

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ

А.В. Заворотинський

**Прикладна лінійна алгебра:
застосування систем лінійних рівнянь
та визначників.**

курс лекцій

Електронна бібліотека факультету комп'ютерних наук та кібернетики

Київ

2025

ЗМІСТ

1.	ВСТУП	5
Розділ 1. Застосування систем лінійних рівнянь та визначників.		7
1.	Потокові мережі.	7
1.1.	Вправи для самостійного розв’язування.	13
2.	Електричні мережі	15
2.1.	Вправи для самостійного розв’язування.	21
3.	Дієтологія.	24
3.1.	Вправи для самостійного розв’язування.	27
4.	Застосування до хімії.	28
4.1.	Балансування хімічних рівнянь.	29
4.2.	Розрахунок концентрацій речовин у багатокомпонентній системі.	31
4.3.	Вправи для самостійного розв’язування.	33
5.	Температурний розподіл на тонкій пластинці.	34
5.1.	Крайові умови	34
5.2.	Властивість середнього значення	35
5.3.	Дискретна постановка задачі	36
5.4.	Метод Монте-Карло	46
5.5.	Вправи для самостійного розв’язування.	47
6.	Побудова кривих і поверхонь за заданими точками.	51
6.1.	Рівняння прямої, що проходить через дві точки.	51
6.2.	Рівняння кола, що проходить через три точки.	53
6.3.	Загальне рівняння конічного перерізу на площині.	54
6.4.	Рівняння площини, що проходить через три точки.	56
6.5.	Рівняння сфери, яка проходить через чотири точки.	57
6.6.	Вправи для самостійного розв’язування.	58

7.	Інтерполяція многочленів та лінеаризація.	61
7.1.	Інтерполяція многочленів	61
7.2.	Наближені обчислення	65
7.3.	Лінеаризація.	68
7.4.	Вправи для самостійного розв'язування.	72
8.	Кубічна сплайн-інтерполяція.	75
8.1.	Постановка задачі.	76
8.2.	Виведення формули кубічного сплайна.	78
8.3.	Природний сплайн.	83
8.4.	Параболічний крайовий сплайн.	84
8.5.	Кубічний крайовий сплайн.	85
8.6.	Вправи для самостійного розв'язування.	89
9.	Застосування лінійної алгебри в комп'ютерній графіці: гео- метричні перетворення на площині	91
9.1.	Комп'ютерна графіка: сучасний погляд	91
9.2.	Роль лінійної алгебри в комп'ютерній графіці	92
9.3.	Сучасні застосування лінійної алгебри в комп'ютерній графіці	92
10.	Геометричні перетворення.	93
10.1.	Геометричні перетворення на площині	94
10.2.	Однорідні координати	96
10.3.	Композиція геометричних перетворень	98
11.	Застосування лінійної алгебри в комп'ютерній графіці: гео- метричні перетворення в просторі.	99
11.1.	Масштабування	103
11.2.	Переміщення	105
11.3.	Обертання	107
11.4.	Перспективне проектування	110
11.5.	Задачі для самостійного розв'язування.	113
	Література	117

1. ВСТУП

Представлене до розгляду видання є курсом лекцій з застосувань методів лінійної алгебри до прикладних задач. Посібник складено на основі першої частини курсу "Прикладна лінійна алгебра що протягом останніх років викладається магістрам прикладної математики на факультеті комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

В посібнику представлені основні необхідні теоретичні факти, приклади розв'язання задач а також задачі для самостійного розв'язання. Видання супроводжується списком рекомендованої літератури. Читач повинен мати попередні знання з лінійної алгебри та геометрії, математичного аналізу, теорії ймовірностей та дослідження операцій.

Посібник рекомендується для студентів другого курсу магістратури факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка денної форми навчання, а також для студентів інших математичних факультетів університетів та педагогічних факультетів.

Розділ 1

Застосування систем лінійних рівнянь та визначників.

У цьому розділі ми обговоримо деякі застосування систем лінійних рівнянь та визначників. Це лише невелика вибірка з широкого спектру реальних проблем, до яких вони можуть бути застосовані.

1. Потокові мережі.

Поняття мережі знаходить застосування в різних сферах людської діяльності. У широкому розумінні мережа – це система, що складається з гілок, через які відбувається переміщення ресурсів або середовища. Такими ресурсами можуть бути електроенергія, вода, транспортні засоби, фінансові потоки тощо. Наприклад, гілками можуть слугувати електричні дроти, якими передається електроенергія; трубопроводи, якими транспортується вода або нафта; смуги руху, якими переміщуються транспортні засоби; а також економічні зв'язки, через які циркулюють фінансові ресурси. Ці приклади лише підкреслюють різноманітність сфер застосування мереж.

У більшості мереж гілки з'єднуються у спеціальних точках, які називають *вузлами* або *перехрестями*. Саме у вузлах відбувається розподіл чи об'єднання потоків. Наприклад, в електричних мережах вузли виникають у місцях з'єднання трьох або більше дротів. У транспортних мережах вузлами є перехрестя доріг, де транспортні потоки можуть розгалужуватися або зливатися. У фінансових мережах вузлами можна вважати банківські установи, що управляють фінансовими потоками між клієнтами чи іншими організаціями.

Для кожної гілки мережі характерна певна числова характеристика, яка вимірює швидкість руху ресурсів. Ця характеристика залежить від природи потоку та типу мережі. Наприклад:

- у випадку електричних мереж швидкість потоку електроенергії вимірюється в *амперах*;
- у гідравлічних мережах потік води чи нафти оцінюється у *літрах на хвилину*;
- у транспортних мережах швидкість руху транспортних засобів обчислюється у *транспортних одиницях на годину*;
- у фінансових системах швидкість фінансового потоку вимірюється у *мільйонах євро на день*.

Окрему увагу заслуговують мережі, в яких діє принцип *збереження потоку*. Цей принцип передбачає, що загальна швидкість потоку, що входить у вузол, дорівнює загальній швидкості потоку, що виходить із нього. Наприклад, у транспортній мережі це означає, що кількість транспортних засобів, які в'їжджають на перехрестя, дорівнює кількості тих, що виїжджають.

Принцип збереження потоку має важливе значення, оскільки гарантує стабільність роботи мережі. Його виконання забезпечує відсутність накопичення ресурсів у вузлах, що унеможливує блокування гілок мережі та сприяє ефективному функціонуванню системи в цілому.

Таким чином, аналіз мереж дозволяє моделювати та оптимізувати процеси у різних сферах: від електроенергетики до фінансів, від транспорту до систем водопостачання. Це робить поняття мережі ключовим для розуміння сучасних інфраструктурних і економічних процесів.

Теорема 1.1 (Правило перетину). *На кожному перетині мережі сумарний потік, що надходить до перетину через вхідні гілки, дорівнює сумарному потоку, що залишає перетин через вихідні гілки.*

Доведення. Розглянемо перетин мережі, до якого підходять n вхідних гілок і відходять m вихідних гілок. Нехай через кожну вхідну гілку i

надходить потік із величиною x_i , а через кожну вихідну гілку j виходить потік із величиною y_j .

За визначенням правила перетину, виконується наступна умова:

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^m y_j.$$

Це рівняння відображає принцип збереження потоку: усі ресурси, що надходять до вузла, мають бути або передані через вихідні гілки, або зберігатися у вузлі. Оскільки правило перетину передбачає відсутність накопичення ресурсів у вузлі, всі вхідні потоки повністю компенсуються вихідними. $\square$

Наведемо деякі приклади застосування.

- **Транспортні мережі:** Кількість транспортних засобів, які в'їжджають на перехрестя, дорівнює кількості транспортних засобів, які виїжджають із нього.
- **Гідравлічні мережі:** Обсяг води, що надходить через усі труби до вузла, дорівнює обсягу води, що виходить із нього.
- **Електричні мережі:** Сумарний електричний струм, що надходить до вузла, дорівнює струму, що виходить із нього (закон Кірхгофа).

Отже, правило перетину є фундаментальним принципом аналізу мереж, який забезпечує баланс потоків і дозволяє моделювати динаміку систем у різних прикладних задачах.

Ця вимога дає лінійне рівняння, що пов'язує потоки в гілках, які виходять з вузла.

Приклад 1.1 (Аналіз мережі за допомогою систем лінійних систем). На рисунку 1.1 зображено мережу з чотирма вузлами, в якій відомі швидкість та напрямок потоку в певних гілках. Знайдіть витрати та напрямки потоків у решті гілок.

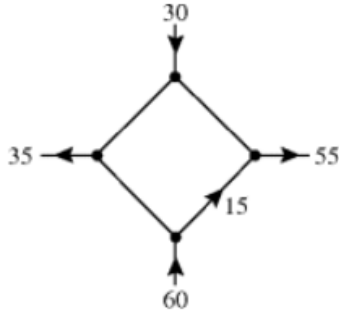


Рис. 1.1

Розв'язання. Як показано на рисунку 1.2, ми надали невідомим швидкостям течії довільні напрямки, x_1 , x_2 і x_3 . Нас не повинно турбувати, що деякі з напрямків є неправильними, оскільки неправильний напрямок буде сигналізувати про це від'ємним значенням швидкості потоку, коли ми будемо розв'язувати задачу для невідомих.

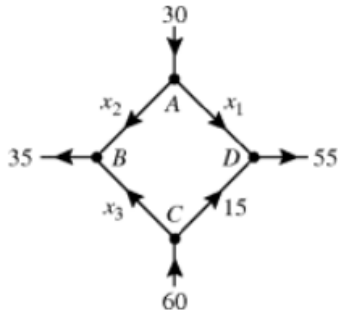


Рис. 1.2

Зі збереження потоку у вузлі A випливає, що

$$x_1 + x_2 = 30.$$

Аналогічно, в інших вузлах маємо

$$\text{вершина (B)} \quad x_2 + x_3 = 35;$$

$$\text{вершина (C)} \quad x_3 + 15 = 35;$$

$$\text{вершина (D)} \quad x_1 + 15 = 55.$$

Ці чотири умови дають лінійну систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 30 \\ x_2 + x_3 &= 35 \\ x_3 &= 45 \\ x_1 &= 40, \end{cases}$$

яку ми тепер можемо спробувати розв'язати для невідомих витрат. У цьому конкретному випадку система є достатньо простою, щоб її можна було розв'язати методом Жордана-Гауса. Залишаємо вам можливість переконатися, що розв'язок має такий вигляд

$$x_1 = 40, \quad x_2 = -10, \quad x_3 = 45.$$

Від'ємне значення x_2 свідчить про те, що напрямок потоку на рисунку 1.2, є неправильним, тобто потік у цій гілці тече до вузла A.

Приклад 1.2 (Транспортна мережа). Мережа вулиць з одностороннім рухом показана на рисунку 1.3. Інтенсивність потоку автомобілів на перехресті A становить 500 автомобілів на годину, а на перехрестях B і C - 400 і 100 автомобілів на годину відповідно. Знайдіть можливі потоки на кожній з вулиць.

Розв'язання. Припустимо, що потоки вздовж вулиць становлять x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 і x_6 автомобілів на годину в напрямках, показаних на рис. 1.3.

Тоді, прирівнюючи вхідний потік до вихідного на кожному перехресті, отримаємо

Тоді, прирівнюючи вхідний потік до вихідного на кожному перехресті, отримуємо

$$\begin{array}{llll} \text{Перехрестя (A)} & 500 & = & x_1 + x_2 + x_3; \\ \text{Перехрестя (B)} & x_1 + x_4 + x_6 & = & 400; \\ \text{Перехрестя (C)} & x_3 + x_5 & = & x_6 + 100; \\ \text{Перехрестя (D)} & x_2 & = & x_4 + x_5. \end{array}$$

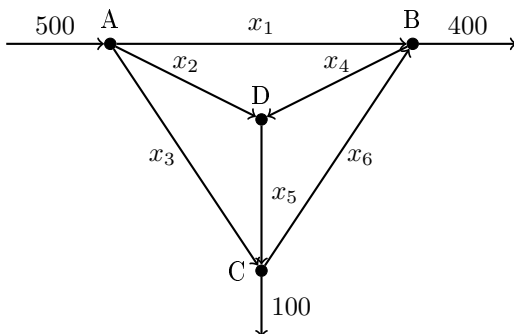


Рис. 1.3

Це дає чотири рівняння в шести змінних $x_1, x_2, \dots, x_6$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 500; \\ x_1 & + x_4 + x_6 = 400; \\ & x_3 + x_5 - x_6 = 100; \\ x_2 & - x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Зведення розширеної матриці має вигляд

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Отже, коли ми використовуємо x_4 , x_5 та x_6 як параметри, загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{aligned} x_1 &= 400 - x_4 - x_6; \\ x_2 &= x_4 + x_5; \\ x_3 &= 100 - x_5 + x_6. \end{aligned}$$

Це дає всі розв'язки системи рівнянь, а отже, і всі можливі потоки. Звичайно, не всі ці розв'язки можуть бути прийнятними в реальній ситуації. Наприклад, потоки $x_1, x_2, \dots, x_6$ є додатними в даному контексті (якби

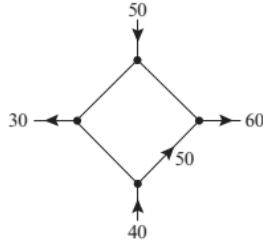


Рис. 1.4

один з них був від'ємним, це означало б, що транспортний потік рухається в протилежному напрямку). Це накладає обмеження на потоки: $x_1 \geq 0$ і $x_3 \geq 0$ стають

$$x_4 + x_6 \leq 400$$

$$x_5 - x_6 \leq 100$$

Додаткові обмеження можуть бути накладені, якщо наполягати на максимальних значеннях потоку на кожній вулиці в місті.

1.1. Вправи для самостійного розв'язування.

Вправа 1.1. На рисунку 1.4 зображено мережу, в якій відомі витрати і напрямок потоку в деяких гілках. Знайдіть витрати та напрямки потоків у решті гілок.

Вправа 1.2. На рисунку 1.4 показано відомі витрати вуглеводнів, що надходять і виходять з мережі труб на нафтопереробному заводі.

(а) Складіть систему лінійних рівнянь, розв'язок якої дає невідомі витрати.

(б) Розв'яжіть отриману систему для невідомих витрат.

(с) Знайдіть витрати та напрямки потоків, якщо $x_4 = 50$ та $x_6 = 0$.

Вправа 3. На рисунку 1.5 показано мережу вулиць з одностороннім рухом, транспортні потоки на яких рухаються у вказаних напрямках. Інтенсивність руху вздовж вулиць вимірюється як середня кількість ав-

томобілів за годину.

(а) Складіть систему лінійних рівнянь, розв'язок якої дає невідомі значення інтенсивності руху.

(б) Розв'яжіть систему лінійних рівнянь для невідомих швидкостей потоку.

(с) Якщо потік на дорозі від А до В необхідно зменшити для будівництва, то який мінімальний потік потрібен для того, щоб рух на всіх дорогах був безперешкодним?

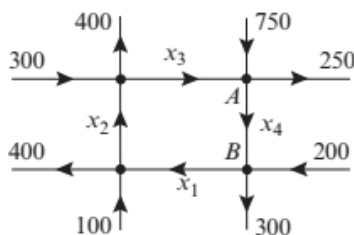


Рис. 1.5

Вправа4. На рисунку 1.6 показано мережу вулиць з одностороннім рухом, транспортні потоки на яких рухаються у вказаних напрямках. Інтенсивність руху вздовж вулиць вимірюється як середня кількість автомобілів за годину.

(а) Складіть систему лінійних рівнянь, розв'язок якої дає невідомі значення інтенсивності потоку.

(б) Розв'яжіть отриману систему для невідомих швидкостей потоку.

(с) Чи можна перекрити дорогу від А до В на час будівництва, а рух по інших вулицях залишити безперешкодним? Поясніть це.

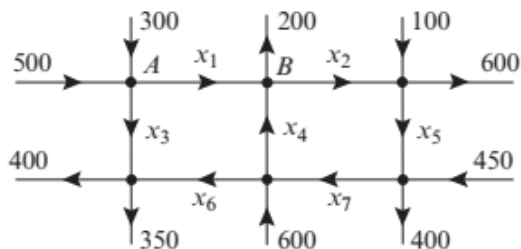


Рис. 1.6

2. Електричні мережі

У цьому розділі ми покажемо, як аналіз мереж можна використувати для дослідження електричних кіл, що складаються з батарей і резисторів.

Батарея — це джерело електричної енергії, яке забезпечує потік зарядів у колі. Її зазвичай позначають символом $\begin{smallmatrix} + & - \end{smallmatrix}$.

Резистор, наприклад, лампочка, є елементом кола, що розсіює електричну енергію. Його позначають символом $\sim$.

На рисунку 1.7 показано принципову схему простого електричного кола, яке складається з батареї, одного резистора та перемикача. Батарея має два полюси: *позитивний полюс* (+) та *негативний полюс* (−). Коли перемикач замкнутий, утворюється замкнене коло, і електричний струм починає протікати. Струм рухається від позитивного полюса батареї через резистор і повертається до негативного полюса. Напрямок потоку струму на схемі позначено стрілкою.

Електричний струм, який є потоком електронів по дротах, поводить-ся подібно до потік води по трубах. Батарея діє як насос, який створює «електричний тиск» щоб збільшити швидкість потоку електронів, а резистор діє як обмеження в трубі, яке зменшує швидкість потоку електронів. Технічним терміном для електричного тиску є електричний потенціал; він зазвичай вимірюється у вольтах (V). Ступінь, до якого

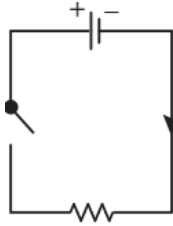


Рис. 1.7: Принципова схема простого електричного кола.

резистор зменшує електричний потенціал, називається його опором і зазвичай вимірюється в омах (Ω). Швидкість потоку електронів у дроті називається струмом і зазвичай вимірюється в амперах (A). Точний вплив резистора описується наступним законом:

Теорема 2.1 (Закон Ома). *Сила струму I і падіння напруги U на опорі R пов'язані між собою рівнянням*

$$U = RI.$$

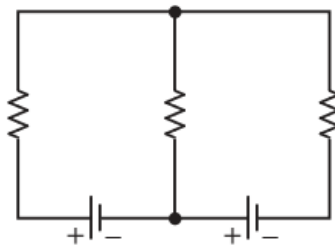


Рис. 1.8

Типова електрична мережа складається з кількох батарей та резисторів, з'єднаних у певній конфігурації за допомогою проводів. У мережі можна виділити три основні елементи:

1. *Вузол (або точка з'єднання)*: це точка, в якій з'єднуються три або більше проводів. Вузол виконує функцію розподілу або об'єднання електричних потоків у мережі.

2. *Гілка*: це провід або ланка, що з'єднує два вузли. Гілка може містити електричні компоненти, такі як резистори, батареї або конденсатори.

3. *Замкнений контур*: це послідовність з'єднаних гілок, яка починається і закінчується в одному й тому ж вузлі. Замкнені контури є основою для аналізу електричних кіл, оскільки в них діють закони Кірхгофа.

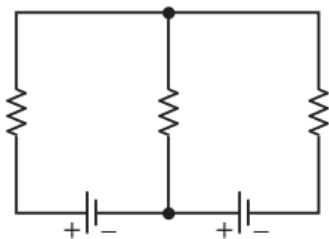


Рис. 1.9

Наприклад, електрична мережа на рисунку 1.9 має два вузли і три замкнені контури: два внутрішніх контури і один зовнішній контур. Коли струм протікає через електричну мережу, він зазнає збільшення та зменшення електричного потенціалу, що називається зростанням та спаданням напруги, відповідно.

Поведінка струму у вузлах і навколо замкнутих контурів регулюється двома фундаментальними законами:

Теорема 2.2 (Перший закон Кірхгофа). *Струм, що входить до вузла, дорівнює струму, що виходить з цього вузла.*

Теорема 2.3 (Другий закон Кірхгофа (Правило контуру)). *Алгебраїчна сума падінь напруги (через опори) навколо будь-якого замкнутого контуру мережі повинна дорівнювати сумі приростів напруги на цьому контурі.*

Застосовуючи 2.3, виберіть напрямок (за годинниковою стрілкою або проти годинникової стрілки) навколо замкнутого контуру і потім вважайте всі напруги і струми додатними в цьому напрямку і від'ємними в

протилежному напрямку. Ось чому в 2.3 використовується термін «алгебраїчна сума».

Сучасний закон Кірхгофа є переформулюванням принципу збереження потоку у вузлі який був сформульований для загальних мереж. Так, наприклад, струми у вузлі на рисунку 1.10 задовольняють рівнянню $I_1 = I_2 + I_3$.

