1 ПРЕДМЕТ, МЕТОДЫ, ПРИНЦИПЫ И МОДЕЛИ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Согласно современным представлениям теория финансов и финансовый анализ должны исследовать свойства финансовых структур и технологий, заниматься тем, как наиболее рациональным образом использовать финансовые ресурсы с учетом факторов времени, риска и характера экономико-финансового окружения (как правило, случайного) с помощью различных финансовых инструментов и операций.

Любая финансовая операция, инвестиционный проект или коммерческое соглашение предусматривают наличие ряда условий их выполнения, с которыми соглашаются причастные стороны. К таким условиям относятся суммы финансовых активов (в том числе денег), временные параметры, процентные ставки, разнообразные дополнительные величины и показатели. Каждая из перечисленных характеристик может быть представлена разнообразным образом. В рамках одной финансовой операции подобные показатели образуют некоторую взаимосвязанную систему, подчиняется определенной логике. В связи с множественностью параметров конечные результаты (кроме самых элементарных ситуаций) не являются очевидными. Изменение одной или более величин, меняет результаты операций. Отсюда подобные системы должны быть объектом применения количественного финансового анализа. Методы и модели такого количественного анализа составляют *предмет финансовой математики* (ФМ).

Итак, *предмет финансовой математики* – методы количественного анализа финансовых операций. Количественный финансовый анализ применяется в условиях определенности и неопределенности. В первом случае данные для анализа заранее известны и фиксированы.

Рамки ФМ достаточно широки – от элементарных подсчетов процентов, до сложных подсчетов для динамических стохастических и статистических моделей финансовых явлений и операций. Среди основных задач ФМ можно указать:

1) измерения конечных финансовых результатов сделок, контрактов и т.д. для заинтересованных сторон;

2) разработка планов выполнения операций с учетом финансовых рисков и применения методов их редукции, в т.ч. планов погашения задолженностей;

3) измерения зависимости конечных результатов операции от ее параметров;

4) определение допустимых критических значений этих параметров и расчет (в случае необходимости) параметров эквивалентного (справедливого безубыточного) изменения первоначальных условий сделки.

Время – важнейший фактор финансовых расчетов. При проведении финансовых операций суммы денег связываются с конкретными моментами или периодами времени. Существует *принцип неравноценности денег*, относящихся к разным моментам времени, или, по-другому, *принцип изменения* *ценности денег во времени*. Обоснование: возможность инвестирования денег и получения дохода; инфляция; риски в экономике.

Суммирование денег, относящихся к разным периодам времени допустимы в бухгалтерском учете, но недопустимы при принятии решений финансового характера.

Принцип финансовой эквивалентности – равенство (эквивалентность) финансовых обязательств сторон, участвующих в операции.

Процентные деньги (*проценты*) – абсолютная величина дохода от представления денег в долг в любой форме: выдача ссуды, продажа товара в кредит, учет векселя и т. д.

Процентная ставка – относительная величина дохода за фиксированный отрезок времени, т. е. отношение дохода (процентных денег) к сумме долга. Она измеряется в виде дроби или в процентах.

Период начисления – временной интервал, к которому привязана процентная ставка (год, полугодие, квартал и т. д.) Чаще всего используется год.

Наращение (*рост*) – процесс увеличения суммы денег в связи с присоединением процентов.

Дисконтирование – определение процентов при движении во времени в обратном направлении (от будущего к настоящему). В этом случае сумма денег, относящаяся к будущему, уменьшается на величину соответствующего *дисконта* (скидки).

В финансовом анализе процентная ставка является измерителем доходности (эффективности) любой финансовой операции.

Если при начислении процентов применяют постоянную базу для начисления процентов, то используются *простые* процентные ставки. Если эта база последовательно изменяется на каждом этапе наращения или дисконтирования, то используют *сложные* процентные ставки.

Важным является выбор принципа расчета процентных денег. Существует два принципа: от настоящего к будущему и от будущего к настоящему. В первом случае применяют *ставки наращения*, во втором – *дисконтные* (*учетные*) *ставки*. Проценты, полученные по ставке наращения, называются *декурсивными*, по учетной ставке – *антисипативными* [10, с. 11–19].

