воеводин В.В. Линейная алгебра: учебник / В. В. Воеводин. - М.: «Наука», 1974. 336 с.
9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц: монография / Ф. Р. Гантмахер. - М.: «Наука», 1967. 575 с.
10. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре: учебник / И. М. Гельфанд. - М.: «Наука», 1971. 271 с.

11. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ: учебник / И. М. Глазман, Ю. И. Любич. - : «Наука», 1969. 475 с.
12. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения: учебник / Л. И. Головина. - М.: Наука, 1985. 392 с.
13. Гомонов, С.А. Математика. Линейная алгебра: Учебно-справочное пособие / С. А. Гомонов. - М.: Форум, НИЦ ИНФРА-М, 2013. 144 с.
14. Горлач, Б.А. Линейная алгебра: Учебное пособие / Б.А. Горлач. - СПб.: Лань, 2012. 480 с.
15. Ефимов Н.В. Линейная алгебра и многомерная геометрия: учебник / Н. В. Ефимов, Э. Р. Розендорн. - М.: «Наука», 1970. 528 с.
16. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: учебник / В.А. Ильин, Э. Г. Позняк. - М.: «Наука», 1974. 296 с.
17. Каган В.Ф. Основания теории определителей: учебник / В. Ф. Каган. - Гос. изд-во Украины, 1922. 78 с.
18. Кострикин А. И. Линейная алгебра и геометрия: учебник / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. - М.: «Наука», 1986. 303 с.
19. Кочетков, Е.С. Линейная алгебра: учебное пособие /Е. С. Кочетков, А. В. Осокин. - М.: Форум, 2012. 416 с.
20. Курбатова Г.И. Курс лекций по алгебре: учебник / Г. И. Курбатова, В.Б. Филиппов. - СПб: Изд-во «Лань», 2015. 655 с.
21. Курош А. Г. Курс высшей алгебры: учебник / А. Г. Курош. - М.: «Наука», 1968. 431 с.
22. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре: учебник / А. Г. Курош. - М.: «Наука», 1973. 400 с.
23. Ланкастер П. Теория матриц: монография/ М. Ланкастер.- «Наука», 1978. 280 с.
24. Ленг С. Алгебра: учебник / С. Ленг. - М.: «МИР», 1968. 564 с.
25. Лефор Г. Алгебра и анализ. Задачи: сборник задач / Г. Лефор. - М.: «Наука», 1973. 462 с.
26. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры: учебник / А. И. Мальцев. - М.: «Наука», 1970. 400 с.

27. Попов А.М. Лекции по линейной алгебре: учебник / А. М. Попов. - М.: Изд-во РУДН, 2007. 183 с.
28. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра: учебник / М. М. Постников. - Москва, «Наука», 1986. 400 с.
29. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры: учебное пособие / В. В. Прасолов. - М.: МЦНМО, 2015. 576 с.
30. Рудык, Б.М. Линейная алгебра: Учебное пособие / Б. М. Рудык, - М.: НИЦ ИНФРА, 2013. 318 с.