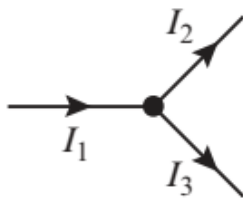


Рис. 1.10

У ланцюгах з декількома контурами і батареями зазвичай немає можливості сказати заздалегідь в якому напрямку протікають струми, тому звичайна процедура в аналізі ланцюгів полягає в тому, щоб призначити довільні напрямки струмів у вітках і дозволити математичним обчисленням визначити, чи будуть ці напрямки обчислення визначають, чи правильні ці призначення. На додаток до визначення напрямків потоків струму, закон напруги Кірхгофа вимагає визначення напрямку руху для кожного замкненого контуру. Вибір є довільним, але для послідовності ми завжди будемо вважати цей напрям руху за годинниковою стрілкою (рис. 1.11). Також зробимо наступні домовленості:

- Падіння напруги на резисторі відбувається, якщо напрямок, заданий струму через резистор, збігається з напрямком резистора збігається з напрямком, заданим контуру, а зростання напруги відбувається при резисторі, якщо напрям струму через резистор протилежний напрямку, призначеному контуру.
- Зростання напруги на джерелі живлення (акумуляторі) відбува-

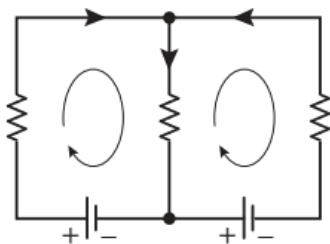


Рис. 1.11

ється, якщо напрямок струму в контурі змінюється від - до +, а падіння – якщо напрямок струму через акумулятор через батарею, і падіння напруги відбувається на батареї, якщо напрямок, призначений контуру контуру від + до - через батарею, а падіння напруги відбувається на батареї, якщо напрямок від + до - через батарею.

Якщо при обчисленні струмів дотримуватися цих умовностей, то ті струми, напрямки яких напрямки були визначені правильно, матимуть додатні значення, а ті, чиї напрямки були визначені неправильно не-правильно, будуть мати від'ємні значення.

Приклад 2.1 (Коло з одним замкненим контуром). Визначте силу струму I в колі, показаному на рисунку 1.12.

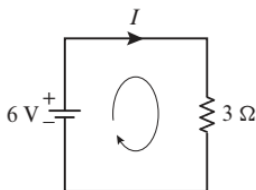


Рис. 1.12

Розв'язання. Оскільки напрям струму через резистор збігається з напрямком кола, на резисторі виникає падіння напруги. За законом Ома

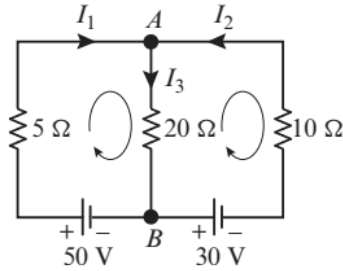


Рис. 1.13

це падіння напруги дорівнює $U = IR = 3I$. Крім того, оскільки контур має напрямок від $-$ до $+$ через батарею, виникає падіння напруги на резисторі. до $+$ через батарею, на батареї відбувається зростання напруги на 6 вольт. Таким чином, з цього випливає із закону напруги Кірхгофа, що

$$3I = 6$$

з чого робимо висновок, що сила струму дорівнює $I = 2\text{ А}$. Оскільки величина I додатна, то напрямок струму вибрано правильно.

Приклад 2.2. Коло з трьома замкненими контурами.

Визначити струми I_1 , I_2 та I_3 у колі, показаному на рисунку 1.13.

Розв'язання. Використовуючи задані напрямки струмів, закон Кірхгофа дає по одному рівнянню для кожного вузла:

Вузол	Струм на вході	Струм на виході
A	$I_1 + I_2$	I_3
B	I_3	$I_1 + I_2$

Однак ці рівняння насправді однакові, оскільки обидва можуть бути виражені одним рівнянням

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0. \quad (2.1)$$

Для знаходження унікальних значень струмів нам знадобляться ще два рівняння, які ми отримаємо із закону напруги Кірхгофа. З схеми мережі

ми бачимо, що в ній є три замкнені контури: лівий внутрішній контур, що містить батарею на $50V$, правий внутрішній контур, що містить батарею на $30V$, і зовнішній контур, який містить обидві батареї. Таким чином, закон напруги Кірхгофа фактично призведе до трьох рівнянь. При обході контурів за годинниковою стрілкою, напруга в цих контурах зростає і падає наступним чином:

	<i>Напруга зростає</i>	<i>Напруга падає</i>
<i>Лівий внутрішній контур</i>	50	$5 I_1 + 20 I_3$
<i>Правий внутрішня контур</i>	$30 + 10 I_2 + 20 I_3$	0
<i>Зовнішній контур</i>	$30 + 50 + 10 I_2$	$5 I_1$

Ці умови можна переписати наступним чином

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5 I_1 & +20 I_3 & = 50; \\ & 10 I_2 +20 I_3 & = -30; \\ 5 I_1 & -10 I_2 & = 80. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Однак останнє рівняння є зайвим, оскільки воно є різницею перших двох. Таким чином, якщо об'єднати (2.1) і перші два рівняння в (2.2), то отримаємо наступну лінійну систему з трьох рівнянь для трьох невідомих струмів:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} I_1 & +I_2 & -I_3 = 0; \\ 5 I_1 & & +20 I_3 = 50; \\ & 10 I_2 & +20 I_3 = -30. \end{array} \right.$$

Самостійно покажіть, що розв'язок цієї системи в амперах буде $I_1 = 6$, $I_2 = -5$, і $I_3 = 1$. Той факт, що I_2 є від'ємним, говорить нам про те, що напрямок цього струму протилежний вказаному на рисунку 1.13.

2.1. Вправи для самостійного розв'язування.

У наведених нижче вправах проаналізуйте наведені електричні кола, знайшовши невідомі струми.

Вправа 1. Див. рис. 1.14.

Вправа 2. Див. рис. 1.15.

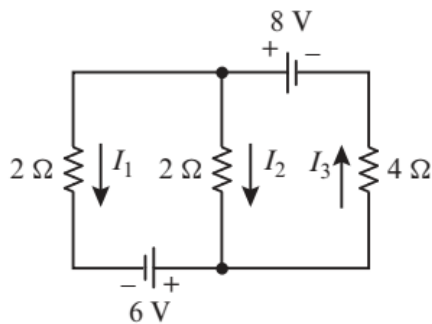


Рис. 1.14

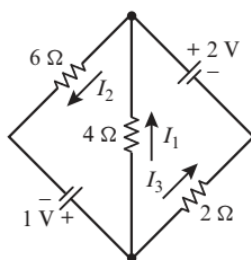


Рис. 1.15

Вправа 3. Див. рис. 1.16.

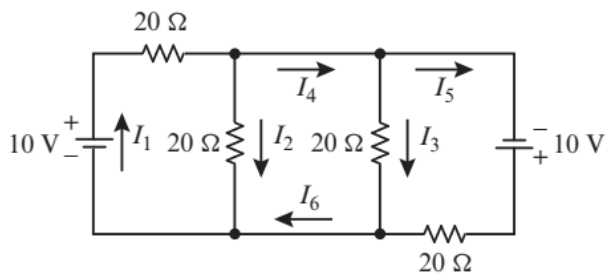


Рис. 1.16

Вправа 4. Див. рис. 1.17.

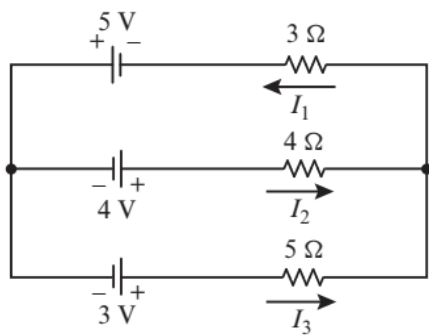


Рис. 1.17

3. Дієтологія.

Розробка здорового раціону передбачає вибір продуктів з різних груп, які в правильному поєднанні в належних кількостях задовольняють певні харчові потреби. Ця задача є комплексною та вимагає врахування багатьох факторів:

- Поживна цінність: кожен продукт містить різну кількість білків, жирів, вуглеводів, вітамінів та мінералів.
- Індивідуальні потреби: залежно від віку, статі, рівня фізичної активності та стану здоров'я, потреби в поживних речовинах можуть суттєво відрізнятись.
- Економічний фактор: важливо знайти оптимальне співвідношення між поживною цінністю та вартістю продуктів.
- Доступність продуктів: необхідно враховувати сезонність та наявність продуктів на ринку.

У дієтології часто виникає задача складання збалансованого раціону харчування, який би задовольняв усі ці вимоги при мінімальних витратах. Ця задача може бути ефективно розв'язана за допомогою систем лінійних рівнянь, які дозволяють математично описати та оптимізувати процес складання дієти.

Застосування математичних методів у дієтології почалося в 1940-х роках, коли американський економіст Джордж Стіглер вперше сформулював "задачу про дієту" як задачу лінійного програмування. Відтоді методи оптимізації раціону харчування постійно вдосконалюються, враховуючи нові наукові дані про харчування та можливості сучасних обчислювальних систем.

В сучасному світі, де проблеми правильного харчування та економії ресурсів стають все більш актуальними, математичні методи оптимізації дієти набувають особливого значення. Вони дозволяють:

- Створювати індивідуальні дієти з урахуванням особливих потреб.
- Оптимізувати харчування для великих груп людей (школи, лікарні, військові частини).
- Мінімізувати витрати при збереженні поживної цінності раціону.
- Враховувати екологічні аспекти харчування.

Розробка здорового раціону передбачає вибір продуктів з різних груп, які в правильному поєднанні задовольняють поєднанні в належних кількостях задовольняють певні харчові потреби. Ця задача може бути ефективно розв'язана за допомогою систем лінійних рівнянь.

Математична модель. Нехай маємо n різних продуктів харчування та m поживних речовин. Позначимо:

x_i – кількість i -го продукту (в грамах);

a_{ij} – вміст j -ої поживної речовини в одиниці i -го продукту;

b_j – необхідна денна норма j -ої поживної речовини;

c_i – вартість одиниці i -го продукту.

Тоді математична модель матиме вигляд:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &= b_m. \end{aligned}$$

При цьому всі $x_i \geq 0$ (кількість продукту не може бути від'ємною).

Приклад 3.1 (Дієта). У таблиці 1.1 наведено кількість у міліграмах (мг) вітаміну А, вітаміну С і кальцію що містяться в 1 грамі (г) чотирьох різних продуктів харчування. Наприклад, продукт 1 містить 10 мг вітаміну А, 50 мг вітаміну С і 60 мг кальцію на грам продукту. Припустимо що дієтолог хоче приготувати їжу, яка містить 200 мг вітаміну А,

250 мг вітаміну С і 300 мг кальцію Са. Скільки кожного з цих продуктів слід використовувати?

	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3	Продукт 4
Вітамін А	10	30	20	10
Вітамін С	50	30	25	10
Кальцій Са	60	20	40	25

Табл. 1.1

Розв'язання. Нехай x_1 , x_2 , x_3 та x_4 позначають кількість продуктів з 1 по 4 відповідно. Кількість для кожного з продуктів, необхідних для задоволення вимог дієтолога, можна знайти, розв'язавши лінійну систему

$$\begin{cases} 10x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 10x_4 = 200; \\ 50x_1 + 30x_2 + 25x_3 + 10x_4 = 250; \\ 60x_1 + 20x_2 + 40x_3 + 25x_4 = 300. \end{cases}$$

З округленням до двох знаків після коми розв'язок лінійної системи має вигляд

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,63 + 0,11t; \\ x_2 &= 3,13 + 0,24t; \\ x_3 &= 5 - 0,92t; \\ x_4 &= t. \end{aligned}$$

Зверніть увагу, що кожне з цих значень має бути невід'ємним.

Отже, конкретні розв'язки можна знайти, вибравши невід'ємні значення t такі, що

$$0 \leq 5 - 0,92t$$

Розв'язавши відносно t остаточно маємо

$$t \leq \frac{5}{0,92} \approx 5,4.$$

Запропонований метод має свої переваги та недоліки.

Переваги методу:

Точність розрахунків.

Можливість врахування багатьох параметрів одночасно.

Гнучкість при зміні вхідних даних

Можливість оптимізації за вартістю

Обмеження методу:

Лінійність залежностей (не завжди відповідає реальності).

Необхідність точних вхідних даних.

Складність врахування смакових переваг.

Можливість отримання нереалістичних розв'язків.

Отже, застосування систем лінійних рівнянь для складання дієт є потужним інструментом, який дозволяє враховувати численні фактори та знаходити оптимальні рішення. Однак для практичного використання необхідно враховувати обмеження методу та коригувати отримані результати відповідно до реальних умов та індивідуальних потреб.

3.1. Вправи для самостійного розв'язування.

4. Застосування до хімії.

Лінійна алгебра є однією з ключових дисциплін сучасної математики, яка знаходить численні застосування в різних галузях науки і техніки. Однією з таких галузей є хімія, де системи лінійних рівнянь використовуються для моделювання та розв'язування задач, пов'язаних із хімічними реакціями, балансом речовин, аналізом реакційних механізмів і навіть прогнозуванням хімічних процесів.

Хімія, як наука про взаємодію речовин, часто стикається з проблемами визначення кількісних співвідношень між реагентами і продуктами реакцій. Зокрема, балансування хімічних рівнянь є однією з базових задач, яка виникає під час вивчення хімічних процесів. У цій задачі потрібно визначити коефіцієнти перед хімічними сполуками так, щоб дотримувалися закони збереження маси та енергії. Така задача є класичним прикладом застосування систем лінійних рівнянь.

Системи лінійних рівнянь також застосовуються для вирішення складніших проблем, таких як:

- Аналіз і оптимізація хімічних реакцій;
- Розрахунок концентрацій речовин у складних багатокомпонентних системах;
- Розподіл елементів у каталізаторних процесах;
- Моделювання процесів у біохімії, таких як метаболічні шляхи.

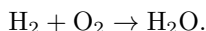
Розв'язання таких задач вимагає глибокого розуміння як хімічних, так і математичних основ, а також володіння сучасними числовими методами. Завдяки використанню систем лінійних рівнянь хіміки можуть отримувати точні та ефективні розрахунки, що дозволяє проектувати нові реакції, передбачати властивості речовин і оптимізувати хімічні процеси.

Таким чином, вивчення застосування систем лінійних рівнянь до хімії відкриває широкі можливості для інтеграції математики та хімії.

Це підкреслює важливість міждисциплінарного підходу до навчання та досліджень, який сприяє розвитку сучасної науки та інженерії.

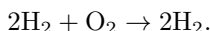
4.1. Балансування хімічних рівнянь.

Коли відбувається хімічна реакція, кілька молекул об'єднуються, утворюючи нові молекули. Наприклад, коли молекули водню H_2 і кисню O_2 з'єднуються, в результаті утворюється вода H_2O . Ми виражаємо це так



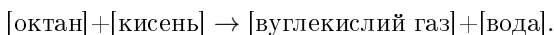
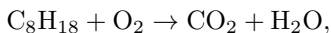
Окремі атоми не створюються і не руйнуються, тому кількість атомів водню і кисню, що вступають в реакцію, повинна дорівнювати кількості, що виходить назовні (у вигляді води). У цьому випадку реакція називається рівноважною. Зверніть увагу, що кожна молекула водню H_2 складається з двох атомів, як і кожна молекула кисню O_2 , тоді як молекула води H_2O складається з двох атомів водню і одного атома кисню.

У наведених вище реакції це означає, що в реакцію вступає вдвічі більше молекул водню; ми виражаємо це таким чином:

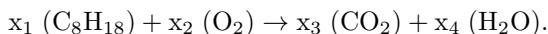


Тепер реакція збалансована, оскільки в ній беруть участь 4 атоми водню і 2 атоми кисню з кожного боку.

Приклад 4.1 (Балансування хімічної реакції). Складіть рівняння реакції згоряння горючого октану C_8H_{18} у кисні O_2 :



Розв'язання. Потрібно знайти такі натуральні числа x_1, x_2, x_3 і x_4 , щоб



Прирівнявши кількості атомів вуглецю C, водню H і кисню O в лівій та правій частині рівняння $8x_1 = x_3$, $18x_1 = 2x_4$ і $2x_2 = 2x_3 + x_4$,

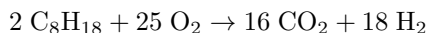
відповідно. В результаті отримаємо однорідну лінійну систему

$$\begin{cases} 8x_1 & -x_3 & & = & 0; \\ 18x_1 & & -2x_4 & = & 0; \\ & 2x_2 & -2x_3 & -x_4 & = & 0. \end{cases}$$

яку можна розв'язати методом Гауса.

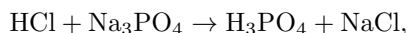
У більших системах це необхідно, але у такій простій ситуації простій ситуації простіше розв'язати безпосередньо. Якщо покласти $x_4 = t$, то $x_1 = 19t$, $x_3 = 89t$, $2x_2 = 169t + t = 259t$. Але x_1 , x_2 , x_3 і x_4 повинні бути натуральними числами, тому найменше значення t , при якому виключаються дробі, дорівнює 18.

Отже, $x_1 = 2$, $x_2 = 25$, $x_3 = 16$ і $x_4 = 18$, а збалансована реакція має вигляд



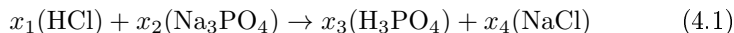
(самостійно перевірити, що рівняння реакції збалансоване.)

Приклад 4.2 (Фосфорна кислота). Зрівноважити хімічне рівняння



[соляна кислота] + [натрій фосфат] $\rightarrow$ [фосфорна кислота] + [натрій хлорид].

Розв'язання Нехай x_1 , x_2 , x_3 і x_4 – натуральні числа, які врівноважують рівняння



Прирівнюючи кількість атомів кожного типу з обох сторін, отримуємо

$$1x_1 = 3x_3 \quad \text{Гідроген (H)}$$

$$1x_1 = 1x_4 \quad \text{Хлор (Cl)}$$

$$3x_2 = 1x_4 \quad \text{Натрій (Na)}$$

$$1x_2 = 1x_3 \quad \text{Фосфор (P)}$$

$$4x_2 = 4x_3 \quad \text{Кисень (O)}$$

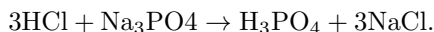
з яких отримуємо однорідну лінійну систему

$$\begin{cases} x_1 & -3x_3 & = 0; \\ x_1 & & -x_4 = 0; \\ & 3x_2 & -x_4 = 0; \\ & x_2 & -x_3 = 0; \\ & 4x_2 & -4x_3 = 0. \end{cases}$$

Залишаємо вам показати, що скорочена форма ешелонування рядків доповненої матриці для цієї системи має вигляд

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (4.2)$$

з якого робимо висновок, що загальний розв'язок системи має вигляд $x_1 = t$, $x_2 = t/3$, $x_3 = t/3$, $x_4 = t$ де t - довільне. Щоб отримати найменші натуральні числа, які врівноважують рівняння, нехай $t = 3$, тоді отримаємо $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ і $x_4 = 3$. Підставивши ці значення в (4.1), отримуємо врівноважене рівняння



Варто зазначити, що ця задача вводить новий елемент у теорію лінійних рівнянь: вимогу, що розв'язок повинен складатися з натуральних чисел.

4.2. Розрахунок концентрацій речовин у багатокомпонентній системі.

Розглянемо задачу визначення концентрацій речовин у хімічній системі, що містить три компоненти A , B , і C , які знаходяться в рівновазі відповідно до наступних хімічних реакцій:

1. $A + B \leftrightarrow C$,
2. $2A \leftrightarrow B + C$.

Відомі загальні концентрації речовин:

$$[A]_{\text{total}} = 1.0 \text{ моль/л}, \quad [B]_{\text{total}} = 0.5 \text{ моль/л}, \quad [C]_{\text{total}} = 0.8 \text{ моль/л}.$$

Необхідно визначити рівноважні концентрації $[A]$, $[B]$ та $[C]$, враховуючи рівноважні константи для реакцій:

$$K_1 = \frac{[C]}{[A][B]} = 4.0, \quad K_2 = \frac{[B][C]}{[A]^2} = 2.0.$$

Розв'яжемо задачу, сформувавши систему рівнянь:

1. Закони збереження для кожної речовини:

$$[A] + [A]_r = [A]_{\text{total}}, \quad [B] + [B]_r = [B]_{\text{total}}, \quad [C] + [C]_r = [C]_{\text{total}},$$

де $[A]_r$, $[B]_r$, $[C]_r$ — концентрації, витрачені на утворення продуктів.

2. Рівноважні константи:

$$K_1 = \frac{[C]}{[A][B]}, \quad K_2 = \frac{[B][C]}{[A]^2}.$$

3. Баланс речовин:

$$[A]_r + [B]_r + [C]_r = 0.$$

Розв'язок

Рівняння дозволяють сформувати систему нелінійних рівнянь, яку можна розв'язати числовими методами. Для знаходження рівноважних концентрацій $[A]$, $[B]$, і $[C]$ використовують методи розв'язання систем рівнянь, наприклад, метод Ньютона або чисельні алгоритми.

У результаті розрахунків отримуємо рівноважні концентрації:

$$[A] \approx 0.3 \text{ моль/л}, \quad [B] \approx 0.4 \text{ моль/л}, \quad [C] \approx 0.7 \text{ моль/л}.$$

Цей приклад демонструє, як методи лінійної алгебри та аналізу дозволяють ефективно аналізувати складні багатокомпонентні хімічні системи.

4.3. Вправи для самостійного розв'язування.

У кожному випадку збалансуйте хімічну реакцію.

Вправа 1. $\text{CH}_4 + \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O}$ (горіння метану CH_4).