2 МАТЕМАТИКА ПРОСТЫХ ПРОЦЕНТОВ

2.1 Определение ставок и вычисление процентов

В практических финансовых и коммерческих операциях суммы денег обязательно связываются с некоторыми конкретными моментами или интервалами времени. Для этого в контрактах фиксируются соответствующие сроки, даты, периодичность поступлений денежных средств или их выплат.

Фактор времени играет не меньшую роль, чем размеры денежных сумм. Необходимость учета фактора времени определяется *принципом неравноценности* денег, относящихся к разным моментам времени. Денежные ресурсы, участвующие в финансовой операции, имеют временную ценность: одна и та же сумма денег неравноценна в разные периоды. Учет временного фактора в финансовых операциях осуществляется путем начисления процентов или дисконтирования.

Эффективность любой финансовой операции может быть охарактеризована ставкой.

Для сопоставления в пространственно-временном аспекте результатов финансовой операции используют показатель, называемый *ставкой* и определяемый отношением процентных денег, уплаченных (полученных) за единицу времени (обычно за год), к некоторому базовому капиталу. Это отношение выражается в десятичных дробях или в процентах.

Процентная ставка определяется отношением процентных денег, уплаченных (полученных) за единицу времени (обычно за год), к величине исходного капитала. *Учетная ставка* определяется отношением процентных денег, уплаченных (полученных) за единицу времени (обычно за год), к ожидаемой полученной (возвращаемой) сумме денежных средств.

Интервал времени, к которому относится процентная ставка, называют *периодом начисления*. Ставка измеряется в процентах, а также в виде десятичной или натуральной дроби.

Начисление процентов, как правило, производится дискретно, т.е. в отдельные моменты времени, причем в качестве периодов начисления принимают год, полугодие, квартал, месяц. Иногда практикуют ежедневное начисление, а в ряде случаев удобно применять непрерывные проценты.

Проценты либо выплачиваются кредитору по мере их начисления, либо присоединяются к сумме долга. Процесс увеличения денег в связи с присоединением процентов к сумме долга называют *наращением*, или *капитализацией*. В количественном финансовом анализе процентная ставка применяется не только как инструмент наращения суммы долга, но и в более широком смысле – как измеритель степени доходности финансовой операции.

В практике существуют различные способы начисления процентов, зависящие от условий контрактов. Соответственно применяют различные виды процентных ставок. Одно из основных отличий связано с выбором исходной суммы для начисления процентов. Ставки процентов могут применяться к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды или к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами. В первом случае они называются *простыми*, а во втором – *сложными процентными ставками*.

Процентные ставки, указываемые в контрактах, могут быть *постоянными* или *переменными* («плавающими»). В этом случае значение ставки равно сумме некоторой изменяющейся во времени базовой величины и надбавки к ней, которую называют *маржой*. Размер маржи определяется рядом условий, например сроком операции, и обычно он находится в пределах 0,5 – 5 %. В контракте может использоваться и переменный во времени размер маржи.

Рассмотрим методы анализа сделок, в которых предусматриваются разовые платежи при выдаче и погашении кредита или депозита. Задачи такого анализа сводятся к расчету наращенной суммы, суммы процентов и размера дисконта – современной величины (текущей стоимости) платежа, который будет произведен в будущем.

Удобной и наглядной характеристикой (особенно при оценке вклада) является *индекс роста суммы* за данный период, показывающий, во сколько раз выросла величина капитала по отношению к величине капитала в конце предыдущего периода.

Процесс, в котором заданы исходная сумма и ставка, в финансовых вычислениях называется *процессом наращения*, искомая величина называется *наращенной суммой*, а ставка – *ставкой наращения*.

Процесс, в котором заданы ожидаемая в будущем к получению (возвращаемая) сумма и ставка, называется *процессом дисконтирования*, искомая величина называется *приведенной суммой*, а ставка – *ставкой дисконтирования*.

В качестве ставки наращения или дисконтирования может выступать как процентная, так и учетная ставка.

Число, равное сумме начального числа и начисленных на него процентов, называется *наращенным числом*. Число, равное разности между начальным числом и начисленными на него процентами, называется *уменьшенным числом*.