Вправа 2. $\text{C}_3\text{H}_8 + \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O}$ (горіння пропану C_3H_8).

Вправа 3. $\text{NH}_3 + \text{CuO} \rightarrow \text{N}_2 + \text{Cu} + \text{H}_2\text{O}$.

Тут NH_3 – аміак, CuO – оксид міді, Cu – мідь, N_2 – азот.

Вправа 4. $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6 \rightarrow \text{CO}_2 + \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ (бродіння цукру).

Вправа 5. $\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6 + \text{O}_2$ (реакція фотосинтезу).

$\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$ – глюкоза.

Вправа 6. $\text{Pb}(\text{N}_3)_2 + \text{Cr}(\text{MnO}_4)_2 \rightarrow \text{Cr}_2\text{O}_3 + \text{MnO}_2 + \text{Pb}_3\text{O}_4 + \text{NO}$.

Вправа 7. $\text{CH}_3\text{COF} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{CH}_3\text{COOH} + \text{HF}$.

5. Температурний розподіл на тонкій пластинці.

У цьому розділі ми побачимо, що рівноважний розподіл температури всередині тонкої пластини можна знайти, якщо задано температури на краях пластини. Задача зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь. Також описано ітераційний метод розв'язання задачі та підхід до розв'язання задачі «випадкового блукання».

5.1. Крайові умови

Розглянемо тонку трапецієподібну пластину, зображену на рисунку 1.18(а). Припустимо, що дві її грані ізольовані від теплового обміну. Нехай температура вздовж усіх чотирьох країв пластини відома.

Наприклад, припустимо, що температура на кожному краю є постійною і має значення 0° , 0° , 1° і 2° , як показано на рисунку. Через певний час температура всередині пластини стабілізується, досягаючи стану теплової рівноваги.

Нашим завданням у цьому розділі є визначення рівноважного розподілу температур у точках всередині пластини. Як ми побачимо, цей розподіл повністю визначається граничними умовами, тобто значеннями температури вздовж країв пластини. Рівноважний розподіл темпе-

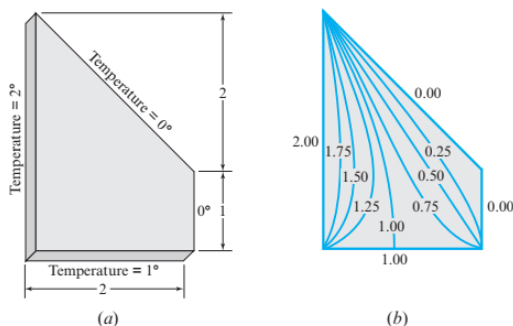


Рис. 1.18

ратури можна візуалізувати за допомогою кривих, які з'єднують точки

з однаковою температурою. Такі криві називаються *ізотермами розподілу температури*. На рисунку 1.18 (b) побудовано кілька ізотерм, використовуючи інформацію, яку ми отримаємо пізніше.

Хоча всі наші розрахунки будуть проводитися для зображеної на рисунку трапецієподібної пластини, наші методи легко узагальнюються на пластину будь-якої практичної форми. Вони також узагальнюються на проблему знаходження температури всередині тривимірного тіла. Насправді, наша «пластина» може бути поперечним перерізом якогось твердого тіла, якщо потік тепла, перпендикулярний до поперечного перерізу є незначним. Наприклад, Рисунок 1.18 може представляти поперечний переріз довгої греблі. Дамба зазнає впливу трьох різних температур: температури ґрунту біля її основи, температури ґрунту біля її основи, температурі води з одного боку і температурі повітря з іншого боку. повітря з іншого боку. Знання розподілу температур всередині греблі є необхідним для визначення теплових навантажень, яким вона піддається. Далі ми розглянемо певний термодинамічний принцип, який характеризує розподіл температур, який ми шукаємо.

5.2. Властивість середнього значення

Існує багато різних способів отримати математичну модель для нашої задачі. Підхід, який ми використовуємо, базується на наступній властивості рівноважних розподілів температури.

Теорема 5.1 (Властивість середнього значення). *Нехай пластина знаходиться в тепловій рівновазі і нехай P - точка всередині пластини. Тоді, якщо C - коло з центром в точці P , яке повністю міститься в пластині, то температура в точці P є середнім значенням температури по колу (рис. 1.19).*

Ця властивість є наслідком певних основних законів молекулярного руху, і ми не будемо намагатися тут вивести. По суті, ця властивість стверджує, що в стані рівноваги тепла енергія прагне розподілитися якомога рівномірніше відповідно до граничних умов.



Рис. 1.19

Можна показати, що властивість середнього значення однозначно визначає рівноважний розподіл температури пластини. На жаль, визначення рівноважного розподілу температури з властивості середнього значення не є простим завданням. Однак, якщо ми обмежимося знаходженням температури лише у скінченній множині точок всередині пластини, проблему можна звести до розв'язання лінійної системи. Цю ідею ми розвинемо далі.

5.3. Дискретна постановка задачі

Ми можемо накласти на нашу трапецієподібну пластину послідовність все дрібніших і дрібніших квадратних сіток (Рисунок 1.20 3). У

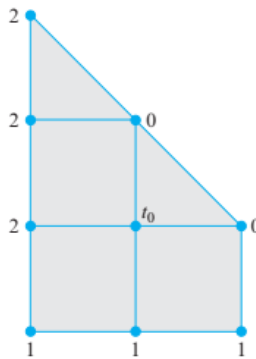


Рис. 1.20: (а) 1 внутрішня точка сітки

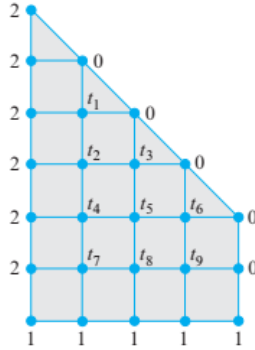


Рис. 1.21: (b) 9 внутрішніх точок сітки

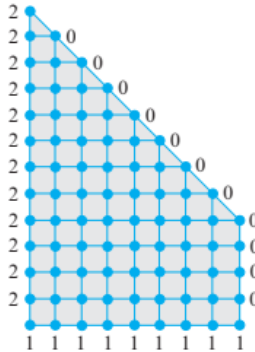


Рис. 1.22: (c) 49 внутрішніх точок сітки

(a) ми маємо досить грубу сітку; (b) – сітка з половинним кроком, як в (a); а в (c) – сітка з кроком, знову зменшеним вдвічі.

Точки перетину ліній сітки називаються точками сітки. Ми класифікуємо їх як *граничні точки сітки*, якщо вони знаходяться на межі пластини, або як *внутрішні точки сітки* якщо вони лежать всередині пластини. Для трьох вибраних нами кроків сітки існує 1, 9 та 49 внутрішніх точок сітки відповідно.

У дискретному формулюванні нашої задачі ми намагаємося знайти

температуру лише у внутрішніх точках певної сітки. Для досить дрібної сітки, як у (с), це дасть чудову картину розподілу температури по всій пластині. У граничних точках сітки температура задається граничними даними. (На рис. 1.20 ми позначили всі граничні точки сітки відповідними температурами). Для внутрішніх точок сітки ми застосуємо наступну дискретну версію властивості середнього значення.

Теорема 5.2 (Дискретна властивість середнього значення). *У кожній внутрішній точці сітки температура приблизно дорівнює середньому значенню температур у чотирьох сусідніх точках сітки.*

Ця дискретна версія є розумним наближенням до істинної властивості середнього значення. Але оскільки це лише наближення, воно дасть лише наближення до істинних температур у внутрішніх точках сітки. Однак, апроксимація буде ставати кращою зі зменшенням кроку сітки. Насправді, коли крок сітки наближається до нуля, апроксимації наближаються до точного розподілу температури.

Ми проілюструємо цю збіжність, обчисливши наближені температури в точках сітки для трьох інтервалів між точками сітки, як показано на рисунку 1.20.

Випадок (а) на рисунку 1.20 є простим, оскільки є лише одна внутрішня точка сітки. Якщо ми позначимо t_0 температуру в цій точці сітки, то властивість дискретного середнього значення негайно дасть

$$t_0 = \frac{1}{4}(2 + 1 + 0 + 0) = 0,75.$$

У випадку (b) ми можемо позначити температури у дев'яти внутрішніх точках сітки $t_1, t_2, \dots, t_9$, як показано на рисунку 1.21 (b). (Конкретний порядок не є важливим.) Застосовуючи властивість дискретного середнього значення послідовно до кожної з цих дев'яти точок сітки,

ми отримаємо наступні дев'ять рівнянь:

$$\begin{aligned}
 t_1 &= \frac{1}{4}(t_2 + 2 + 0 + 0); \\
 t_2 &= \frac{1}{4}(t_1 + t_3 + t_4 + 2); \\
 t_3 &= \frac{1}{4}(t_2 + t_5 + 0 + 0); \\
 t_4 &= \frac{1}{4}(t_2 + t_5 + t_7 + 2); \\
 t_5 &= \frac{1}{4}(t_3 + t_4 + t_6 + t_8); \\
 t_6 &= \frac{1}{4}(t_5 + t_9 + 0 + 0); \\
 t_7 &= \frac{1}{4}(t_4 + t_8 + 1 + 2); \\
 t_8 &= \frac{1}{4}(t_5 + t_7 + t_9 + 1); \\
 t_9 &= \frac{1}{4}(t_6 + t_8 + 1 + 0).
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Це система з дев'яти лінійних рівнянь з дев'ятьма невідомими. Ми можемо переписати її у матричному вигляді так

$$t = Mt + b \tag{5.2}$$

де

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \\ t_8 \\ t_9 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Щоб розв'язати рівняння 5.2, запишемо його у вигляді

$$(I - M)\mathbf{t} = \mathbf{b}$$

Розв'язок для $\mathbf{t}$ має вигляд

$$\mathbf{t} = (I - M)^{-1}\mathbf{b} \quad (5.3)$$

за умови, що матриця $(I - M)$ є оберненою. Це дійсно так, і розв'язок для t за формулою 5.3 дорівнює

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 0.7846 \\ 1.1383 \\ 0.4719 \\ 1.2967 \\ 0.7491 \\ 0.3265 \\ 1.2995 \\ 0.9014 \\ 0.5570 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

На рисунку 1.23 показано схему пластини з дев'ятьма внутрішніми точками сітки, позначеними температурами, отриманими за цим розв'язком. Для випадку (с) на рисунку 1.22 ми повторюємо ту саму процедуру. Позначимо температури у 49 внутрішніх точках сітки як $t_1, t_2, \dots, t_{49}$ певним чином. Наприклад, ми можемо почати з верхньої частини пластини і рухатися зліва направо вздовж кожного ряду точок сітки точок. Застосування властивості дискретного середнього значення до кожної точки сітки дає систему 49 лінійних рівнянь з 49 невідомими:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{4}(t_2 + 2 + 0 + 0) \\ t_2 &= \frac{1}{4}(t_1 + t_3 + t_4 + 2) \\ &\vdots \\ t_{48} &= \frac{1}{4}(t_{41} + t_{47} + t_{49} + 1) \\ t_{49} &= \frac{1}{4}(t_{42} + t_{48} + 0 + 1) \end{aligned} \quad (5.5)$$

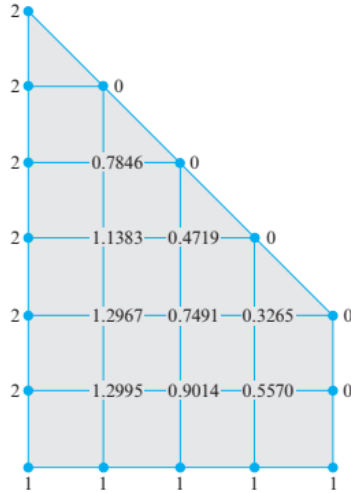


Рис. 1.23

У матричній формі рівняння (5.5) мають вигляд

$$\mathbf{t} = M\mathbf{t} + \mathbf{b}$$

де $\mathbf{t}$ і $\mathbf{b}$ – вектори-стовпці з 49 елементами, а M – матриця 49×49 . Як і в (5.3), розв’язок для $\mathbf{t}$ має вигляд

$$\mathbf{t} = (I - M)^{-1}\mathbf{b}. \quad (5.6)$$

На рисунку 1.24 показано температури в 49 точках сітки, знайдені за допомогою рівняння (5.6). Дев’ять незаштригованих температур на цьому рисунку припадають на точки сітки рисунку 1.23. У таблиці 1.2 ми порівнюємо температури в цих дев’яти спільних точках сітки для трьох різних використовуваних кроків сітки. Знаючи, що температури дискретної задачі наближаються до точних температур зі зменшенням кроку сітки, можна припустити, що дев’ять температур, отриманих у випадку (с) ближчі до точних значень, ніж у випадку (b).

	Температури в спільних точках сітки		
t_i	Випадок (a)	Випадок (b)	Випадок (c)
t_1	–	0.7846	0.8048
t_2	–	1.1383	1.1533
t_3	–	0.4719	0.4778
t_4	–	1.2967	1.3078
t_5	0.7500	0.7491	0.7513
t_6	–	0.3265	0.3157
t_7	–	1.2995	1.3042
t_8	–	0.9014	0.9032
t_9	–	0.5570	0.5554

Табл. 1.2

практичного розв’язування таких систем.

Щоб описати цей метод, ми знову розглянемо рівняння (5.2):

$$\mathbf{t} = M\mathbf{t} + \mathbf{b}. \quad (5.7)$$

Вектор $\mathbf{t}$, який ми шукаємо, з’являється по обидва боки цього рівняння. Ми розглянемо спосіб генерування все кращих і кращих наближень до векторного розв’язку $\mathbf{t}$.

Для початкового наближення $\mathbf{t}^{(0)}$ ми можемо взяти $\mathbf{t}^{(0)} = \mathbf{0}$, якщо немає кращого вибору. Якщо ми підставимо $\mathbf{t}^{(0)}$ у праву частину (5.7) і позначимо отриману ліву частину як $\mathbf{t}^{(1)}$, то матимемо

$$\mathbf{t}^{(1)} = M\mathbf{t}^{(0)} + \mathbf{b} \quad (5.8)$$

Якщо ми підставимо $\mathbf{t}^{(1)}$ у праву частину (5.7), то отримаємо ще одне наближення, яке позначимо $\mathbf{t}^{(2)}$:

$$\mathbf{t}^{(2)} = M\mathbf{t}^{(1)} + \mathbf{b} \quad (5.9)$$

Продовжуючи таким чином, ми генеруємо послідовність наближень наступним чином: Можна було б сподіватися, що ця послідовність наближень $\mathbf{t}^{(0)}, \mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(2)}, \dots$ збігається до точного розв’язку (5.7). Ми не маємо

достатньо місця, щоб заглиблюватись у теоретичні міркування, необхідні для доведення цього. Достатньо сказати, що для конкретної задачі, яку ми розглядаємо, послідовність збігається до точного розв'язку для будь-якого розміру сітки і для будь-якого початкового наближення $\mathbf{t}^{(0)}$.

Ця техніка генерації послідовних наближень до розв'язку (5.7) є різновидом техніки, яка називається *ітерацією Якобі*; самі наближення називаються *ітераціями*.

Як чисельний приклад, застосуємо ітерацію Якобі до обчислення температур точок другої сітки у випадку (b).

Поклавши $\mathbf{t}^{(0)} = \mathbf{0}$, з рівняння (5.2) маємо

$$\mathbf{t}^{(1)} = M\mathbf{t}^{(0)} + \mathbf{b} = M\mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b} = \begin{pmatrix} .5000 \\ .5000 \\ .0000 \\ .5000 \\ .0000 \\ .0000 \\ .7500 \\ .2500 \\ .2500 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{t}^{(2)} = M\mathbf{t}^{(1)} + \mathbf{b} =$$

$$\begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
0.5000 \\
0.5000 \\
0.0000 \\
0.5000 \\
0.0000 \\
0.0000 \\
0.7500 \\
0.2500 \\
0.2500
\end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix}
0.5000 \\
0.5000 \\
0.0000 \\
0.5000 \\
0.0000 \\
0.0000 \\
0.7500 \\
0.2500 \\
0.2500
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0.6250 \\
0.7500 \\
0.1250 \\
0.8125 \\
0.1875 \\
0.0625 \\
0.9375 \\
0.5000 \\
0.3125
\end{pmatrix}.$$

Деякі додаткові ітерації мають наступний вигляд

$$\mathbf{t}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.6875 \\ 0.8906 \\ 0.2344 \\ 0.9688 \\ 0.3750 \\ 0.1250 \\ 1.0781 \\ 0.6094 \\ 0.3906 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}^{(10)} = \begin{pmatrix} 0.7791 \\ 1.1230 \\ 0.4573 \\ 1.2770 \\ 0.7236 \\ 0.3131 \\ 1.2848 \\ 0.8827 \\ 0.5446 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}^{(20)} = \begin{pmatrix} 0.7845 \\ 1.1380 \\ 0.4716 \\ 1.2963 \\ 0.7486 \\ 0.3263 \\ 1.2992 \\ 0.9010 \\ 0.5567 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}^{(30)} = \begin{pmatrix} 0.7846 \\ 1.1383 \\ 0.4719 \\ 1.2967 \\ 0.7491 \\ 0.3265 \\ 1.2995 \\ 0.9014 \\ 0.5570 \end{pmatrix}.$$

Всі ітерації, починаючи з тридцятої, дорівнюють $\mathbf{t}^{(30)}$ з точністю до чотирьох знаків після коми. Отже, $\mathbf{t}^{(30)}$ є точним розв'язком з точністю до чотирьох знаків після коми. Це узгоджується з нашим попереднім результатом, наведеним у рівнянні (5.4).

Ітераційна схема Якобі, застосована до лінійної системи (5.5) з 49 невідомими, дає ітерації, які починають повторюватися з точністю до чотирьох знаків після коми після 119 ітерацій. Таким чином, $\mathbf{t}^{(119)}$ дасть 49 температур для випадку (с) з точністю до чотирьох знаків після коми.

5.4. Метод Монте-Карло

Розглянемо метод Монте-Карло для обчислення температури в одній внутрішній точці сітки дискретної задачі без необхідності обчислювати температури в інших внутрішніх точках сітки. Спочатку визначимо дискретне випадкове блукання вздовж сітки. Під цим ми розуміємо спрямований шлях вздовж ліній сітки (рис. 1.25) яка з'єднує послідовність

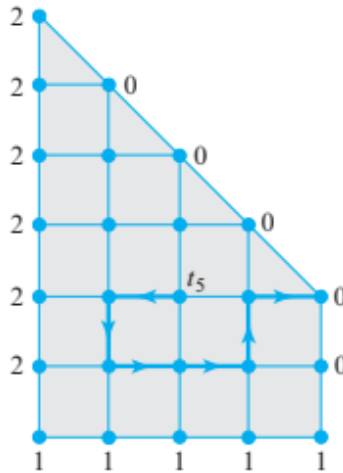


Рис. 1.25

точок сітки таким чином, що напрямок руху з кожної точки сітки вибирається випадковим чином. Кожен з чотирьох можливих напрямків відходу від кожної точки сітки вздовж шляху має бути однаково ймовірним. Використовуючи випадкові блукання, ми можемо обчислити температуру в заданій міжсітковій точці на основі наступної властивості.

Теорема 5.3 (Властивість випадкових блукань). *Нехай $W_1, W_2, \dots, W_n$ – послідовність випадкових блукань, кожне з яких починається у заданій внутрішній точці сітки та $t_1^*, t_2^*, \dots, t_n^*$ – температури в граничних точках сітки, які вперше зустрічаються вздовж кожного з цих випадкових блукань.*

Тоді середнє значення $(t_1^ + t_2^* + \dots + t_n^*)/n$ цих граничних температур наближається до температури в заданій внутрішній точці сітки при необмеженому зростанні кількості випадкових блукань n .*

Ця властивість є наслідком властивості дискретного середнього значення, якій задовольняють температури точок сітки. Доведення властивості випадкових блукань включає елементарні поняття з теорії ймовірностей, і ми не будемо його тут наводити.

У таблиці 1.3 наведено результати великої кількості згенерованих комп'ютером випадкових блукань для оцінки температури t_5 дев'яти-точкової сітки для випадку (b) на рис. 1.25. У першому стовпчику наведено номер n випадкового блукання. У другому стовпчику наведено температуру t_n^* граничної точки, що зустрічається першою на відповідному випадкового блукання. Останній стовпчик містить кумулятивне середнє значення граничних температур, що зустрічаються вздовж n випадкових блукань. Таким чином, після 1000 випадкових блукань ми маємо наближення $t_5 \simeq 0.7550$. Це порівнюється з точним значенням $t_5 = 0.7491$, яке ми оцінили раніше. Як бачимо, збіжність до точного значення не надто швидка.

5.5. Вправи для самостійного розв'язування.

Задача 1.

1. Пластина у формі круглого диска має граничні температури 0° зліва від його окружності та 1° на правій половині окружності. На диск накладено сітку з чотирма внутрішніми точками (див. рисунок 1.26).

(a) Використовуючи властивість дискретного середнього значення, запишіть систему 4×4 лінійних рівнянь $\mathbf{t} = M\mathbf{t} + \mathbf{b}$, яка визначає наближені температури у чотирьох внутрішніх точках сітки.

(b) Розв'яжіть лінійну систему в частині (a).

(c) Використовуючи ітераційну схему Якобі з $\mathbf{t}^{(0)} = 0$, згенеруйте ітерації $\mathbf{t}^{(1)}$, $\mathbf{t}^{(2)}$, $\mathbf{t}^{(3)}$, $\mathbf{t}^{(4)}$ і $\mathbf{t}^{(5)}$ для лінійної системи в частині (a). Яким є «вектор похибки» $\mathbf{t}^{(5)} - \mathbf{t}$, де $\mathbf{t}$ - розв'язок, знайдений у частині (b)?

n	t^*	$(t_1^* + \dots + t_n^*)/n$
1	1	1.0000
2	2	1.5000
3	1	1.3333
4	0	1.0000
5	2	1.2000
6	0	1.0000
7	2	1.1429
8	0	1.0000
9	2	1.1111
10	0	1.0000
20	1	0.9500
30	0	0.8000
40	0	0.8250
50	2	0.8400
100	0	0.8300
150	1	0.8000
200	0	0.8050
250	1	0.8240
500	1	0.7860
1000	0	0.7550

Табл. 1.3

(d) За допомогою певних сучасних методів можна визначити, що точні температури з точністю до чотирьох знаків після коми в чотирьох точках сітки становлять $t_1 = t_3 = 0.2871$ і $t_2 = t_4 = 0.7129$. Яка похибка у відсотках у значеннях, знайдених у частині (b)?

Задача 2. Використовуючи теорему 5.1, знайдіть точну температуру рівноваги в центрі диска у Задачі 1.

Задача 3. Обчислити перші два ітерації $\mathbf{t}^{(1)}$ і $\mathbf{t}^{(2)}$ для випадку (b) на рисунку 10.10.3 з дев'ятьма внутрішніми точками сітки (див. рівняння

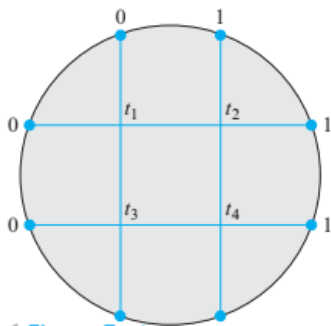


Рис. 1.26

(5.2)) при значеннях перший ітераційний прохід вибирається як

$$\mathbf{t}^{(0)} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$$

Задача 4. Випадкове блукання, проілюстроване на рисунку 1.6 (а), можна описати шістьма стрілками $\leftarrow \downarrow \rightarrow \uparrow \rightarrow$, які вказують напрямки руху по послідовності точок сітки вздовж шляху. Рисунок 1.27 (b) являє собою масив зі 100 згенерованих комп'ютером випадково орієнтованих стрілок, розташованих у вигляді таблиці 10×10 . Використовуйте ці стрілки для визначення випадкових блукань для наближеного визначення температури t_5 , як показано у таблиці 2.

Зробіть це наступним чином:

1. Візьміть дві останні цифри вашої залікової книжки. Використовуйте останню цифру, щоб вказати рядок, а другу - щоб вказати стовпчик.
2. Перейдіть до стрілки в масиві з цим рядком і стовпцем номер.
3. Використовуючи цю стрілку як відправну точку, переміщайтеся по масиву стрілок так, як ви читаєте книгу (зліва направо і зверху вниз). донизу). Починаючи з точки, позначеної t_5 на рисунку 1.27 (а) і використовуючи цю послідовність стрілок, щоб задати послідовність напрямків, рухайтесь від точки до точки сітки, доки не досягнете граничної точки сіті. На цьому завершиться перше випадкове блукання. Запишіть

6. Побудова кривих і поверхонь за заданими точками.

Тут буде описано метод, який використовує визначники для побудови прямих, кіл та загальних конічних перерізів через задані точки на площині. Цей метод також застосовується для побудови площин і сфер у 3-вимірному просторі через фіксовані точки.

З теореми Крамера для лінійних алгебраїчних систем випливає наступна теорема.

Теорема 6.1. *Однорідна лінійна система з такою кількістю рівнянь, яка дорівнює кількості невідомих, має нетривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли визначник матриці коефіцієнтів дорівнює нулю.*

Ми покажемо, як цей результат можна використати для визначення рівнянь різних кривих і поверхонь, що проходять через задані точки.

6.1. Рівняння прямої, що проходить через дві точки.

Нехай (x_1, y_1) і (x_2, y_2) - дві різні точки на площині. Існує єдина пряма

$$c_1 x + c_2 y + c_3 = 0, \quad (6.1)$$

яка проходить через ці дві точки (рисунок 1.28).

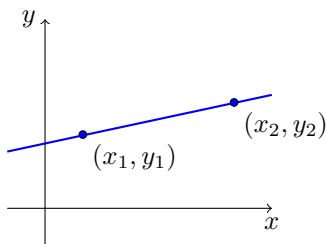


Рис. 1.28

Відмітимо, що c_1 , c_2 і c_3 повинні задовольняти умову $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \neq 0$. Оскільки (x_1, y_1) і (x_2, y_2) лежать на одній прямій, підстановка їх у (6.1)

дає два рівняння

$$c_1 x_1 + c_2 y_1 + c_3 = 0 \quad (6.2)$$

$$c_1 x_2 + c_2 y_2 + c_3 = 0 \quad (6.3)$$

Три рівняння (6.1), (6.2) і (6.3) можна згрупувати і переписати у вигляді

$$\begin{cases} x c_1 + y c_2 + c_3 = 0; \\ x_1 c_1 + y_1 c_2 + c_3 = 0; \\ x_2 c_1 + y_2 c_2 + c_3 = 0; \end{cases}$$

що є однорідною системою лінійних рівнянь з трьома невідомими c_1 , c_2 і c_3 .

Оскільки c_1 , c_2 і c_3 одночасно не дорівнюють нулю, ця система має нетривіальний розв'язок, тому визначник матриці коефіцієнтів системи повинен дорівнювати нулю. Тобто

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.4)$$

Отже, кожна точка (x, y) на прямій задовольняє (6.4); і навпаки, можна показати, що кожна точка (x, y) , яка задовольняє (6.4), лежить на прямій.

Приклад 6.1 (Рівняння прямої). Знайти рівняння прямої, яка проходить через дві точки $(2, 1)$ і $(3, 7)$.

Розв'язання. Підставивши координати двох точок у рівняння (6.4), отримаємо

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розклад визначника по першому рядку дає шукане рівняння

$$6x + y + 11 = 0.$$

6.2. Рівняння кола, що проходить через три точки.

Припустимо, що на площині є три різні точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) і (x_3, y_3) , які не лежать на одній прямій. З аналітичної геометрії ми знаємо, що існує єдине коло, скажімо

$$c_1 (x^2 + y^2) + c_2 x + c_3 y + c_4 = 0, \quad (6.5)$$

яке проходить через них (див. Рис. 1.19).

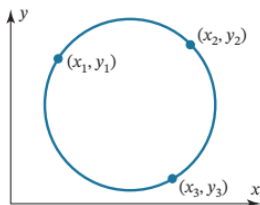


Рис. 1.29

Підставивши координати трьох точок у це рівняння, отримаємо

$$c_1 (x_1^2 + y_1^2) + c_2 x_1 + c_3 y_1 + c_4 = 0; \quad (6.6)$$

$$c_1 (x_2^2 + y_2^2) + c_2 x_2 + c_3 y_2 + c_4 = 0; \quad (6.7)$$

$$c_1 (x_3^2 + y_3^2) + c_2 x_3 + c_3 y_3 + c_4 = 0 \quad (6.8)$$

Як і раніше, рівняння (6.5) - (6.8) утворюють однорідну лінійну систему з нетривіальним розв'язком для c_1 , c_2 , c_3 і c_4 .

Таким чином, визначник матриці коефіцієнтів дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.9)$$

Це форма визначника для рівняння кола.

Приклад 6.2 (Рівняння кола). Знайти рівняння кола, яке проходить через три точки $(1, 7)$, $(6, 2)$ і $(4, 6)$.

Розв'язання. Підставивши координати трьох точок у рівняння (6.9), отримаємо

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 50 & 1 & 7 & 1 \\ 40 & 6 & 2 & 1 \\ 52 & 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

ЩО ЗВОДИТЬСЯ ДО

$$10(x^2 + y^2) - 20x - 40y - 200 = 0$$

У стандартному вигляді це має вигляд

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 52.$$

Таким чином, коло має центр $(1, 2)$ і радіус 5 .

6.3. Загальне рівняння конічного перерізу на площині.

Загальний переріз конуса через п'ять точок U своїй фундаментальній праці «Математичні начала» Ісак Ньютон поставив і розв'язав наступну задачу: «Описати еліпс, який проходить через п'ять заданих точок». Ньютон розв'язав цю задачу геометрично, як показано на рисунку 1.30, де він провів еліпс через точки A, B, D, P, C . Тут показано, що методи цього розділу також можуть бути застосовані і в цьому випадку.

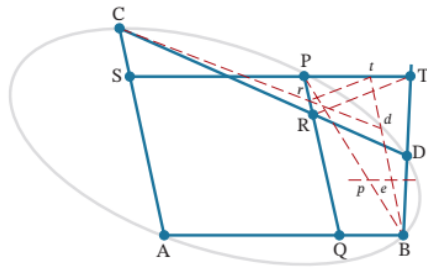


Рис. 1.30

Загальне рівняння конічного перерізу на площині (параболи, гіпер-

боли або еліпса, або вироджених форм цих кривих) має вигляд

$$c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x + c_5y + c_6 = 0.$$

Це рівняння містить шість коефіцієнтів, але ми можемо зменшити їх кількість до п'яти, якщо розділимо на будь-який з них, відмінний від нуля. Таким чином, потрібно визначити лише п'ять коефіцієнтів, тому для визначення рівняння конічного перерізу достатньо п'яти різних точок на площині (рис. 1.31).

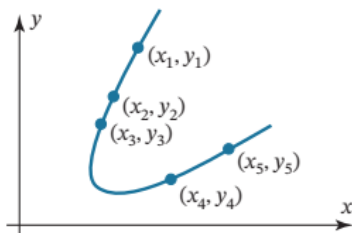


Рис. 1.31

Як і раніше, рівняння можна подати у вигляді визначника:

$$\begin{vmatrix} x^2 & x \cdot y & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 \cdot y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 \cdot y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 \cdot y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 \cdot y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5 \cdot y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.10)$$

Приклад 6.3 (Рівняння орбіти). Астроном, який хоче визначити орбіту астероїда навколо Сонця, створює декартову систему координат у площині орбіти з початком координат на Сонці. По осях відкладаються астрономічні одиниці вимірювання (1 астрономічна одиниця = середня відстань від Землі до Сонця = 93 мільйони миль). За першим законом Кеплера, орбіта повинна бути еліпсом, тому астроном проводить п'ять спостережень астероїда в п'ять різних моментів часу і знаходить

п'ять точок вздовж орбіти $(8.025, 8.310)$, $(10.170, 6.355)$, $(11.202, 3.212)$, $(10.736, 0.375)$, $(9.092, -2.267)$. Знайдіть рівняння орбіти.

Розв'язання. Підставивши координати п'яти заданих точок у (6.10) та округливши до трьох знаків після коми дають

$$\begin{vmatrix} x^2 & x \cdot y & y^2 & x & y & 1 \\ 64.401 & 66.688 & 69.056 & 8.025 & 8.310 & 1 \\ 103.429 & 64.630 & 40.386 & 10.170 & 6.355 & 1 \\ 125.485 & 35.981 & 10.317 & 11.202 & 3.212 & 1 \\ 115.262 & 4.026 & 0.141 & 10.736 & 0.375 & 1 \\ 82.664 & -20.612 & 5.139 & 9.092 & -2.267 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розклавши цей визначник по першому рядку, отримаємо рівняння орбіти астероїда

$$386.802x^2 - 102.895xy + 446.029y^2 - 2476.443x - 1427.998y - 17109.375 = 0.$$

На рисунку 1.32 зображено орбіта астероїда разом з п'ятьма заданими точками.

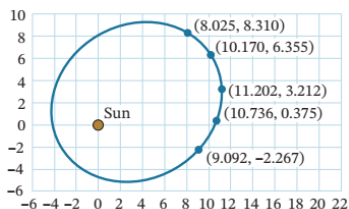


Рис. 1.32

6.4. Рівняння площини, що проходить через три точки.

Площина у тривимірному просторі з рівнянням

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 = 0,$$

яка проходить через три неколінеарні точки (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) і (x_3, y_3, z_3) , задається наступним рівнянням

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.11)$$

Приклад 6.4 (Рівняння площини). Знайти рівняння площини, яка проходить через три неколінеарні точки $(1, 1, 0)$, $(2, 0, -1)$ та $(2, 9, 2)$.

Розв'язання. Рівняння площини має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 9 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

що зводиться до канонічного рівняння

$$2x - y + 3z - 1 = 0.$$

6.5. Рівняння сфери, яка проходить через чотири точки.

Рівняння сфери у тривимірному просторі з рівнянням

$$c_1(x^2 + y^2 + z^2) + c_2x + c_3y + c_4z + c_5 = 0,$$

яка проходить через чотири некопланарні точки (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) та (x_4, y_4, z_4) , задається наступним рівнянням:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.12)$$

Приклад 6.5 (Рівняння сфери). Знайти рівняння сфери, яка проходить через чотири точки $(0, 3, 2)$, $(1, -1, 1)$, $(2, 1, 0)$ та $(5, 1, 3)$

Розв'язання. Рівняння сфери має вигляд

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ 13 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 35 & 5 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Це зводиться до

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z + 5 = 0,$$

що у стандартному вигляді має вигляд

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9.$$

6.6. Вправи для самостійного розв'язування.

Вправа 1. Знайдіть рівняння прямих, які проходять через наступні точки:

(a) $(1, -1)$, $(2, 2)$;

(b) $(0, 1)$, $(1, -1)$.

Вправа 2. Знайдіть рівняння кіл, які проходять через наступні точки:

(a) $(2, 6)$, $(2, 0)$, $(5, 3)$;

(b) $(2, -2)$, $(3, 5)$, $(-4, 6)$.

Вправа 3. Знайдіть рівняння кривої другого порядку, який проходить через точки з координатами $(0, 0)$, $(0, -1)$, $(2, 0)$, $(2, -5)$ і $(4, -1)$.

Вправа 4. Знайти рівняння площин у 3-вимірному просторі, які проходять через наступні точки:

(a) $(1, 1, -3)$, $(1, -1, 1)$, $(0, -1, 2)$;

(b) $(2, 3, 1)$, $(2, -1, -1)$, $(1, 2, 1)$.

Вправа 5. (a) Змініть рівняння (7.5) так, щоб воно визначало площину, яка проходить через початок координат і паралельна площині, яка проходить через три задані неколінеарні точки.

(b) Знайдіть дві площини, описані в частині (a), що відповідають трійкам точок у вправах 4(a) і 4(b).

Вправа 6. Знайдіть рівняння сфер у 3-вимірному просторі, які проходять через наступні точки:

- (a) $(1, 2, 3), (-1, 2, 1), (1, 0, 1), (1, 2, -1)$;
 (b) $(0, 1, -2), (1, 3, 1), (2, -1, 0), (3, 1, -1)$.

Вправа 7.(a) Покажіть, що якщо дев'ять точок (x_i, y_i) для $i = 1, 2, 3, \dots, 9$ лежать на цій поверхні, і якщо вони однозначно визначають рівняння цієї поверхні, то її рівняння можна записати у вигляді рівності:

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & xy & xz & yz & x & y & z & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1 y_1 & x_1 z_1 & y_1 z_1 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & x_2 y_2 & x_2 z_2 & y_2 z_2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & x_3 y_3 & x_3 z_3 & y_3 z_3 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & x_4 y_4 & x_4 z_4 & y_4 z_4 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & x_5 y_5 & x_5 z_5 & y_5 z_5 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & x_6 y_6 & x_6 z_6 & y_6 z_6 & x_6 & y_6 & z_6 & 1 \\ x_7^2 & y_7^2 & z_7^2 & x_7 y_7 & x_7 z_7 & y_7 z_7 & x_7 & y_7 & z_7 & 1 \\ x_8^2 & y_8^2 & z_8^2 & x_8 y_8 & x_8 z_8 & y_8 z_8 & x_8 & y_8 & z_8 & 1 \\ x_9^2 & y_9^2 & z_9^2 & x_9 y_9 & x_9 z_9 & y_9 z_9 & x_9 & y_9 & z_9 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(b) Використовуючи результат у частині (a), знайдіть рівняння квадратичної поверхні, яка проходить через точки $(1, 2, 3), (2, 1, 7), (0, 4, 6), (3, -1, 4), (3, 0, 11), (-1, 5, 8), (9, -8, 3), (4, 5, 3)$, і $(-2, 6, 10)$.

Вправа 8.(a) Гіперплощина у n -вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ має рівняння виду

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n + a_{n+1} = 0, \quad (6.13)$$

де $a_i, i = 1, 2, 3, \dots, n + 1$, є константами, не всі з яких дорівнюють нулю, а $x_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ – змінні, для яких $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Точка $(x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0}) \in \mathbb{R}^n$ належить гіперплощині, якщо

$$a_1 x_{10} + a_2 x_{20} + a_3 x_{30} + \dots + a_n x_{n0} + a_{n+1} = 0$$

Враховуючи, що n точок $(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, \dots, x_{ni}), i = 1, 2, 3, \dots, n$, ле-

жать на цій гіперплощині і що вони однозначно визначають рівняння гіперплощини, покажіть, що рівняння гіперплощини можна записати у визначальній формі у вигляді

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & 1 \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} & \dots & x_{n1} & 1 \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & \dots & x_{n2} & 1 \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & \dots & x_{n3} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & x_{3n} & \dots & x_{nn} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(b) Визначте рівняння гіперплощини в $\mathbb{R}^9$, яка проходить через наступні дев'ять точок: $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$, $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1)$, $(3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2)$, $(4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3)$, $(5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4)$, $(6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5)$, $(7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $(8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, $(9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$.

7. Інтерполяція многочленів та лінеаризація.

7.1. Інтерполяція многочленів

Важливою проблемою у різних застосуваннях є знаходження полінома, графік якого проходить через задану множину точок на площині. Такий многочлен називається інтерполяційним многочленом для заданих точок.

Найпростішим прикладом такої задачі є знаходження лінійного многочлена

$$p(x) = a x + b \quad (7.1)$$

графік якого проходить через дві відомі різні точки та , на площині $x y$ (Рисунок 1.33). Ви, напевно, зустрічалися з різними методами в аналітичній геометрії для знаходження рівняння прямої, що проходить через дві точки, але тут ми наведемо метод, заснований на системах лінійних рівнянь , який можна адаптувати до загальної поліноміальної інтерполяції.

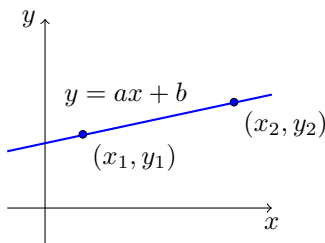


Рис. 1.33

Графіком рівняння (7.1) є пряма $y = ax + b$, і для того, щоб ця пряма проходила через точки (x_1, y_1) і (x_2, y_2) , ми повинні мати

$$y_1 = ax_1 + b \quad \text{та} \quad y_2 = ax_2 + b.$$

Отже, невідомі коефіцієнти a і b можна отримати, розв'язавши лінійну

систему

$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2. \end{cases}$$

Для розв'язання цієї системи нам не потрібно ніяких хитромудрих методів - значення a можна отримати шляхом віднімання рівнянь, щоб виключити b , а потім значення a можна підставити в будь-яке з рівнянь, щоб знайти b . Ми залишаємо в якості вправи знайти a і b , а потім показати, що вони можуть бути виражені у вигляді

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{і} \quad b = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} \quad (7.2)$$

при умові, що $x_1 \neq x_2$. Таким чином, наприклад, пряма $y = ax + b$, яка проходить через точки $(2, 1)$ і $(5, 4)$ можна отримати, взявши $(x_1, y_1) = (2, 1)$ і $(x_2, y_2) = (5, 4)$, у цьому випадку (7.2) дає

$$a = \frac{4 - 1}{5 - 2} = 1 \quad \text{і} \quad b = \frac{1 \cdot 5 - 4 \cdot 2}{5 - 2} = -1.$$

Отже, рівняння прямої має вигляд

$$y = x - 1. \quad (7.3)$$

Тепер розглянемо більш загальну задачу знаходження многочлена, гра-

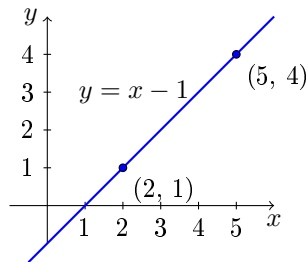


Рис. 1.34

фік якого проходить через n точок з різними координатами x

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n) \quad (7.4)$$

Оскільки потрібно задовольнити n умов, інтуїція підказує, що слід по-

чати з пошуку многочлена виду

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \quad (7.5)$$

оскільки многочлен такого вигляду має n коефіцієнтів, які є у нашому розпорядженні, щоб задовольнити тодішнім умовам. Однак ми хочемо передбачити випадки, коли точки можуть лежати на одній прямій або мати іншу конфігурацію, яка б дозволила використовувати многочлен зі степенем, меншим за $n - 1$; таким чином, ми допускаємо можливість того, що a_{n-1} та інші коефіцієнти у (7.5) можуть дорівнювати нулю.