Общим правилам наращения и дисконтирования для произвольного срока предпошлем частный случай приведения на единичном периоде. В зависимости оттого, величина какого из концевых платежей считается базовой, т.е. принимается за 100%, различают два варианта: 1) приведение по ставке начисления; 2) приведение соответственно ставке удержания процентов.

Вариант 1 Пусть в качестве базовой рассматривается величина P в начале периода. Тогда ставкой приведения $r\%$ считается ставка начисления процента, т.е. тот процент, на который увеличится начальная сумма P за один период. В результате наращенная за один период сумма S составит величину:

$$S = P\left(1 + \frac{r}{100}\right) = P\left(1 + i\right),$$

где $i = \frac{r}{100}$ – дробное измерение ставки.

Дисконтирование по этой ставке, называемой в этой связи еще и *ставкой дисконтирования*, заключается в приведении поздней выплаты S к предшествующему эквиваленту P:

$$P = \frac{S}{1+i}.$$

Вариант 2 Пусть за базовую принята величина S в конце периода. Тогда ставкой приведения $q\%$ является ставка удержания процентов, ее еще называют *учетной ставкой*, т.е. тот процент, на который уменьшится финальная сумма S на один период «назад». В этом случае процедура дисконтирования определяется формулой

$$P = S\left(1 - \frac{q}{100}\right) = S\left(1 - j\right),$$

где $j = \dfrac{q}{100}$ – дробное измерение ставки.

Наращение по этой ставке, называемой еще *ставкой наращения* по учетному проценту, заключается в приведении ранней выплаты P к последующему эквиваленту S: $S = \dfrac{P}{1-j}$.

По отношению к другим периодам («вперед» или «назад») формулы приведения определяются принятым правилом начисления (удержания) процентов: простых или сложных.

2.2 Формула наращения

Пусть P первоначальная сумма денег, i – ставка простых процентов. Начисленные проценты за один период равны Pi, а за n периодов – Pni.

Процесс изменения суммы долга с начисленными простыми процентами описывается арифметической прогрессией, членами которой являются величины

$$P,\ P + Pi = P\left(1+i\right),\ P\left(1+i\right) + Pi = P\left(1+2i\right) \text{ и т.д. до } P\left(1+ni\right).$$

Первый член этой прогрессии равен P, разность Pi, а последний член определяемый как

$$S = P\left(1+ni\right) \qquad (2.1)$$

и является *наращенной суммой*. Формула (2.1) называется *формулой наращения по простым процентам* или, кратко, *формулой простых процентов*. Множитель $\left(1+ni\right)$ является *множителем наращения*. Он показывает во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной суммы.

Под *процентными деньгами*, или, кратко, *процентами*, понимают величину прироста денежной суммы: $I = S - P = Pni$.

Процесс роста суммы долга по простым процентам легко представить графически (см. рис. 2.1). При начислении простых процентов по ставке i за базу берется первоначальная сумма долга. Наращенная сумма S растет линейно от времени.

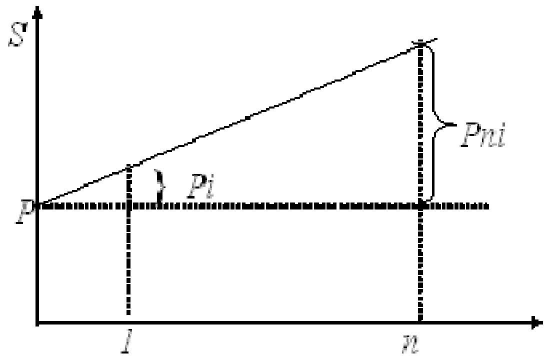

Рисунок 2.1 – Наращение по простой процентной ставке

Правило простых процентов выражаются формулой (2.1), в которые входят следующие показатели: начальная сумма P (другое обозначение – PV (present value)), конечная сумма S (другое обозначение – FV (future value)), процентная ставка начисления i, промежуток времени n между исходной и замыкающей суммами P и S. Итого четыре параметра.