Наступна теорема, яку ми доведемо далі в тексті, є основним результатом поліноміальної інтерполяції.

Теорема 7.1 (Поліноміальна інтерполяція). *Для довільних n точок на площині xy з різними координатами x існує єдиний многочлен степеня $n - 1$ або менше, графік якого проходить через ці точки.*

Розглянемо, як можна знайти інтерполюючий многочлен (7.5), графік якого проходить через точки (7.4).

Оскільки графік цього полінома є графіком рівняння

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} \quad (7.6)$$

то координати точок графіка повинні задовольняти системі рівнянь

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_{n-1}x_2^{n-1} = y_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_{n-1}x_n^{n-1} = y_n. \end{cases} \quad (7.7)$$

У цих рівняннях значення x та y вважаються відомими, тому ми можемо розглядати їх як лінійну систему у невідомих $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$. З цієї

точки зору розширена матриця для системи має вигляд

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & y_n \end{array} \right), \quad (7.8)$$

і, отже, інтерполяційний поліном можна знайти, розв'язавши цю систему (вона має єдиний розв'язок, оскільки визначник коефіцієнтів системи є визначником Вронського, який відмінний від 0, якщо $x_i \neq x_j$).

Приклад 7.1. Поліноміальна інтерполяція.

Знайти кубічний поліном, графік якого проходить через точки $(1, 3)$, $(2, -2)$, $(3, -5)$, $(4, 0)$.

Розв'язання. Оскільки точок чотири, використаємо інтерполюючий многочлен степеня $n = 3$. Позначимо цей многочлен через $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ і позначимо x – та y – координати заданих точок через $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ та $y_1 = 3$, $y_2 = -2$, $y_3 = -5$, $y_4 = 0$. Таким чином, з (14) випливає, що доповнена матриця для лінійної системи при невідомих a_0, a_1, a_2, a_3 має вигляд

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & y_3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & y_4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & -2 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & -5 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 0 \end{array} \right).$$

Залишаємо вам підтвердити, що скорочена форма перетворення рядків цієї матриці має вигляд

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

звідки випливає, що $a_0 = 4$, $a_1 = 3$, $a_2 = -5$, $a_3 = 1$. Таким чином,

інтерполюючий многочлен має вигляд

$$p(x) = 4 + 3x - 5x^2 + x^3$$

Графік цього полінома та задані точки показано на рисунку 1.35.

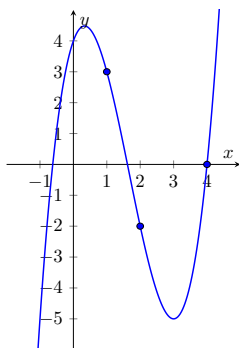


Рис. 1.35

Зауваження. Пізніше ми наведемо ефективніший метод знаходження інтерполяційних поліномів, який краще підходить для задач з великою кількістю точок даних.

7.2. Наближені обчислення

У математичному аналізі та обчислювальній математиці часто виникають задачі, які неможливо розв'язати точними методами. Многочлени, завдяки своїм властивостям, стають потужним інструментом для наближених обчислень.

Многочлени мають кілька фундаментальних властивостей, що роблять їх особливо цінними для наближених обчислень:

- Простота обчислення значень
- Легкість диференціювання та інтегрування
- Можливість апроксимації складних функцій
- Добра обумовленість обчислювальних алгоритмів

Нехай маємо функцію $f(x)$, яка є неперервною на відрізку $[a, b]$. Основна ідея полягає в побудові многочлена $p(x)$ степеня n :

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (7.9)$$

такого, що $p(x)$ "достатньо добре" наближає $f(x)$ на заданому відрізку.

Розглянемо задачу обчислення визначеного інтеграла. Нехай потрібно обчислити

$$\int_a^b f(x)dx \quad (7.10)$$

де первісна функції $f(x)$ не виражається через елементарні функції.

Алгоритм розв'язання включає наступні кроки:

1. Вибір вузлів інтерполяції $x_0, x_1, \dots, x_n$
2. Обчислення значень функції $f(x_i)$ у вузлах
3. Побудова інтерполяційного многочлена $p(x)$
4. Інтегрування отриманого многочлена

Якість апроксимації залежить від кількох факторів:

- Степеня многочлена n .
- Вибору вузлів інтерполяції.
- Гладкості функції $f(x)$.
- Довжини інтервалу апроксимації.

Приклад 7.2 (Наближене інтегрування.). Не існує способу обчислити інтеграл

$$\int_0^1 p(x)dx$$

безпосередньо, оскільки не існує способу виразити первісну через елементарні функції. Цей інтеграл можна наближено обчислити за правилом Сімпсона або іншим подібним методом, але альтернативний підхід полягає в апроксимації підінтегральної функції інтерполюючим поліномом та наступному інтегруванні інтерполюючого полінома. Наприклад, розглянемо п'ять точок

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.25, \quad x_2 = 0.5, \quad x_3 = 0.75, \quad x_4 = 1,$$

які розбивають проміжок $[0, 1]$ на чотири рівновіддалені підінтервали (рисунок 1.36). При цьому, значення функції

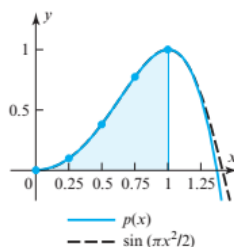


Рис. 1.36

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$$

у цих точках приблизно дорівнюють

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, & f(0.25) &= 0.098017, & f(0.5) &= 0.382683, \\ f(0.75) &= 0.77301, & f(1) &= 1. \end{aligned}$$

Інтерполюючий поліном має вигляд (перевірити)

$$p(x) = 0.098796x + 0.762356x^2 + 2.14429x^3 - 2.00544x^4 \quad (7.11)$$

і

$$\int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 (0.098796x + 0.762356x^2 + 2.14429x^3 - 2.00544x^4) dx \approx 0.438501 \quad (7.12)$$

Як показано на рисунку 1.36, графіки $f(x)$ і $p(x)$ дуже близько збігаються на інтервалі $[0, 1]$, тому апроксимація є досить хорошою.

7.3. Лінеаризація.

Лінеаризація є потужним математичним інструментом, який дозволяє звести нелінійні задачі до лінійних, що значно спрощує їх розв'язання. У сучасній прикладній математиці цей метод має широке застосування: від астрономії до машинного навчання.

Нехай маємо нелінійну функцію або систему рівнянь. Лінеаризація дозволяє нам апроксимувати її лінійними відображеннями, яке можна описати за допомогою матриць та векторів. Цей процес можна розглядати як відображення зі складного нелінійного простору у простір лінійних перетворень.

Розглянемо класичний приклад з астрономії (закон Кеплера), де лінеаризація допомагає виявити фундаментальні закони руху планет. Нехай маємо нелінійну залежність між періодом обертання планети p та її відстанню від Сонця d :

$$p = ad^b \quad (7.13)$$

де a та b - невідомі константи. Це рівняння є нелінійним відносно параметра b , що ускладнює його безпосереднє розв'язання.

Застосуємо логарифмічне перетворення:

$$\ln(p) = \ln(a) + b \ln(d) \quad (7.14)$$

Введемо заміну:

$$y = \ln(p)$$

$$x = \ln(d)$$

$$c = \ln(a)$$

Отримуємо лінійне рівняння:

$$y = c + bx \quad (7.15)$$

Тепер задача звелася до знаходження параметрів лінійної функції, що можна розв'язати методами лінійної алгебри, зокрема:

- через систему лінійних рівнянь
- методом найменших квадратів
- за допомогою матричних операцій

У загальному випадку лінеаризація може бути представлена як відображення:

$$\mathcal{L} : \mathcal{M} \rightarrow \text{Lin}(V, W) \quad (7.16)$$

де $\mathcal{M}$ - множина нелінійних відображень, а $\text{Lin}(V, W)$ - простір лінійних відображень між векторними просторами V та W .

Лінеаризація знаходить широке застосування в:

- Машинному навчанні (активаційні функції)
- Оптимізації (градієнтні методи)
- Теорії керування (лінійні регулятори)
- Чисельних методах (ітераційні схеми)

Таким чином, лінеаризація є фундаментальним інструментом, що дозволяє звести складні нелінійні задачі до більш простих лінійних аналогів. Це не тільки спрощує математичний апарат, але й дозволяє застосовувати потужні методи лінійної алгебри для розв'язання прикладних задач.

Приклад 7.3 (Періоди обертання планет). Більшість людей знають, що планетам, які знаходяться ближче до Сонця, потрібен менший проміжок часу, щоб зробити один оберт навколо Сонця, ніж планетам, які знаходяться далі від нього. У таблиці 1.4 наведено середню відстань від Сонця та кількість земних діб, необхідних для проходження однієї орбіти. Отримати рівняння, яке описує зв'язок між відстанню від Сонця і тривалістю орбітального періоду.

Планета	Відстань від Сонця ($\times 10^6$ км)	Орбітальний період (дні)
Меркурій	57,9	88
Венера	108,2	224,7
Земля	149,6	365,2
Марс	227,9	687
Юпітер	778,6	4331
Сатурн	1433,5	10747
Уран	2872,5	30589
Нептун	4495,1	59800

Табл. 1.4: Планетарні орбітальні відстані та періоди

Розв'язання. Розглянемо для початку діаграму розсіювання даних, наведену на рисунку 1.37. Здається, що в цих даних є певна закономір-

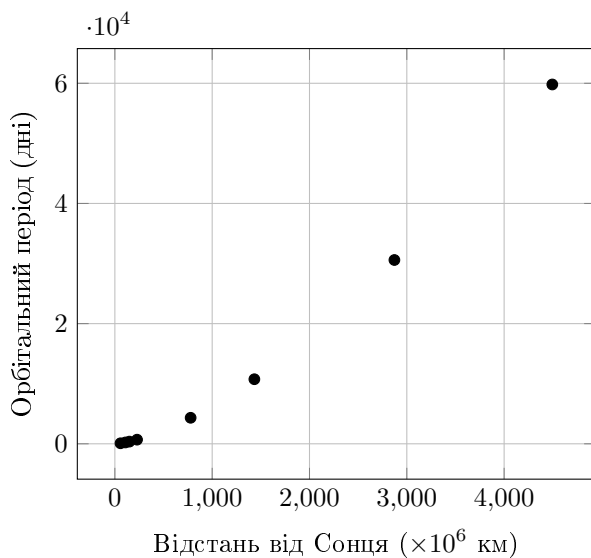


Рис. 1.37: Залежність орбітальної відстані від періоду обертання.

ність. Точки не лежать на одній лінії, але криволінійна форма свідчить

про те, що для констант a і b дані можуть наближатися до задовільнення рівнянню

$$p = a d^b. \quad (7.17)$$

де p - орбітальний період, а d - відстань від Сонця. Зауважимо, що рівняння (7.17) не є лінійним відносно a і b , але його можна лінеаризувати, якщо ми застосуємо логарифмічну функцію в обидві сторони. Це дає нам

$$\ln(p) = \ln(a d^b) = \ln(a) + b \ln(d).$$

Якщо ми покладемо $a_1 = \ln(a)$ і підставимо дані для Меркурія і Венери, то отримаємо систему з двох рівнянь і двох невідомих

$$\begin{cases} a_1 + b \ln(57.9) = \ln(88) \\ a_1 + b \ln(108.2) = \ln(224.7) \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є $a_1 \approx -1.60771$ та $b \approx 1.49925$. Оскільки $a_1 = \ln(a)$, то маємо $a \approx e^{-1.60771} = 0.200346$, що дає формулу

$$p = (0.200346) d^{1.49925}.$$

У таблиці 1.5 наведено фактичний і прогнозований (за наведеною вище формулою) орбітальний період для кожної планети. Прогнози до-

Планета	Відстань	Фактичний період	Прогнозований період
Меркурій	57,9	88	87,9988
Венера	108,2	224,7	224,696
Земля	149,6	365,2	365,214
Марс	227,9	687	686,482
Юпітер	778,6	4331	4330,96
Сатурн	1433,5	10,747	10814,6
Уран	2872,5	30,589	30644,3
Нептун	4495,1	59,800	59999.8

Табл. 1.5: Планетні орбітальні відстані та періоди обертання

сять хороші, що свідчить про те, що наша формула на правильному

шляху. Однак прогнози стають менш точними для планет, що знаходяться далі від Сонця. Оскільки для розробки нашої формули ми використовували дані для Меркурія і Венери, можливо, це не дивно. Якщо натомість використати дані для Урана і Нептуна, то отримаємо формулу

$$p = (0.20349) d^{1.497}.$$

Таблиця 1.6 показує, що ця формула дає кращі прогнози. Природна ідея

Планета	Прогнозований період
Меркурій	88,6
Венера	225,8
Земля	366,8
Марс	688,8
Юпітер	4334
Сатурн	10 806
Уран	30 589
Нептун	59 799

Табл. 1.6: Прогнозовані орбітальні періоди

полягає в тому, щоб включити більше даних у нашу формулу, використовуючи більше планет, щоб для створення більшої системи рівнянь. На жаль, якщо ми використовуємо більше двох планет, ми отримаємо систему, яка не має розв'язків. (перевірте самостійно.) Таким чином, існують обмеження на те, що ми можемо зробити за допомогою інструментів, які ми зараз маємо в наявності. У Розділі XX (метод найменших квадратів) ми розглянемо більш складний метод, який дозволяє нам використовувати всі наші дані одночасно, щоб отримати формулу, яка дає хорошу оцінку для різних відстаней від Сонця.

7.4. Вправи для самостійного розв'язування.

Вправа 1. Знайдіть квадратний многочлен, графік якого проходить через точки (1, 1), (2, 2) і (3, 5).

Вправа 2. Знайдіть квадратний многочлен, графік якого проходить через точки $(0, 0)$, $(-1, 1)$ і $(1, 1)$.

Вправа 3. Знайдіть кубічний многочлен, графік якого проходить через точки $(-1, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(4, -1)$.

Вправа 4. На рисунку 1.38, зображено графік кубічного многочлена. Знайдіть цей многочлен.

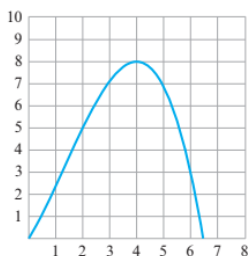


Рис. 1.38

Вправа 5. (а) Знайдіть рівняння, яке представляє сім'ю всіх многочленів другого степеня, які проходять через точки $(0, 1)$ і $(1, 2)$.

(Вказівка: рівняння буде містити один довільний параметр, від якого залежать члени сім'ї при його зміні.)

(b) Від руки або за допомогою графічного редактора накресліть чотири криві сімейства.

Вправа 6. У таблиці 7.4 показано підйомну силу на крилі літака, виміряну в аеродинамічній трубі при різних швидкостях вітру. Змодельуйте дані за допомогою інтерполяційного полінома 5-го степеня і використайте цей поліном для оцінки підйомної сили при швидкості 2000 футів/с.

Швидкість (100 футів/с)	1	2	4	8	16	32
Підйомна сила (100 фунтів)	0	3.12	15.86	33.7	81.5	123.0

Вправа 7. Знайдіть наближене значення інтеграла

$$\int_0^1 e^{x^2} dx,$$

розбивши інтервал інтегрування на п'ять рівних частин і використовуючи інтерполяційний поліном для апроксимації підінтегральної функції. Порівняйте свою відповідь з відповіддю, отриманою за допомогою чисельного інтегрування програмними засобами комп'ютерної математики.

8. Кубічна сплайн-інтерполяція.

У цьому розділі в якості фізичної моделі для математичної задачі знаходження кривої, що проходить через задані точки на площині, використовується креслярський інструмент в якості фізичної моделі. Параметри кривої визначаються шляхом розв'язання лінійної системи рівнянь.

Підбір кривих через задані точки на площині є поширеною задачею, з якою стикаються при аналізі експериментальних даних, при встановленні зв'язків між змінними та в проектних роботах. Повсюдне застосування знаходить у розробці та описі комп'ютерних і принтерних шрифтів, таких як шрифти PostScript™ і TrueType™ (рис. 1.39).

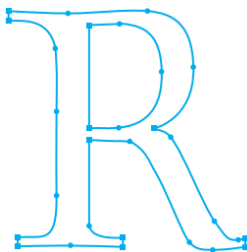


Рис. 1.39

На рисунку 1.40(а) відображено сім точок на площині x, y , а на рисунку 1.40(в) побудовано плавну криву, яка проходить через них. Кажуть, що крива, яка проходить через набір точок на площині, інтерполює ці точки, а сама крива називається інтерполяційною кривою для цих точок. Інтерполяційна крива на рисунку 1.40(в) була побудована за допомогою лекальної лінійки (рисунк 1.40(б)). Цей креслярський інструмент складається з тонкої, гнучкої смужки дерева або іншого матеріалу, яка згинається так, щоб проходити через точки, які потрібно інтерполювати. Прикріплені до неї тягарці утримують сплайн у потрібному положенні, доки художник малює криву інтерполяції. Сплайн

для малювання слугуватиме фізичною моделлю для математичної теорії інтерполяції, яку ми обговоримо в цьому розділі.

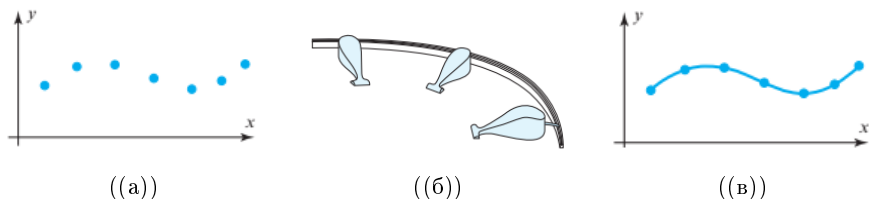


Рис. 1.40

8.1. Постановка задачі.

Нехай задано n точок на площині xy ,

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n),$$

які ми хочемо інтерполювати за допомогою «гарної» кривої (Рисунок 1.41). Для зручності ми вважаємо, що точки розташовані на однаковій відстані в напрямку x , хоча наші результати можна легко поширити на випадок нерівномірно віддалених точок. Якщо ми вважатимемо, що спільна відстань між x -координатами точок дорівнює h , то маємо

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_n - x_{n-1} = h.$$

Нехай $y = S(x)$, $x_1 \leq x \leq x_n$ — інтерполяційна крива, яку ми шукаємо. Будемо вважати, що ця крива описує переміщення креслярського сплайна, який інтерполює n точок коли ваги, що утримують сплайн, розташовані точно в цих n точках. З лінійної теорії балок відомо, що для малих переміщень четверта похідна від переміщення балки дорівнює нулю вздовж будь-якого інтервалу осі x , який не містить зовнішніх сил, що діють на балку. Якщо ми розглядаємо наш креслярський сплайн як тонку балку і розуміємо, що єдиними зовнішніми силами, що діють

на неї, є ваги в n заданих точках, то з цього випливає, що

$$S^{(iv)}(x) \equiv 0 \quad (8.1)$$

для значень x , що лежать у $n - 1$ відкритих інтервалах

$$(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n)$$

між n точками. Нам також потрібен результат з лінійної теорії балок,

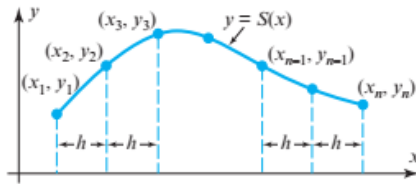


Рис. 1.41

який стверджує, що для балки, на яку діють лише зовнішні сили на яку діють лише зовнішні сили, переміщення повинні мати дві неперервні похідні. У випадку інтерполяційної кривої $y = S(x)$, побудованої за допомогою креслярського сплайна, це означає, що $S(x)$, $S'(x)$ та $S''(x)$ повинні бути неперервними для $x_1 \leq x \leq x_n$.

Умова неперервності $S''(x)$ є причиною того, що твірний сплайн створює приємну криву, оскільки вона призводить до неперервної кривизни. Око може сприймати раптові зміни кривини - тобто розриви у $S''(x)$ - але раптові зміни у вищих похідних не помітні. Таким чином, умова неперервності $S''(x)$ є мінімальною передумовою для того, щоб інтерполююча крива сприймалася як єдина гладка криву, а не як серію окремих кривих, склеєних разом.

Щоб визначити математичний вигляд функції $S(x)$, зауважимо, що оскільки $S^{(iv)}(x) \equiv 0$ на проміжках між n заданими точками, то з інтегрування цього рівняння чотири рази випливає, що $S(x)$ рівняння чотири рази, що $S(x)$ має бути *кубічним поліномом* по x у кожному такому інтервалі. У загальному випадку випадку $S(x)$ буде іншим кубі-

чним поліномом у кожному проміжку, тому $S(x)$ повинна мати вигляд мати вигляд

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & x_1 \leq x \leq x_2 \\ S_2(x), & x_2 \leq x \leq x_3 \\ \dots \\ S_{n-1}(x), & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (8.2)$$

де $S_1(x), S_2(x), \dots, S_{n-1}(x)$ – кубічні поліноми. Для зручності будемо записувати їх у вигляді

$$\begin{aligned} S_1(x) &= a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ S_2(x) &= a_2(x - x_2)^3 + b_2(x - x_2)^2 + c_2(x - x_2) + d_2, & x_2 \leq x \leq x_3 \\ &\vdots \\ S_{n-1}(x) &= a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{aligned} \quad (8.3)$$

Коефіцієнти a_i , b_i , c_i та d_i складають разом $4n - 4$ змінних, які ми повинні визначити щоб повністю задати $S(x)$. Якщо ми виберемо ці коефіцієнти так, щоб $S(x)$ інтерполювала n заданих точок на площині, а $S(x)$, $S'(x)$ та $S''(x)$ є неперервними, то отримана інтерполююча крива називається *кубічним сплайном*.

8.2. Виведення формули кубічного сплайна.

З рівнянь 8.2 і 8.3 маємо

$$\begin{aligned} S(x) &= S_1(x) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ S(x) &= S_2(x) = a_2(x - x_2)^3 + b_2(x - x_2)^2 + c_2(x - x_2) + d_2, & x_2 \leq x \leq x_3 \\ &\vdots \\ S(x) &= S_{n-1}(x) = a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + \\ &\quad + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{aligned} \quad (8.4)$$

ТАКИМ ЧИНОМ

$$\begin{aligned}
 S'(x) &= S'_1(x) = 3a_1(x - x_1)^2 + 2b_1(x - x_1) + c_1, & x_1 \leq x \leq x_2 \\
 S'(x) &= S'_2(x) = 3a_2(x - x_2)^3 + 2b_2(x - x_2) + c_2, & x_2 \leq x \leq x_3 \\
 &\vdots \\
 S'(x) &= S'_{n-1}(x) = 3a_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + 2b_{n-1}(x - x_{n-1}) + c_{n-1}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n
 \end{aligned} \tag{8.5}$$

і

$$\begin{aligned}
 S''(x) &= S''_1(x) = 6a_1(x - x_1) + 2b_1, & x_1 \leq x \leq x_2 \\
 S''(x) &= S''_2(x) = 6a_2(x - x_2) + 2b_2, & x_2 \leq x \leq x_3 \\
 &\vdots \\
 S''(x) &= S''_{n-1}(x) = 6a_{n-1}(x - x_{n-1}) + 2b_{n-1}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

Тепер ми використаємо ці рівняння та чотири властивості кубічних сплайнів, які наведено нижче для вираження невідомих коефіцієнтів $a_i, b_i, c_i, d_i, i = 1, 2, \dots, n-1$, через відомі координати $y_1, y_2, \dots, y_n$.

1. $S(x)$ інтерполює точки $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$.

Оскільки $S(x)$ інтерполює точки $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$, маємо

$$S(x_1) = y_1, \quad S(x_2) = y_2, \quad \dots, \quad S(x_n) = y_n \tag{8.7}$$

З перших $n-1$ з цих рівнянь і (8.4) отримаємо

$$\begin{aligned}
 d_1 &= y_1 \\
 d_2 &= y_2 \\
 &\dots \\
 d_{n-1} &= y_{n-1}
 \end{aligned} \tag{8.8}$$

З останнього рівняння в (8.7), останнього рівняння в (8.4) і того факту, що $x_n - x_{n-1} = h$, отримуємо

$$a_{n-1}h^3 + b_{n-1}h^2 + c_{n-1}h + d_{n-1} = y_n \tag{8.9}$$

2. $S(x)$ неперервна на $[x_1, x_n]$.

Оскільки $S(x)$ неперервна для $x_1 \leq x \leq x_n$, то з цього випливає, що у

кожній точці x_i з множини $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ маємо

$$S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i), \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (8.10)$$

Тобто, графіки $S_{i-1}(x)$ та $S_i(x)$ з'єднуються в неперервну криву в точці x_i . Якщо застосувати інтерполяційну властивість $S_i(x_i) = y_i$, то з (8.10) випливає, що

$$S_{i-1}(x_i) = y_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1,$$

або врахувавши (8.4) маємо, що

$$\begin{aligned} a_1 h^3 + b_1 h^2 + c_1 h + d_1 &= y_2 \\ a_2 h^3 + b_2 h^2 + c_2 h + d_2 &= y_3 \\ &\vdots \\ a_{n-2} h^3 + b_{n-2} h^2 + c_{n-2} h + d_{n-2} &= y_{n-1} \end{aligned} \quad (8.11)$$

3. $S'(x)$ неперервна на $[x_1, x_n]$.

Оскільки $S'(x)$ неперервна при $x_1 \leq x \leq x_n$, то з цього випливає, що

$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i), \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (8.12)$$

або, з (8.5),

$$\begin{aligned} 3a_1 h^2 + 2b_1 h + c_1 &= c_2 \\ 3a_2 h^2 + 2b_2 h + c_2 &= c_3 \\ &\vdots \\ 3a_{n-2} h^2 + 2b_{n-2} h + c_{n-2} &= c_{n-1} \end{aligned} \quad (8.13)$$

4. $S''(x)$ неперервна на $[x_1, x_2]$.

Оскільки $S''(x)$ неперервна при $x_1 \leq x \leq x_n$, то з цього випливає, що

$$S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i), \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (8.14)$$

або, з (8.6),

$$\begin{aligned} 6a_1 h + 2b_1 &= 2b_2 \\ 6a_2 h + 2b_2 &= 2b_3 \\ &\vdots \\ 6a_{n-2} h + 2b_{n-2} &= 2b_{n-1} \end{aligned} \quad (8.15)$$

Рівняння (8.8), (8.9), (8.11), (8.13) та (8.15) складають систему $4n-6$

лінійних рівнянь з $4n - 4$ невідомими коефіцієнтами $a_i, b_i, c_i, d_i, i = 1, 2, \dots, n - 1$. Отже, нам потрібно ще два рівняння для однозначного визначення цих коефіцієнтів. Перед тим, як отримати цих додаткових рівнянь, ми можемо спростити нашу існуючу систему, виразивши невідомі a_i, b_i, c_i та d_i через нові невідомі величини

$$M_1 = S''(x_1), \quad M_2 = S''(x_2), \quad \dots, \quad M_n = S''(x_n)$$

та відомих величин

$$y_1, y_2, \dots, y_n \tag{8.6}$$

Наприклад, з (8.6) випливає, що

$$\begin{aligned} M_1 &= 2b_1 \\ M_2 &= 2b_2 \\ &\vdots \\ M_{n-1} &= 2b_{n-1} \end{aligned}$$

тобто

$$b_1 = \frac{1}{2}M_1, \quad b_2 = \frac{1}{2}M_2, \quad \dots, \quad b_{n-1} = \frac{1}{2}M_{n-1}$$

Крім того, з (8.8) ми вже знаємо, що

$$d_1 = y_1, \quad d_2 = y_2, \quad \dots, \quad d_{n-1} = y_{n-1}$$

Ми залишаємо вам як вправу виведення виразів для a_i та c_i в термінах через числа M_i та y_i . Остаточний результат буде наступним:

Теорема 8.1 (Інтерполяція кубічним сплайном). *Дано n точок $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ з $x_{i+1} - x_i = h, i = 1, 2, \dots, n - 1$, кубічний сплайн*

$$S(x) = \begin{cases} a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ a_2(x - x_2)^3 + b_2(x - x_2)^2 + c_2(x - x_2) + d_2, & x_2 \leq x \leq x_3 \\ \dots \\ a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + \\ \quad + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

яка інтерполює ці точки, має коефіцієнти, задані формулами

$$\begin{aligned} a_i &= (M_{i+1} - M_i)/6h \\ b_i &= M_i/2 \\ c_i &= (y_{i+1} - y_i)/h - [(M_{i+1} + 2M_i)h/6] \\ d_i &= y_i \end{aligned} \tag{8.17}$$

для $i = 1, 2, \dots, n-1$, де $M_i = S''(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

З цього результату бачимо, що величини $M_1, M_2, \dots, M_n$ однозначно визначають кубічний сплайн. Щоб знайти ці величини, підставимо вирази для a_i , b_i та c_i з (8.17) у (8.13). Після деяких алгебраїчних спрощень отримаємо

$$\begin{aligned} M_1 + 4M_2 + M_3 &= 6(y_1 - 2y_2 + y_3)/h^2 \\ M_2 + 4M_3 + M_4 &= 6(y_2 - 2y_3 + y_4)/h^2 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{8.18}$$

$$M_{n-2} + 4M_{n-1} + M_n = 6(y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n)/h^2$$

або, у матричній формі,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{pmatrix}$$

Це лінійна система $n-2$ рівнянь для n невідомих $M_1, M_2, \dots, M_n$. Таким чином, для однозначного визначення $M_1, M_2, \dots, M_n$ знадобиться два додаткових рівняння. Причиною цього є те, що існує нескінченна кількість кубічних сплайнів, які інтерполюють задані точки, тому нам просто не вистачить умов, щоб визначити єдиний кубічний сплайн, який

проходить через ці точки. Нижче ми розглянемо три можливі способи задання двох додаткових умов, необхідних для отримання унікального кубічного сплайна, що проходить через задані точки. (У вправах наведено ще два.) Вони зведені у таблицю 1.

Природний сплайн	$M_1 = 0, M_n = 0$
Параболічний крайовий сплайн	$M_1 = M_2, M_n = M_{n-1}$
Кубічний крайовий сплайн	$M_1 = 2M_2 - M_3, M_n = 2M_{n-1} - M_{n-2}$

8.3. Природний сплайн.

Дві найпростіші математичні умови, які ми можемо накласти:

$$M_1 = M_n = 0.$$

Ці умови разом з (8.18) дають лінійну систему $n \times n$ для $M_1, M_2, \dots, M_n$, яку можна записати у матричній формі як

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \vdots \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

Для чисельних розрахунків зручніше виключити з цієї системи M_1 і M_n і записати

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{pmatrix} \quad (8.19)$$

разом з

$$M_1 = 0 \quad (8.20)$$

$$M_n = 0 \quad (8.21)$$

Таким чином, лінійну систему $(n-2) \times (n-2)$ можна розв'язати для $n-2$ коефіцієнтів $M_2, M_3, \dots, M_{n-1}$, а M_1 і M_n визначаються з (8.20) і (8.21).

Фізично, природний сплайн є результатом того, що кінці креслярського сплайна вільно виходять за межі точок інтерполяції без обмежень. Кінцеві частини сплайна за межами точок інтерполяції потраплятимуть на прямі, що призведе до зникнення $S''(x)$ у кінцевих точках x_1 та x_n і виконання математичних умов $M_1 = M_n = 0$.

Натуральний сплайн має тенденцію до згладжування інтерполяційної кривої в кінцевих точках, що може бути небажаним. Звичайно, якщо потрібно, щоб $S''(x)$ зникала в кінцевих точках, то слід використовувати натуральний сплайн

8.4. Параболічний крайовий сплайн.

Для цього типу сплайну накладаються дві додаткові умови:

$$M_1 = M_2, \quad (8.22)$$

$$M_n = M_{n-1}. \quad (8.23)$$

Якщо використати попередні два рівняння для виключення M_1 і M_n з (8.18), то отримаємо лінійну систему $(n-2) \times (n-2)$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{pmatrix} \quad (8.24)$$

для $M_2, M_3, \dots, M_{n-1}$. Після того, як ці $n-2$ значення визначено, M_1 та M_n визначаються з (8.22) та (8.23).

З (8.17) видно, що $M_1 = M_2$ означає, що $a_1 = 0$, а $M_n = M_{n-1}$ озна-

чає, що $a_1 = 0$. Таким чином, з (8.3) випливає, що у формулі для сплайна на кінцевих інтервалах $[x_1, x_2]$ і $[x_{n-1}, x_n]$ немає кубічних членів. Отже, як випливає з назви, параболічний крайовий сплайн зводиться до параболічної кривої на цих кінцевих інтервалах.

8.5. Кубічний крайовий сплайн.

Для цього типу сплайну накладаємо дві додаткові умови:

$$M_1 = 2M_2 - M_3, \quad (8.25)$$

$$M_n = 2M_{n-1} - M_{n-2}. \quad (8.26)$$

Використання цих двох рівнянь для виключення M_1 та M_n з (8.18) призводить до наступної $(n-2) \times (n-2)$ лінійної системи для $M_2, M_3, \dots, M_{n-1}$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{pmatrix}. \quad (8.27)$$

Розв'язавши цю лінійну систему для $M_2, M_3, \dots, M_{n-1}$, ми можемо використати (8.25) та (8.26) для визначення M_1 та M_n .

Якщо ми перепишемо (8.25) у вигляді

$$M_2 - M_1 = M_3 - M_2$$

то з (8.17) випливає, що $a_1 = a_2$. Оскільки $S'''(x) = 6a_1$ на $[x_1, x_2]$ і $S'''(x) = 6a_2$ на $[x_2, x_3]$, бачимо, що $S'''(x)$ є сталою на всьому відрізьку $[x_1, x_3]$. Отже, $S(x)$ складається з однієї кубічної кривої на проміжку $[x_1, x_3]$, а не з двох різних кубічних кривих, з'єднаних разом у точці x_2 . (Щоб переконатися в цьому, проінтегруйте $S'''(x)$ тричі.) Аналогічний аналіз показує, що $S(x)$ складається з однієї кубічної кривої на двох останніх інтервалах.

У той час як натуральний сплайн має тенденцію створювати інтерполяційну криву, яка є плоскою в кінцевих точках, кубічний сплайн має протилежну тенденцію: він створює криву з яскраво вираженою кривизною в кінцевих точках. Якщо жоден з цих варіантів не є бажаним, параболічний сплайн є розумним компромісом.

Приклад 8.1 (Використання параболічного сплайну.). Густина води змінюється залежно від температури та досягає максимального значення при певній температурі. У таблиці 1.42 наведено значення густини води (г/см^3) для п'яти рівномірно розподілених значень температури в інтервалі $[-10^\circ\text{C}, 30^\circ\text{C}]$. Необхідно побудувати параболічний сплайн

Температура ($^\circ\text{C}$)	Густина (г/см^3)
-10	0.99815
0	0.99987
10	0.99973
20	0.99823
30	0.99567

Рис. 1.42: Густина води. Довідник з хімії та фізики (CRC Press, 2009)

для цих даних та визначити максимальне значення густини води в заданому діапазоні, знайшовши точку максимуму побудованої функції.

Розв'язання. Покладемо

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -10, & y_1 &= 0.99815 \\
 x_2 &= 0, & y_2 &= 0.99987 \\
 x_3 &= 10, & y_3 &= 0.99973 \\
 x_4 &= 20, & y_4 &= 0.99823 \\
 x_5 &= 30, & y_5 &= 0.99567
 \end{aligned} \tag{8.28}$$

Тоді відповідно до (8.18) маємо

$$6[y_1 - 2y_2 + y_3]/h^2 = -0.0001116$$

$$6[y_2 - 2y_3 + y_4]/h^2 = -0.0000816$$

$$6[y_3 - 2y_4 + y_5]/h^2 = -0.0000636$$

і лінійна система (8.24) для параболічного сплайну биття набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0001116 \\ -0.0000816 \\ -0.0000636 \end{pmatrix}$$

Розв'язання цієї системи дає

$$\begin{aligned} M_2 &= -0.00001973 \\ M_3 &= -0.00001293 \\ M_4 &= -0.00001013 \end{aligned} \tag{8.29}$$

З (19) і (20) маємо

$$\begin{aligned} M_1 &= M_2 = -0.00001973 \\ M_5 &= M_4 = -0.00001013 \end{aligned} \tag{8.30}$$

Розв'язуючи для a_i , b_i , c_i та d_i у (8.17), отримуємо наступний вираз для інтерполюючого параболічного сплайну биття:

$$S(x) = \begin{cases} -0.00000987(x+10)^2 + .0002707(x+10) + .99815, & - \\ .000000113(x-0)^3 - .00000987(x-0)^2 + .0000733(x-0) + .99987, & 0 \\ .000000047(x-10)^3 - .00000647(x-10)^2 - .0000900(x-10) + .99973, & 1 \\ -.00000507(x-20)^2 - .0002053(x-20) + .99823, & 2 \end{cases}$$

Цей сплайн зображено на рисунку 1.43. З цього рисунка видно, що максимум досягається в інтервалі $[0, 10]$. Щоб знайти цей максимум, прирівняємо $S'(x)$ до нуля на відрізок $[0, 10]$:

$$S'(x) = 0, 000000339 x^2 - 0, 0000197 x + 0, 0000733 = 0.$$

З точністю до трьох значущих цифр корінь цього квадратного рівняння на проміжку $[0, 10]$ дорівнює $x = 3, 99$, і для цього значення x , $S(3, 99) = 1, 00001$. Таким чином, згідно з нашою інтерпольованою оцінкою, максимальна густина води $1, 00001 \text{ г/см}^3$ досягається при $3, 99^\circ \text{C}$. Це добре узгоджується з експериментальним максимальним значенням

густини $1,00000 \text{ г/см}^3$, що досягається при $3,98^\circ\text{C}$. (В оригінальній метричній системі грам визначався як маса одного кубічного сантиметра води при її максимальній густині).

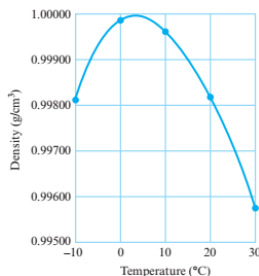


Рис. 1.43

Заключні зауваження. Розглянуті методи розв’язування систем лінійних рівнянь та обчислення визначників мають широке практичне застосування, що яскраво демонструється на прикладі кубічних сплайнів. При побудові кубічного сплайна виникає необхідність розв’язування системи лінійних рівнянь з тридіагональною матрицею для знаходження коефіцієнтів сплайна, що ефективно розв’язується методом прогонки.

Кубічні сплайни та їхні узагальнення займають особливе місце в сучасній обчислювальній математиці завдяки своїм унікальним властивостям. Окрім створення гладких інтерполяційних кривих з неперевершеною точністю, застосування таких систем є ключовим для:

1. Чисельного інтегрування, де сплайни забезпечують високу точність обчислень завдяки їхній гладкості та простоті інтегрування поліноміальних функцій;
2. Чисельного диференціювання, де використання сплайнів допомагає уникнути проблем, пов’язаних з накопиченням похибок, які часто виникають при використанні класичних різницевих схем;
3. Розв’язування диференціальних та інтегральних рівнянь, де сплай-

ни забезпечують ефективний спосіб апроксимації шуканих розв'язків, що дозволяє звести вихідну задачу до системи алгебраїчних рівнянь;

4. Теорії оптимізації, де сплайни використовуються для побудови гладких апроксимацій цільових функцій та обмежень, що значно покращує збіжність чисельних методів.

Отже, глибоке розуміння методів роботи з системами лінійних рівнянь та визначниками є фундаментальним для подальшого вивчення чисельних методів. Цей матеріал демонструє тісний зв'язок між різними розділами обчислювальної математики та підкреслює важливість оволодіння методами розв'язування систем лінійних рівнянь як базового інструментарію сучасного математика.

8.6. Вправи для самостійного розв'язування.

Вправа 1. Знайдіть вирази для a_i та c_i у рівняннях (8.17) теореми 8.1.

Вправа 2. Шість точок

$$(0, 0.00000), \quad (0.2, .19867), \quad (0.4, .38942), \\ (0.6, 0.56464), \quad (0.8, 0.71736), \quad (1.0, 0.84147)$$

лежать на графіку функції $y = \sin x$, де x задано в радіанах.

(а) Знайдіть частину параболічного сплайну, яка інтерполює ці шість точок для $0.4 \leq x \leq 0.6$. Дотримуйтесь точності до п'яти знаків після коми.

(б) Обчисліть $S(0.5)$ для сплайна, знайденого у частині (а). Яка відсоткова похибка $S(0.5)$ по відношенню до «точного» значення $\sin(0.5) = 0.47943$?

Вправа 3. Наступні п'ять точок $(0, 1)$, $(1, 7)$, $(2, 27)$, $(3, 79)$, $(4, 181)$ лежать на одній кубічній кривій.

(а) Який з трьох типів кубічних сплайнів (натуральний, параболічний биття або кубічне биття) буде точно узгоджуватися з єдиною кубічною кривою, на якій лежать п'ять точок?

(b) Визначте кубічний сплайн, який ви вибрали в частині (a), і перевірте, що він є єдиною кубічною кривою, яка інтерполює п'ять точок.

Вправа 4. Повторіть обчислення з прикладу 1, використовуючи натуральний сплайн для інтерполяції п'яти точок даних.

Вправа 5. Повторіть обчислення у прикладі 1, використовуючи кубічний сплайн для інтерполяції п'яти точок даних.

Вправа 6. Розглянемо п'ять точок $(0, 0)$, $(0.5, 1)$, $(1, 0)$, $(1.5, -1)$ і $(2, 0)$ на графіку $y = \sin(\pi x)$.

(a) Використовуйте натуральний сплайн для інтерполяції точок даних $(0, 0)$, $(0.5, 1)$ та $(1, 0)$.

(b) Використовуйте натуральний сплайн для інтерполяції точок даних $(0.5, 1)$, $(1, 0)$ та $(1.5, -1)$.