Пусть любые три из них заданы, тогда формула, соответствующая применяемому правилу и используемой ставке (начисления или учетной), дает уравнение для отыскания недостающего параметра при известных трех. Возникающие при этом четыре варианта задач для случая начисления по ставке i представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1 – Варианты задач для случая начисления по ставке i

Исходные данные	Искомая величина	Тип задачи
P, n, i	S	Отыскание наращенной суммы
n, i, S	P	Отыскание современной величины
P, S, i	n	Отыскание срока приведения
P, S, n	i	Отыскание ставки начисления

Пример 2.1 Определим проценты и сумму накопления долга, если ссуда равна 700 тыс. грн., срок 4 года, проценты простые по ставке 20% годовых.

Решение.

$$I = 700 \cdot 4 \cdot 0,2 = 560 \text{ тыс. грн.};$$

$$S = P + I = 700 + 560 = 1260 \text{ тыс. грн.}$$

Увеличим ставку в два раза. Сумма процентов удвоится, однако наращенная сумма увеличится в $\frac{1+2 \cdot 4 \cdot 0,2}{1+4 \cdot 0,2} = \frac{2,6}{1,8} = 1,444$ раза.

2.2.1 Практика расчета процентов для краткосрочных ссуд

Начисление простых процентов обычно используется в двух случаях:

1) при заключении краткосрочных контрактов (предоставлении краткосрочных кредитов и т.п.), срок которых не превышает года ($n \le 1$);

2) когда проценты не присоединяются к сумме долга, а периодически выплачиваются.

Ставка процентов обычно устанавливается в расчете за год, поэтому при продолжительности ссуды менее года необходимо выяснить, какая часть процента уплачивается кредитору.

Для этого величину n выражают в виде дроби

$$n = \frac{t}{K}, \tag{2.2}$$

где

n – срок ссуды (измеренный в долях года);

K – число дней (месяцев, кварталов) в году, т.е. временная база;

t – срок операции (ссуды) в днях (месяцах, кварталах).

Здесь возможно несколько вариантов расчета процентов, различающихся выбором временной базы K и способом измерения срока пользования ссудой.

Например, если i – годовая процентная ставка, то будущая стоимость за

– m кварталов: $S = P\left(1 + \frac{i}{4}m\right)$;

– k месяцев: $S = P\left(1 + \frac{i}{12}k\right)$.

В этом случае *множителем наращения* являются $\left(1 + \frac{i}{4}m\right)$ и $\left(1 + \frac{i}{12}k\right)$ соответственно.

Часто за базу измерения времени берут год, условно состоящий из 360 дней (12 месяцев по 30 дней в каждом). В этом случае говорят, что вычисляют *обыкновенный* или *коммерческий процент*. В отличие от него *точный процент* получают, когда за базу берут действительное число дней в году: 365 или 366.

Определение числа дней пользования ссудой также может быть *точным* или *приближенным*. В первом случае вычисляют фактическое число дней между двумя датами, во втором – продолжительность ссуды определяется числом месяцев и дней ссуды, приближенно считая все месяцы равными, содержащими по 30 дней. В обоих случаях дата выдачи и дата погашения долга считается за один день. Подсчет приближенного числа дней между двумя датами можно осуществить на компьютере с помощью MS Excel (для этого служит функция **ДНЕЙ360** *(Нач_дата; Кон_дата)*), а точного – с помощью специальной таблицы, в которой представлены порядковые номера дат в году (приложение А).

Различные варианты временной базы и методов подсчета дней ссуды, приводят к следующим схемам расчета процентов, применяемым в практике:

– *германская практика* (обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды по схеме 360/360): в году считается 360 дней, в полном месяце – 30 дней, в неполном месяце точное количество дней

$$S = P\left(1 + \frac{i}{360}k\right),$$

где k – количество дней начисления процентов.

Поскольку точное число дней ссуды в большинстве случаев больше приближенного, то при расчете по процентам с точным числом дней сумма получается больше, чем при расчете процентов с приближенным числом дней;

– *французская практика* (обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды по схеме 365/360): длительность года 360 дней, количество дней в месяце берется равным их фактической календарной длительности. Данный вид начисления дает несколько больший результат, чем применение точных процентов;

– *английская практика* (точные проценты с точным числом дней ссуды по схеме 365/365): количество дней в году берется точным 365 (или 366) дней и, соответственно, точная длительность месяцев. Этот вариант дает самые точные результаты.

Вариант расчета с точными процентами и приближенным измерением времени ссуды не применяется.

Пример 2.2 Банк принимает вклады по ставке 12% годовых. Определить сумму, которую получит владелец вклада 10 тыс. грн. за а) 3 года; б) 8 месяцев; в) 1 квартал.

Решение.

а) Согласно формуле наращения по простому проценту за 3 года:

$$S = P(1+3i) = 10000\cdot(1+3\cdot 0{,}12) = 10000\cdot 1{,}36 = 13600 \text{ (грн.)};$$

б) Согласно формуле наращения по простому проценту за 8 месяцев:

$$S = P\left(1+\frac{i}{12}8\right) = 10000\cdot(1+0{,}12\cdot 8/12) = 10000\cdot 1{,}08 = 10800 \text{ (грн.)};$$

в) Согласно формуле наращения по простому проценту за 1 квартал:

$$S = P\left(1+\frac{i}{4}1\right) = 10000\cdot(1+0{,}12/4) = 10000\cdot 1{,}03 = 10300 \text{ (грн.)}.$$

Пример 2.3 Вклад в размере 20 тыс. грн. положен в банк 15.04.2015 и востребован 10.12.2015. Ставка процентов банка составляла 30% годовых. Определить сумму начисленных процентов при различных методах определения срока начисления.

Решение.

а) при германской практике расчетное количество дней будет равно:

$$k = 16(\text{дней в апреле}) + 210(7\,\text{месяцев по 30 дней}) +$$
$$+10(\text{дней в декабре}) - 1 = 235 \text{ дней}.$$

Тогда, $I = 20000\cdot\dfrac{235}{360}\cdot 0{,}3 = 3916{,}66$ грн.

б) при французской практике количество дней хранения вклада равно:

$$k = 16 + 31\cdot 4 + 30\cdot 3 + 10 - 1 = 239 \text{ дней}.$$

Тогда, $I = 20000\cdot\dfrac{239}{360}\cdot 0{,}3 = 3983{,}33$ грн.

в) при английской практике количество дней хранения вклада такое же, как и при французской, т.е. $k = 239$ дней, длительность года 365 дней. Тогда, $I = 20000 \cdot \frac{239}{365} \cdot 0,3 = 3928,76$ грн.

Таким образом, для вкладчика более выгодным является французский способ начисления процентов, а для банка – германский.

2.2.2 Переменные ставки

Как известно, процентные ставки не остаются неизменными во времени, поэтому в кредитных соглашениях иногда предусматриваются дискретно изменяющиеся во времени процентные ставки. В этом случае формула расчета наращенной суммы принимает следующий вид

$$S = P\left(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + ...\right) = P\left(1 + \sum_{t=1}^{m} n_t i_t\right), \tag{2.3}$$

где P – первоначальная сумма (ссуда), i_t – ставка простых процентов в периоде с номером $t = \overline{1,m}$, n_t – продолжительность периода t – периода начисления по ставке i_t.

Пример 2.4 Пусть в договоре, рассчитанном на год, принята ставка простых процентов на первый квартал в размере 10% годовых, а на каждый последующий на 1% меньше, чем в предыдущий. Определить множитель наращения за весь срок договора.

Решение.

$1 + \sum n_t i_t = 1 + 0,25 \cdot 0,10 + 0,25 \cdot 0,09 + 0,25 \cdot 0,08 + 0,25 \cdot 0,07 = 1,085$.

2.2.3 Начисление процентов при изменении суммы депозита во времени

В этом случае

$$I = \sum_j R_j n_j i, \tag{2.4}$$

где R_j – остаток средств на счете в момент j после очередного поступления или списания средств; n_j – срок хранения денег (в годах) до нового изменения остатка средств на счете.

В банковско-сберегательном деле обычно применяют следующий способ. Интервалы между моментами изменений величины остатка на счете выражают в днях, а процентную ставку – в процентах (а не в десятичных дробях). Тогда получим:

$$I = \sum_j R_j n_j i = \frac{\sum R_j t_j}{100} : \frac{K}{i}, \tag{2.5}$$

где K – число дней в году; t_j – срок в днях между последовательными изменениями остатков на счете.