(c) Поясніть незвичайний характер вашого результату в частині (b).

Вправа 7. (*Періодичний сплайн*). Якщо відомо або бажано, щоб n точок $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, які інтерполюються, лежали на одному циклі періодичної кривої з періодом $x_n - x_1$, то інтерполюючий кубічний сплайн $S(x)$ повинен задовольняти такі умови:

$$S(x_1) = S(x_n)$$

$$S'(x_1) = S'(x_n)$$

$$S''(x_1) = S''(x_n)$$

(a) Покажіть, що ці три умови періодичності вимагають, щоб:

$$y_1 = y_n$$

$$M_1 = M_n$$

$$4M_1 + M_2 + M_{n-1} = 6 \frac{y_{n-1} - 2y_1 + y_2}{h^2}$$

(b) Використовуючи три рівняння з частини (a) та рівняння (8.18), складіть лінійну систему розміром $(n-1) \times (n-1)$ для $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ у матричній формі.

Вправа 8. (*Фіксований сплайн*) Припустимо, що, крім n точок для

інтерполяції, нам задані конкретні значення y'_1 та y'_n для похідних $S'(x_1)$ і $S'(x_n)$ інтерполюючого кубічного сплайну в крайових точках x_1 і x_n .

(а) Покажіть, що:

$$2M_1 + M_2 = 6 \frac{y_2 - y_1 - hy'_1}{h^2}$$
$$2M_n + M_{n-1} = 6 \frac{y_{n-1} - y_n + hy'_n}{h^2}.$$

(b) Використовуючи рівняння з частини (а) та рівняння (15), складіть лінійну систему розміром $n \times n$ для $M_1, M_2, \dots, M_n$ у матричній формі.

Примітка: фіксований сплайн, описаний у цій вправі, є найточнішим типом сплайну для інтерполяційних задач, якщо похідні в крайових точках відомі або можуть бути оцінені.

9. Застосування лінійної алгебри в комп'ютерній графіці: геометричні перетворення на площині

9.1. Комп'ютерна графіка: сучасний погляд

Сучасний світ важко уявити без комп'ютерної графіки. Від віртуальних світів відеоігор до рекламних банерів на вулицях, вона оточує нас всюди. Комп'ютерна графіка активно використовує досягнення математики, зокрема лінійної алгебри, для створення вражаючих візуальних ефектів та реалістичних зображень.

- **Візуалізація даних:** Візуалізація є ключовим елементом комп'ютерної графіки, адже саме вона є її кінцевим продуктом. Лінійна алгебра допомагає перетворити дані в зрозумілі та наочні образи.
- **Моделювання об'єктів:** Створення моделей реальних або віртуальних об'єктів є важливим завданням комп'ютерної графіки. Лінійна алгебра надає потужний математичний апарат для опису та перетворення геометричних об'єктів, що є основою для 3D-моделювання.

- **Автоматизація процесів:** Автоматизація процесів створення графіки дозволяє значно скоротити час та ресурси, необхідні для створення складних проектів. Лінійна алгебра відіграє важливу роль у розробці алгоритмів автоматизованої обробки зображень та генерації графіки.

9.2. Роль лінійної алгебри в комп'ютерній графіці

Лінійна алгебра є фундаментом для багатьох методів та алгоритмів, що використовуються в комп'ютерній графіці. Її значення важко переоцінити, адже вона надає потужний математичний апарат для опису геометричних об'єктів та перетворень, які є критично важливими для комп'ютерної графіки.

- **Матриці та вектори як математичний апарат для опису геометричних об'єктів та перетворень:** Матриці та вектори є основними будівельними блоками лінійної алгебри. Вони використовуються для представлення точок, векторів, ліній, площин та інших геометричних об'єктів. За допомогою матриць можна описувати різноманітні геометричні перетворення.
- **Лінійні перетворення та їх застосування в графіці:** Лінійні перетворення є важливим інструментом для маніпуляції геометричними об'єктами. Вони використовуються для моделювання руху об'єктів, зміни їх форми та розміру, а також для побудови складних зображень та віртуальних світів.

9.3. Сучасні застосування лінійної алгебри в комп'ютерній графіці

Сучасні технології активно використовують досягнення лінійної алгебри для розвитку комп'ютерної графіки.

- **Відеоігри:** є основою для створення тривимірної графіки у відеоіграх. Вона використовується для моделювання руху об'єктів,

обробки освітлення та тіней, а також для створення реалістичних фізичних симуляцій.

- **Кіно та спецефекти:** використовується для створення комп'ютерних спецефектів у кіно. Вона дозволяє створювати реалістичні віртуальні світи, моделювати рух персонажів та обробляти зображення.
- **Віртуальна реальність та доповнена реальність:** є ключовим елементом для створення віртуальної та доповненої реальності. Вона використовується для відстеження руху користувача, рендерингу тривимірних об'єктів та створення інтерактивних середовищ.
- **Дизайн та реклама:** використовується для створення рекламних роликів, візуалізації продуктів та розробки дизайну інтерфейсів. Вона дозволяє створювати естетично привабливі та функціональні рішення.
- **3D-друк:** використовується для моделювання тривимірних об'єктів, які потім можуть бути надруковані на 3D-принтері. Це відкриває нові можливості для прототипування, дизайну та виробництва.

Цей розділ надасть вам необхідні знання та навички для розуміння та застосування в сучасному світі, де комп'ютерні технології відіграють ключову роль.

10. Геометричні перетворення.

Перш ніж перейти до геометричних перетворень, важливо зазначити, що такі фундаментальні поняття лінійної алгебри, як вектори та матриці, вже розглядалися в попередніх курсах.

Нагадаємо, що **вектори** використовуються для представлення напрямку та величини, а **матриці** є зручним способом для запису та здійснення лінійних перетворень.

В контексті комп'ютерної графіки, **матриці** відіграють ключову роль, оскільки дозволяють компактно описувати різноманітні геометричні операції, зокрема ті, що будуть розглянуті далі.

Розглянемо відображення літери "А" на екрані. В реальності, літера "А" може бути зображена за допомогою координат 11 кутів та зафарбовуванням внутрішньої області (як показано на рисунку 1).

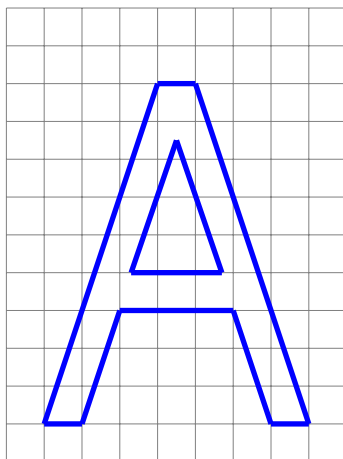


Рис. 1.44

Для спрощення, знехтуємо товщиною літери та використаємо лише п'ять координат, як показано на рис. 1.45. Цю спрощену літеру можна представити у вигляді матриці даних:

$$\begin{array}{l} \text{Вершини:} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\ D = \quad \quad \quad \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$$

де стовпці відповідають координатам вершин у певному порядку.

10.1. Геометричні перетворення на площині

У цьому розділі ми детально розглянемо основні геометричні перетворення на площині, такі як масштабування, симетричне відображе-

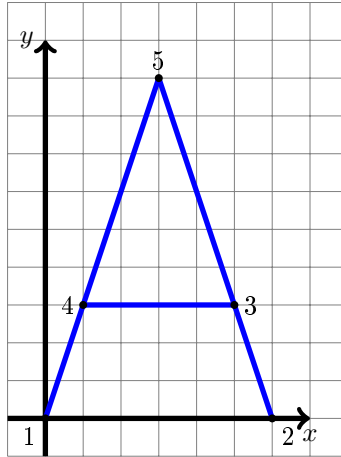


Рис. 1.45

ння, поворот та додавання матриці (паралельне перенесення). Для кожного перетворення буде наведено відповідну матрицю та приклади застосування.

- **Масштабування:**

- Рівномірне та нерівномірне масштабування.
- Матриця масштабування: $S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$
- s_x - коефіцієнт масштабування по осі X.
- s_y - коефіцієнт масштабування по осі Y.

- **Симетричне відображення:**

- Відображення відносно осі X та осі Y.
- Матриця відображення:

* Відносно осі X: $R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

* Відносно осі Y: $R_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

• **Поворот:**

- Поворот на заданий кут θ .
- Матриця повороту: $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

Приклад 10.1 (Обертання об'єкта). Обернути літеру A навколо початку координат на $\frac{\pi}{6}$ (або 30°).

Розв'язання. Випишемо матрицю обертання $R_{\frac{\pi}{6}}$. Маємо що

$$R_{\frac{\pi}{6}} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.866 & -0.5 \\ 0.5 & 0.866 \end{pmatrix}.$$

Помножимо матрицю вершин D на матрицю $R_{\frac{\pi}{6}}$ отримаємо, що

$$R_{\frac{\pi}{6}}D = \begin{pmatrix} 0.866 & -0.5 \\ 0.5 & 0.866 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5.196 & 2.83 & -0.634 & -1.902 \\ 0 & 3 & 5.098 & 3.098 & 9.294 \end{pmatrix}$$

і повернути літеру A зображено на рисунку 1.46.

• **Паралельне перенесення.**

- Переміщення об'єкта на заданий вектор $w = (t_x, t_y)$.
- Матриця перенесення: $T_w = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$

10.2. Однорідні координати

Однорідні координати - це система координат, яка дозволяє уніфікувати математичний запис для різних видів геометричних перетворень, включаючи паралельне перенесення. В однорідних координатах кожна

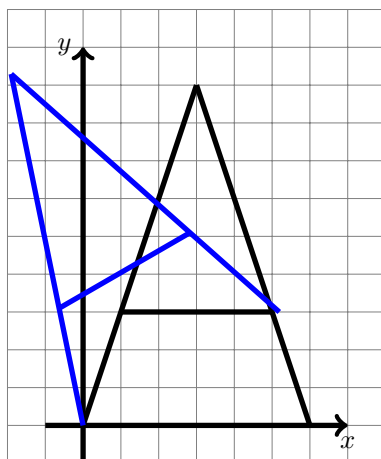


Рис. 1.46

точка на площині (x, y) представляється як точка в тривимірному просторі (x, y, w) , де w - деяке число, відмінне від нуля. Зазвичай w приймають рівним 1. Використання однорідних координат значно спрощує роботу з геометричними перетвореннями, особливо при їх композиції.

- **Переваги використання однорідних координат:**

- Уніфікація математичного запису для різних видів перетворень.
- Можливість представити паралельне перенесення матричним множенням.

- **Перетворення точок та векторів в однорідні координати:**

- Точка: $(x, y) \rightarrow (x, y, 1)$
- Вектор: $(x, y) \rightarrow (x, y, 0)$

- **Матриці перетворень в однорідних координатах:**

- Масштабування: $S = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Відображення: $R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Поворот: $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Перенесення: $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10.3. Композиція геометричних перетворень

Композиція геометричних перетворень - це послідовне застосування кількох геометричних перетворень до об'єкта. Результат композиції залежить від порядку застосування перетворень. Матриця композиції перетворень обчислюється як добуток матриць окремих перетворень.

- **Поняття композиції перетворень:**

- Послідовне застосування кількох геометричних перетворень.
- Матриця композиції перетворень: $T = T_n \cdot T_{n-1} \cdot \dots \cdot T_1$

- **Порядок застосування перетворень та його значення:**

- Важливість правильного порядку для отримання бажаного результату.

Приклад 10.2 (Обертання об'єкта навколо довільної точки на площині). Обернути літеру A (див. рис. 1.45) на кут $\frac{\pi}{6}$ навколо точки $S(4, 5)$.

Розв’язання. Використання однорідних координат для вершин літери A призводить до матриці даних:

$$K_d = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо ми позначимо $w = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, ідея полягає у використанні композиції перетворень: спочатку перемістити літеру A на вектор $-w$ так, щоб точка w перемістилася в початок координат, потім обернути цю переміщену літеру, і потім перемістити її на вектор w назад до її початкового положення. Арифметичні операції з матрицями виглядають наступним чином (пам’ятайте порядок композицій!):

$$\begin{aligned} T \cdot K_d &= T_w \cdot R_{\frac{\pi}{6}} \cdot T_{-w} \cdot K_d = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &\quad \begin{pmatrix} 3.036 & 8.232 & 5.866 & 2.402 & 1.134 \\ -1.33 & 1.67 & 3.768 & 1.768 & 7.964 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Це зображено на рисунку 1.47.

11. Застосування лінійної алгебри в комп’ютерній графіці: геометричні перетворення в просторі.

Деякі з найновіших і найцікавіших досліджень у галузі комп’ютерної графіки пов’язані з молекулярним моделюванням. Завдяки тривимірній (3D) графіці біолог може досліджувати змодельовану молекулу білка та шукати активні ділянки, які можуть приймати молекулу лікарського засобу. Біолог може обертати й переміщати експериментальний препарат і намагатися прикріпити його до білка. Ця здатність візуалізувати потен-

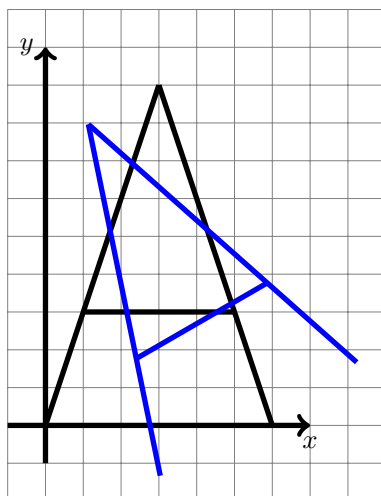


Рис. 1.47

ційні хімічні реакції є надзвичайно важливою для сучасних досліджень у галузі розробки лікарських засобів і досліджень раку. Насправді прогрес у розробці лікарських препаратів певною мірою залежить від розвитку комп'ютерної графіки, здатної створювати реалістичні симуляції молекул та їхніх взаємодій.

Сучасні дослідження у сфері молекулярного моделювання зосереджені на віртуальній реальності, середовищі, в якому дослідник може бачити й відчувати, як молекула препарату взаємодіє з білком.

Інший підхід до віртуальної реальності включає шолом і рукавичку, які визначають рухи голови, руки та пальців. Шолом містить два мініатюрні комп'ютерні екрани — по одному для кожного ока. Зробити це віртуальне середовище більш реалістичним є складним завданням для інженерів, учених і математиків. Математика, яку ми розглядаємо тут, лише відкриває двері до цієї захопливої галузі досліджень.

У цьому розділі ми розглянемо приклади матричних перетворень $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, які корисні при розробці двовимірних зображень.

Зауважимо, що кольорове зображення вимагає надсилання трьох зображень, по одному на кожну червону, зелену та синю люмінофорних точок на екрані, з різною інтенсивністю.

Припустимо, що ми хочемо візуалізувати тривимірний об'єкт, виводячи різні його види на відеоекрані. Об'єкт, який ми хочемо відобразити, буде визначатися скінченною скінченною кількістю відрізків прямої лінії. Як приклад, розглянемо усічену правильну піраміду з шестикутною основою, зображену на рисунку 1.48.

Спочатку введемо систему координат $x y z$, у яку ми вбудуємо об'єкт. Як і на рисунку 1.48, зорієнтуємо систему координат так, щоб її початок знаходився у центрі відеоекрану, а площина $x y$ збігалася з площиною екрана. Отже, спостерігач бачитиме лише проекцію вигляд тривимірного об'єкта на двовимірну площину $x y$

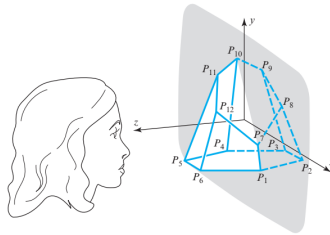


Рис. 1.48

У системі координат $x y z$ кінцеві точки $P_1, P_2, \dots, P_n$ відрізків прямої, що визначають вид на об'єкт, будуть мати певні координати. , P_n відрізків прямої, які визначають вигляд об'єкта, матимуть певні координати - скажімо

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$$

Ці координати, разом із вказівкою, які пари потрібно з'єднати прямими відрізками відрізками прямих, повинні зберігатися у пам'яті системи відображення відеосигналу. Наприклад наприклад, припустимо, що 12

вершин усіченої піраміди на рисунку 1.48 мають такі координати (екран має ширину 4 одиниці та висоту 3 одиниці):

$$\begin{aligned} P_1 &: (1.000, -.800, .000), & P_2 &: (.500, -.800, -.866), \\ P_3 &: (-.500, -.800, -.866), & P_4 &: (-1.000, -.800, .000), \\ P_5 &: (-.500, -.800, .866), & P_6 &: (.500, -.800, .866), \\ P_7 &: (.840, -.400, .000), & P_8 &: (.315, .125, -.546), \\ P_9 &: (-.210, .650, -.364), & P_{10} &: (-.360, .800, .000), \\ P_{11} &: (-.210, .650, .364), & P_{12} &: (.315, .125, .546) \end{aligned}$$

Ці 12 вершин попарно з'єднані 18 відрізками наступним чином, де $P_i \leftrightarrow P_j$ означає, що точка P_i з'єднана з точкою P_j :

$$\begin{aligned} P_1 &\leftrightarrow P_2, P_2 \leftrightarrow P_3, P_3 \leftrightarrow P_4, P_4 \leftrightarrow P_5, P_5 \leftrightarrow P_6, P_6 \leftrightarrow P_1, \\ P_7 &\leftrightarrow P_8, P_8 \leftrightarrow P_9, P_9 \leftrightarrow P_{10}, P_{10} \leftrightarrow P_{11}, P_{11} \leftrightarrow P_{12}, P_{12} \leftrightarrow P_7, \\ P_1 &\leftrightarrow P_7, P_2 \leftrightarrow P_8, P_3 \leftrightarrow P_9, P_4 \leftrightarrow P_{10}, P_5 \leftrightarrow P_{11}, P_6 \leftrightarrow P_{12} \end{aligned}$$

У рис. ?? ці 18 прямих відрізків показані так, як вони з'являться на відеоекран.

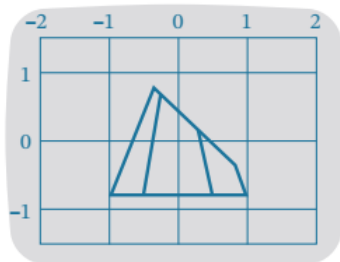


Рис. 1.49

Слід зауважити, що лише x - та y -координати вершин потрібні системі відображення відеосигналу для побудови зображення, оскільки відображається лише проекція об'єкта на площину xy . Однак, ми повинні відслідковувати координати z для того, щоб для виконання певних перетворень, про які йтиметься далі. Зараз ми покажемо, як формувати

нові вигляди об'єкта шляхом масштабування, перекладу або обертання початкового вигляду.

Спочатку ми побудуємо матрицю P розміром $3 \times n$, яку називаємо матрицею координат вигляду, стовпці якої є координатами n точок вигляду:

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{pmatrix}.$$

Наприклад, матриця координат P , що відповідає рис. 1.49, є матриця розміром 3×12

$$\begin{pmatrix} 1.000 & .500 & -.500 & -1.000 & -.500 & .500 & .840 & .315 & -.210 & -.360 \\ -.210 & .315 & & & & & & & & \\ -.800 & -.800 & -.800 & -.800 & -.800 & -.800 & -.400 & .125 & .650 & .800 \\ .650 & .125 & & & & & & & & \\ .000 & -.866 & -.866 & .000 & .866 & .866 & .000 & -.546 & -.364 & .000 \\ .364 & .546 & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

Нижче ми покажемо, як перетворити матрицю координат P виду до нової матрицю координат P' , що відповідає новому вигляду об'єкта. Відрізки прямих, що з'єднують різні точки, переміщуються разом з точками під час перетворення. Таким чином кожен вид однозначно визначається його координатною матрицею, як тільки ми вкажемо, які пари точок на початковому вигляді мають бути з'єднані прямими лініями.

11.1. Масштабування

Перший тип перетворення, який ми розглядаємо, полягає у масштабуванні зображення за напрямками x , y та z на коефіцієнти α , β та γ відповідно. Під цим ми розуміємо, що якщо точка P_i має координати (x_i, y_i, z_i) у початковому вигляді, то вона переміщується в нову точку P'_i з координатами $(\alpha x_i, \beta y_i, \gamma z_i)$ у новому вигляді. Це призводить до перетворення одиничного куба у початкового вигляду на прямокутний паралелепіпед з розмірами $\alpha \times \beta \times \gamma$ (рис. 1.50).

Математично це можна зробити за допомогою матричного множення

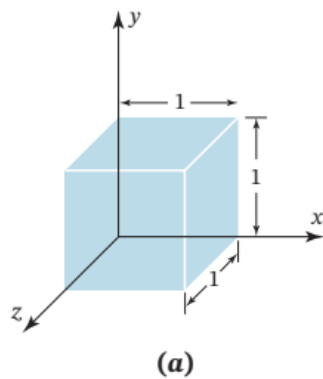


Рис. 1.50

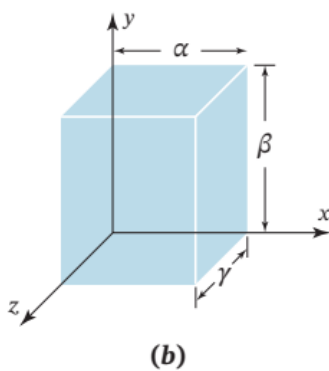


Рис. 1.51

наступним чином. Визначимо діагональна матриця 3×3

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Тоді, якщо точка P_i у вихідному вигляді представлена вектором-стовпчиком

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad (11.1)$$

то перетворена точка P'_i зображується вектором-стовпчиком

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}.$$

Використовуючи матрицю координат P , яка містить координати всіх n точок вихідного вигляду у вигляді стовпців, ми можемо перетворити ці n точок одночасно, щоб отримати матрицю координат P' масштабованого вигляду, як показано нижче:

$$SP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 & \alpha x_2 & \dots & \alpha x_n \\ \beta y_1 & \beta y_2 & \dots & \beta y_n \\ \gamma z_1 & \gamma z_2 & \dots & \gamma z_n \end{pmatrix} = P'$$

Нова матриця координат може бути введена у систему відображення відеосигналу для отримання новий вигляд об'єкта. Як приклад, рис. 1.52 – це рис. 1.49, масштабований за допомогою налаштування $\alpha = 1.8$, $\beta = 0.5$ і $\gamma = 3.0$. Зауважте, що масштабування $\gamma = 3.0$ вздовж осі z не видно на рис. 1.52, оскільки ми бачимо лише проекцію об'єкта на площину xy .

11.2. Переміщення

Далі ми розглянемо перетворення переведення або переміщення об'єкта у нову позицію на екрані. Посилаючись на рисунок 1.53, припустимо, що ми хочемо змінити існуючий вигляд так, щоб кожна точка P_i з ко-

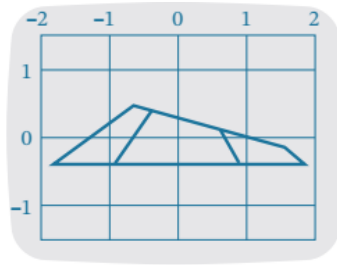


Рис. 1.52: Рис. 1.49 з масштабуванням $\alpha = 1.8$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 3.0$

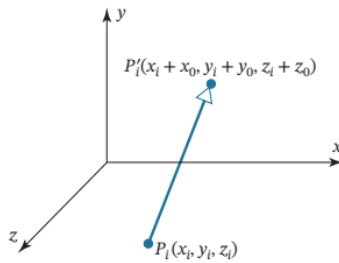


Рис. 1.53

ординатами (x_i, y_i, z_i) перемістилася у нову точку P'_i з координатами $(x_i + x_0, y_i + y_0, z_i + z_0)$. Вектор

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

називається вектором переносу перетворення. Визначивши матрицю T розміром $3 \times n$ як

$$T = \begin{pmatrix} x_0 & x_0 & \dots & x_0 \\ y_0 & y_0 & \dots & y_0 \\ z_0 & z_0 & \dots & z_0 \end{pmatrix}$$

ми можемо перевести всі n точок зору, що визначаються матрицею координат P , за допомогою матриці додаванням через рівняння

$$P' = P + T.$$

Матриця координат P' визначає нові координати n точок. Наприклад, якщо ми хочемо перевести 1.49 відповідно до вектора переміщення

$$\begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.4 \\ 1.7 \end{pmatrix} \quad (11.2)$$

отримаємо рис. 1.54. Зверніть увагу, що переміщення $z_0 = 1.7$ вздовж

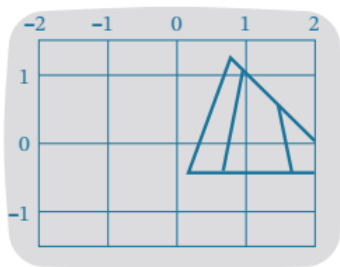


Рис. 1.54

осі z не відображається явно на рис. 1.54.

У праві 7 пояснюється техніка виконання перетворень за допомогою множення матриць, а не додаванням матриць.

11.3. Обертання

Більш складним типом трансформації є обертання вигляду навколо однієї з трьох осей координат. Почнемо з повороту навколо осі z (вісь, перпендикулярна до екрану) на кут θ . Маючи точку P_i в початковому вигляді з координатами (x_i, y_i, z_i) , ми хочемо обчислити нові координати (x'_i, y'_i, z'_i) повернутої точки P'_i . Звертаючись до Рисунок 1.55 і використовуючи трохи тригонометрії, ви зможете обчислити наступне:

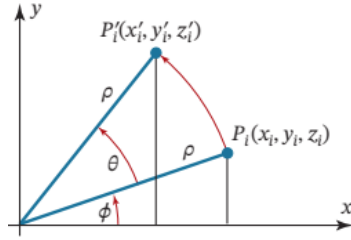


Рис. 1.55

$$\begin{aligned}x'_i &= \rho \cos(\phi + \theta) = \rho \cos \phi \cos \theta - \rho \sin \phi \sin \theta = x_i \cos \theta - y_i \sin \theta; \\y'_i &= \rho \sin(\phi + \theta) = \rho \cos \phi \sin \theta + \rho \sin \phi \cos \theta = x_i \sin \theta + y_i \cos \theta; \\z'_i &= z_i.\end{aligned}$$

Ці рівняння можна записати у матричному вигляді як

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}.$$

Якщо позначити R матрицю 3×3 у цьому рівнянні, то всі n точок можна обернути на матрицю добутку

$$P' = RP$$

щоб отримати матрицю координат P' оберненого вигляду піраміди відповідають поворотам рис.1.49 навколо осей x -, y - та z відповідно, кожен на кут 90° . Обертання навколо трьох координатних осей можна комбінувати, щоб отримати косі види об'єкта. Наприклад, рис. 1.56 - це рис. ??, повернутий спочатку навколо осі x на 30° , а потім навколо осі на -70° , і, нарешті, навколо осі z на -27° . Математично, ці три послідовних повороти можна описати одним рівнянням перетворення $P' = R P$,

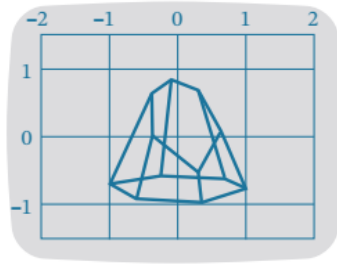


Рис. 1.56: Косий вигляд усіченої піраміди

де R - добуток трьох окремих матриць обертання:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) \\ 0 & \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} \cos(-70^\circ) & 0 & \sin(-70^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-70^\circ) & 0 & \cos(-70^\circ) \end{pmatrix}$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} \cos(-27^\circ) & -\sin(-27^\circ) & 0 \\ \sin(-27^\circ) & \cos(-27^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

у порядку

$$R = R_3 R_2 R_1 = \begin{pmatrix} 0,305 & -0,025 & -0,952 \\ -0,155 & 0,985 & -0,076 \\ 0,940 & 0,171 & 0,296 \end{pmatrix}.$$

Наостанок, на 1.57 ми бачимо два окремі види усіченої піраміди, які складають стереоскопічну пару. Їх було отримано, якщо спочатку повернути зображення 1.56 навколо на кут -3° і перевівши його вправо, а потім повернувши на той самий кут 1.56 навколо осі у на кут $+3^\circ$ і переміщення його вліво. Відстані трансляції були обрані таким чином, щоб стереоскопічні зображення знаходилися на відстані приблизно 6,35

см. одне від одного - це приблизна відстань між парою очей.

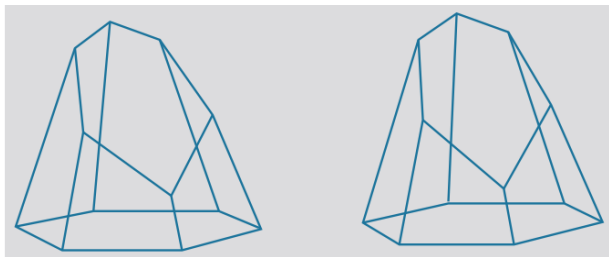


Рис. 1.57: Стереоскопічна фігура усіченої піраміди. Тривимірність можна побачити, тримаючи зображення на відстані приблизно 30,5 см від себе і сфокусувавши погляд на віддаленому об'єкті. Потім, перевівши погляд на рисунок без перефокусування, ви можете зробити два зображення стереоскопічної пари зливаються разом і створюють бажаний ефект.

11.4. Перспективне проектування

Представлення тривимірного об'єкта на двовимірному екрані комп'ютера здійснюється шляхом проектування об'єкта на площину перегляду. (Ми ігноруємо інші важливі кроки, такі як вибір частини площини перегляду для відображення на екрані). Для спрощення, нехай площина xy представляє екран комп'ютера, і уявимо, що око глядача знаходиться вздовж додатної осі z , в точці $(0, 0, d)$. Перспективна проекція відображає кожную точку (x, y, z) на точку зображення $(x^*, y^*, 0)$ таким чином, що дві точки та положення ока, яке називається центром проектування, знаходяться на одній прямій (див. рисунок 1.58(a)).

Ключовим моментом для знаходження (x^*, y^*) є використання подібності трикутників. Уявімо пряму, що йде від тривимірної точки (x, y, z) до ока $(0, 0, d)$. Ця пряма перетинає площину xy в точці $(x^*, y^*, 0)$. Ми можемо встановити пропорції на основі подібності утворених трикутни-

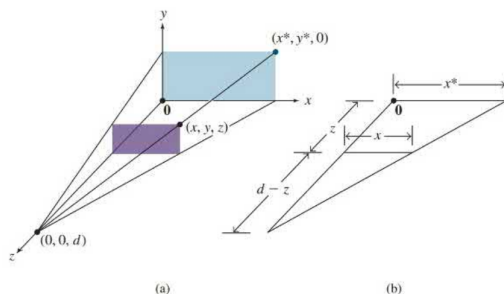


Рис. 1.58: Перспективне проектування

ків (див. рисунок 1.58(б)):

$$\begin{aligned} x^* : \frac{x^*}{d} &= \frac{x}{d-z} \Rightarrow x^* = \frac{dx}{d-z} \\ y^* : \frac{y^*}{d} &= \frac{y}{d-z} \Rightarrow y^* = \frac{dy}{d-z} \end{aligned} \quad (11.3)$$

$$z^* : z^* = 0 \quad (\text{оскільки проекція на площину } xy).$$

Зробимо декілька пояснень.

Перспективне скорочення: Зауважимо, що зі збільшенням z (точка знаходиться далі), знаменники $(d - z)$ збільшуються, і, отже, x^* та y^* зменшуються. Це і є ефект перспективного скорочення – об’єкти, що знаходяться далі, здаються меншими.

Ділення на нуль: Якщо $z = d$, рівняння стають невизначеними (ділення на нуль). Це має геометричний сенс: точка, що лежить *на* площині проектування, вже є своєю власною проекцією. На практиці, цей випадок потрібно обробляти окремо (можливо, шляхом відсікання).

Перспектива vs. ортографічне проектування: Перспективне проектування відрізняється від ортографічного проектування, де паралельні прямі залишаються паралельними після проектування. Перспективне проектування змушує паралельні прямі сходитися в точку зникнення, створюючи більш реалістичне відчуття глибини.

Використовуючи однорідні координати, ми можемо представити пер-

спективну проекцію матрицею, скажімо, P . Ми хочемо, щоб $(x, y, z, 1)$ відображалося в $\left(\frac{x}{1-\frac{z}{d}}, \frac{y}{1-\frac{z}{d}}, 0, 1\right)$. Масштабуючи ці координати на $1 - \frac{z}{d}$, ми також можемо використовувати $\left(x, y, 0, 1 - \frac{z}{d}\right)$ як однорідні координати для зображення. Тепер легко відобразити P . Фактично,

Приклад 11.1. Нехай S - паралелепіпед з вершинами $(3, 1, 5)$, $(5, 1, 5)$, $(5, 0, 5)$, $(3, 0, 5)$, $(3, 1, 4)$, $(5, 1, 4)$, $(5, 0, 4)$ і $(3, 0, 4)$. Знайдіть зображення S за допомогою перспективної проекції з центром проектування в точці $(0, 0, 10)$.

Розв'язання. Нехай P - матриця проекції, а D - матриця даних для S , використовуючи однорідні координати. Матриця даних для зображення S дорівнює

$$PD_{\text{од}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Щоб отримати xy -координати, використайте рівняння (11.4) та поділіть три верхні записи в кожному стовпці на відповідне значення у четвертому рядку:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{3}{0.5} & \frac{5}{0.5} & \frac{5}{0.5} & \frac{3}{0.5} & \frac{3}{0.6} & \frac{5}{0.6} & \frac{5}{0.6} & \frac{3}{0.6} \\ \frac{1}{0.5} & \frac{1}{0.5} & \frac{0}{0.5} & \frac{0}{0.5} & \frac{1}{0.6} & \frac{1}{0.6} & \frac{0}{0.6} & \frac{0}{0.6} \\ \frac{0}{0.5} & \frac{0}{0.5} & \frac{0}{0.5} & \frac{0}{0.5} & \frac{0}{0.6} & \frac{0}{0.6} & \frac{0}{0.6} & \frac{0}{0.6} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 & 10 & 6 & 5 & 8.333 & 8.333 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1.667 & 1.667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

На рис. 1.59 зображено проекцію S паралелепіпеда.



Рис. 1.59

Ми розглянули лише початкові відомості про комп'ютерну графіку. Відзначимо що неперервне переміщення графічних 3D-об'єктів вимагає інтенсивних обчислень з матрицями 4×4 , особливо коли поверхні відтворюються з реалістичною текстурою та відповідним освітленням. Високопродуктивні графічні плати мають вбудовані операції з матрицями 4×4 та графічні алгоритми у своїх мікросхемах і схемотехніці. Такі плати здатні виконувати мільярди множень матриць за секунду, необхідних для реалістичної кольорової анімації в 3D-ігрових програмах.

11.5. Задачі для самостійного розв'язування.

Задача 1. Яка матриця 3×3 матиме такий самий ефект на однорідні координати для $\mathbb{R}^2$, як матриця зсуву A у Прикладі 2?

Задача 2. Використовуючи множення матриць, знайдіть образ трикутника з матрицею даних

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

під дією перетворення, що відображає точки відносно осі y . Накресліть як початковий трикутник, так і його образ.

У задачах 3–8 знайдіть матриці 3×3 , що реалізують задані композиції двовимірних перетворень, використовуючи однорідні координати.

Задача 3. Виконати перенесення на $(3, 1)$, а потім повернути на 45° відносно початку координат.

Задача 4. Виконати перенесення на $(2, 3)$, а потім масштабувати координату x у 0.8 разів, а координату y — у 1.2 рази.

Задача 5. Відобразить точки відносно осі x , а потім оберніть їх на кут 30° відносно початку координат.

Задача 6. Оберніть точки на кут 30° , а потім відобразить їх відносно осі x .

Задача 7. Оберніть точки на кут 60° відносно точки $(6, 8)$.

Задача 8. Оберніть точки на кут 45° відносно точки $(3, 7)$.

Задача 9. Дано матрицю даних D розміром 2×200 , що містить координати 200 точок. Обчисліть кількість множень, необхідних для перетворення цих точок за допомогою двох довільних матриць 2×2 — A та B . Розгляньте два варіанти: $A(BD)$ та $(AB)D$. Обговоріть наслідки отриманих результатів для обчислень у комп'ютерній графіці.

Задача 10. Розгляньте такі геометричні двовимірні перетворення: - D — дилатація (масштабування, у якому координати x та y змінюються з одним і тим самим коефіцієнтом), - R — обертання, - T — перенесення.

Чи комутує D з R ? Тобто, чи виконується рівність $D(R(x)) = R(D(x))$ для всіх $x \in \mathbb{R}^2$? Чи комутує D з T ? Чи комутує R з T ?

Задача 11. Обертання на екрані комп'ютера іноді реалізують як добуток двох перетворень зсуву та масштабування, що може прискорити обчислення, необхідні для визначення того, як графічне зображення виглядатиме в пікселях екрана. (Екран складається з рядків і стовпців малих точок, що називаються пікселями.)

Перше перетворення A_1 виконує вертикальний зсув, а потім стискає кожен стовпець пікселів; друге перетворення A_2 виконує горизонтальний зсув, а потім розтягує кожен рядок пікселів.

Нехай

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \sec \varphi & \tan \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Покажіть, що композиція цих двох перетворень є обертанням у $\mathbb{R}^2$.

Задача 12. Обертання в $\mathbb{R}^2$ зазвичай вимагає чотирьох множень. Обчисліть добуток нижче та покажіть, що матрицю обертання можна розкласти на три перетворення зсуву (кожне з яких потребує лише одного множення):

$$\begin{bmatrix} 1 & \tan(\varphi/2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \tan(\varphi/2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Задача 13. Стандартні перетворення в однорідних координатах для двовимірної комп'ютерної графіки використовують матриці розміру 3×3 такого вигляду:

$$\begin{bmatrix} A & p \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

де A — матриця 2×2 , а $p \in \mathbb{R}^2$. Покажіть, що таке перетворення є композицією лінійного перетворення в $\mathbb{R}^2$ та перенесення. [Підказка: знайдіть відповідний розклад матриці, використовуючи розбиття на блоки.]

Задача 14. Покажіть, що перетворення у Вправі 7 є еквівалентним обертанням відносно початку координат, після якого виконується перенесення на p . Знайдіть p .

Задача 15. Який вектор у $\mathbb{R}^3$ має однорідні координати

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 24\right)?$$

Задача 16. Чи є вектори $(1, 2, 3, 4)$ та $(10, 20, 30, 40)$ однорідними координатами для однієї й тієї ж точки в $\mathbb{R}^3$? Чому або чому ні?

Задача 17. Запишіть матрицю 4×4 , що обертає точки у $\mathbb{R}^3$ навколо осі x на кут 60° . (Див. рисунок.)

Задача 18. Запишіть матрицю 4×4 , що обертає точки у $\mathbb{R}^3$ навколо осі z на кут 30° , а потім виконує перенесення на $p = (5, 2, 1)$.

Задача 19. Нехай S — трикутник із вершинами $(4.2, 1.2, 4)$, $(6, 4, 2)$, $(2, 2, 6)$. Знайдіть образ S під дією перспективної проєкції з центром проєкції у точці $(0, 0, 10)$.

Задача 20. Нехай S — трикутник із вершинами $(9, 3, 5)$, $(12, 8, 2)$, $(1.8, 2.7, 1)$. Знайдіть образ S під дією перспективної проєкції з центром проєкції у точці $(0, 0, 10)$.

Вправи 21 і 22 стосуються способу, у який колір кодується для відображення в комп'ютерній графіці. Колір на екрані комп'ютера задається трьома числами (R, G, B) , які визначають рівень енергії, що електронна гармата передає відповідним фосфорним точкам червоного, зеленого та синього кольорів. (Четверте число може визначати яскравість або інтенсивність кольору.)

Задача 21. Реальний колір, який бачить глядач на екрані, залежить від специфічного типу та кількості фосфорів. Тому кожен виробник екранів повинен конвертувати дані (R, G, B) у міжнародний стандарт кольорів CIE, що використовує три основні кольори, позначені як X, Y, Z . Типове перетворення для фосфорів із коротким післясвіченням має вигляд:

$$\begin{bmatrix} 0.61 & 0.29 & 0.15 \\ 0.35 & 0.59 & 0.063 \\ 0.04 & 0.12 & 0.787 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Напишіть рівняння, що конвертує стандартні CIE-дані (X, Y, Z) у (R, G, B) , необхідні для електронної гармати екрана.

Задача 22. Сигнал, який передає комерційне телебачення, описує кожен колір за допомогою вектора (Y, I, Q) . Якщо екран є чорно-білим, використовується лише координата Y (це забезпечує кращу монохромну картинку, ніж безпосереднє використання CIE-даних для кольорів). Відповідність між YIQ та стандартним RGB-кольором задається рівнянням:

$$\begin{bmatrix} Y \\ I \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.596 & -0.275 & -0.321 \\ 0.212 & -0.528 & 0.311 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}$$

(Виробник екранів може змінити елементи цієї матриці, щоб вона відповідала його RGB-панелям.) Знайдіть рівняння, що конвертує дані (Y, I, Q) , які передає телевізійна станція, у дані (R, G, B) , необхідні для телевізійного екрана.

Література

- [1] Рокіцький І.О. *Застосування лінійної алгебри*. – Вінниця: Вид. Гла-вацька Р.В., 2012. – 240 с.
- [2] Nicholson, W. Keith. *Linear Algebra with Applications*. – McGraw-Hill Ryerson, 2013 – 593 p.
- [3] Howard Anton, Chris Rorres. *Elementary Linear Algebra: Applications Version*. – Wiley, 2013. – 802 p.
- [4] Sohail A. Dianat. *Advanced Linear Algebra for Engineers with MATLAB*. – CRC Press, 2017. – 366 p.
- [5] Robert Johansson. *Numerical Python. Scientific Computing and Data Science Applications with Numpy, SciPy and Matplotlib*. – Apress, 2018. – 700 p.
- [6] Makoto Tsukada, Yuji Kobayashi, Hiroshi Kaneko, Sin-Ei Takahasi, Kiyoshi Shirayanagi, Masato Noguchi. *Linear Algebra with Python. Theory and Applications*. – Springer, 2023. – 318 p.