Величину $\dfrac{\sum R_j t_j}{100}$ называют *процентным числом*, а делитель $\dfrac{K}{i}$ – *процентным* (*постоянным*) *делителем*.

Пример 2.5 Движение средств на счет характеризуется следующими данными: 5 февраля 2015 года, поступило 12 млн. грн., 10 июля снято 4 млн. грн., 20 октября поступило 8 млн. грн. Процентная ставка – 18% годовых. Найти сумму на счете на конец года.

Решение.

При определении расчетного количества дней примем английский способ, т.е. 365 дней в году и точным количеством дней в месяце. Процентный делитель $\dfrac{K}{i}=\dfrac{365}{18}=20,27778$. Схема решения представлена в табл. 2.2

Таблица 2.2 – Схема решения примера 2.5

Дата	Движение средств	Остаток, R_j	Срок, t_j (дней)	Процентное число, $\dfrac{\sum R_j t_j}{100}$
05.02.15	12	12	155	18,60
10.07.15	–4	8	102	8,16
20.10.15	8	16	72	11,52
31.12.15	–	16	–	–
Итого				38,28

Сумма процентов за весь срок составит $I=\dfrac{38,28}{20,27778}=1,888$ млн. грн., а наращенная сумму $S=12+1,888=13,888$ млн. грн.

2.2.4 Реинвестирование по простым процентам

Сумма депозита, полученная в конце обозначенного периода вместе с начисленными на нее процентами, может быть вновь инвестирована, хотя, скорее всего, и под другую процентную ставку, и этот процесс *реинвестирования* иногда повторяется неоднократно в пределах расчетного срока N. Тогда в случае многократного инвестирования в краткосрочные депозиты и применения простой процентной ставки наращенная сумма для всего срока N вычисляется находится по формуле

$$S=P\left(1+n_1 i_1\right)\left(1+n_2 i_2\right)\ldots=P\prod_{t=1}^{m}\left(1+n_t i_t\right), \qquad (2.5)$$

где n_1, n_2, …, n_m – продолжительности последовательных периодов реинвестирования и $N=\sum_{t=1}^{m} n_t$, i_1, i_2, …, i_m – ставки, по которым производится реинвестирование.

Если промежуточные строки n_t и ставки i_t не изменяются, то получим

$$S = P\left(1 + ni\right)^m, \tag{2.6}$$

где m – число повторений реинвестирования.

Пример 2.6 100 млн. грн. положены 1 января на месячный депозит под 20% годовых. Какова наращенная сумма, если операция повторяется 3 раза?

Решение.

1. Начислим точные проценты (365/365):

$$S = 100 \cdot \left(1 + \frac{31}{365} \cdot 0,2\right) \cdot \left(1 + \frac{28}{365} \cdot 0,2\right) \cdot \left(1 + \frac{31}{365} \cdot 0,2\right) = 105,01 \text{ млн. грн.}$$

2. Обыкновенные проценты (360/360):

$$S = 100 \cdot \left(1 + \frac{30}{360} \cdot 0,2\right)^3 = 105,084 \text{ млн. грн.}$$

2.3 Наращение процентов в потребительском кредите

В потребительском кредите проценты, как правило, начисляются на всю сумму кредита и присоединяются к основной сумме долга в момент открытия кредита. Погашение долга с процентами производится частями, обычно равными суммами на протяжении всего срока кредита.

Таким образом, наращенная сумма долга

$$S = P\left(1 + ni\right),$$

а величина разового погасительного платежа составит

$$R = \frac{S}{nm}, \tag{2.9}$$

где m – число платежей в году; n – число лет.

Пример 2.7 Кредит для покупки товара на сумму 1млн. грн. открыт на 3 года, процентная ставка – 15% годовых, выплаты производятся в конце каждого месяца.

Решение.

Сумма долга с процентами составит

$$S = 1 \cdot \left(1 + 3 \cdot 0,15\right) = 1,45 \text{ млн. грн.}$$

Ежемесячные платежи будут такими:

$$R = \frac{1450}{3 \cdot 12} = 40,278 \text{ тыс. грн.}$$