3.4 Учет (дисконтирование) по сложной ставке процентов

Здесь, также как и в случае простых процентов, будут рассмотрены два вида учета – математический и банковский.

3.4.1 Математический учет

В этом случае решается задача обратная наращению по сложным процентам. Запишем исходную формулу для наращения

$$S = P(1+i)^n$$

и решим ее относительно P

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = S \cdot v^n, \tag{3.18}$$

где

$$v^n = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}, \tag{3.19}$$

v – *учетный* или *дисконтный множитель*.

Если проценты начисляются m раз в году, то получим

$$P = \frac{S}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}} = S \cdot v^{mn}, \tag{3.20}$$

$$v^{mn} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn} . \tag{3.21}$$

Величину P, полученную дисконтированием S, называют *современной* или *текущей стоимостью* или *приведенной величиной* S. Дисконтный множитель показывает, во сколько раз первоначальная сумма меньше наращенной.

Суммы P и S эквивалентны в том смысле, что платеж в сумме S через n лет равноценен сумме P, выплачиваемой в настоящий момент. Разность $D = S - P = S - S \cdot v^n = S\left(1 - v^n\right)$ называют *дисконтом*.

Пример 3.12 Сумма в 5 млн. грн. выплачивается через 5 лет. Необходимо определить ее современную величину при условии, что применяется ставка сложных процентов, равная 12% годовых.

Решение.

Дисконтный множитель равен

$$v^5 = (1+0{,}12)^{-5} = 0{,}56574.$$

Таким образом, первоначальная сумма сократилась почти на 44 %. Современная величина равна:

$$P = 5000 \cdot 0{,}56574 = 2837{,}1 \text{ тыс. грн.}$$

3.4.2 Банковский учет

В этом случае предполагается использование *сложной учетной ставки*. В этом случае процесс дисконтирования происходит с замедлением, поскольку на каждом шаге учетная ставка применяется не к первоначальной сумме (как при простой учетной ставке), а к сумме, дисконтированной на предыдущем шаге во времени.

Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется по формуле

$$P = S \cdot (1-d)^n, \tag{3.22}$$

где d – сложная годовая учетная ставка.

Дисконт в этом случае равен

$$D = S - P = S - S \cdot (1-d)^n = S\left(1-(1-d)^n\right).$$

Пример 3.13 Долговое обязательство на сумму 5 млн. грн., срок оплаты которого наступает через 5 лет, продано с дисконтом по сложной учетной ставке 15% годовых. Найти размер суммы, полученной за долг, и величину дисконта (в тыс. грн.).

Решение.

$$P = 5000 \cdot (1-0{,}15)^5 = 2218{,}5 \text{ тыс. грн.,}$$

$$D = S - P = 5000 - 2218{,}5 = 2781{,}5 \text{ тыс. грн.}$$

Если применить простую учетную ставку того же размера, то

$$P = 5000 \cdot (1 - 5 \cdot 0{,}15) = 1250 \text{ тыс. грн.,}$$

$$D = 5000 - 1250 = 3750 \text{ тыс. грн.}$$

Таким образом, дисконтирование по сложной учетной ставке для должника выгоднее, чем дисконтирование по простой учетной ставке, т.к.

$w_s = 1 - n \cdot d_s$ – дисконтный множитель для простой учетной ставки,

$w = (1-d)^n$ – дисконтный множитель для сложной учетной ставки.

Согласно первой формуле значение дисконтирующего множителя равномерно уменьшается по мере роста n и достигает нуля при $n = \dfrac{1}{d}$. Согласно второй формуле множитель экспоненциально уменьшается и достигает нуля лишь в пределе при $n = \infty$ (рис. 3.5).

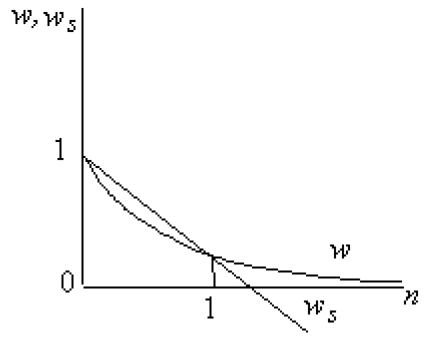

Рисунок 3.5

3.4.3 Номинальная и эффективная учетные ставки процентов

В тех случаях, когда дисконтирование применяют m раз в году, используют *номинальную учетную ставку* f. Тогда в каждом периоде, равном $\frac{1}{m}$ части года, дисконтирование осуществляется по сложной учетной ставке $\frac{f}{m}$. Процесс дисконтирования по этой сложной учетной m раз в году описывается формулой

$$P = S \cdot \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}. \tag{3.23}$$

Дисконтирование не один, а m раз в году быстрее снижает величину дисконта.

Под *эффективной учетной ставкой* понимают сложную годовую учетную ставку, эквивалентную (по финансовым результатам) номинальной, применяемой при заданном числе дисконтирований в году m.

Эффективная учетная ставка d показывает степень дисконтирования за год. Ее определяют из равенства дисконтных множителей:

$$(1-d)^n = \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn},$$

откуда

$$d = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{m}. \tag{3.24}$$

В свою очередь

$$f = m \cdot \left(1 - \sqrt[m]{1-d}\right). \tag{3.25}$$

Эффективная учетная ставка меньше номинальной при $m > 1$.

Пример 3.14 Долговое обязательство на сумму 5 млн. грн., срок оплаты которого наступает через 5 лет. Определить сумму, полученную при поквартальном учете по номинальной учетной ставке 15%, и эффективную учетную ставку.

Решение.

Имеем $f = 0{,}15$; $m = 4$; $n = 5$; $m \cdot n = 20$.

$$P = 5000 \cdot \left(1 - \frac{0{,}15}{4}\right)^{20} = 2328{,}0 \text{ тыс. грн.}$$

Эффективная учетная ставка составит

$$d = 1 - \left(1 - \frac{0{,}15}{4}\right)^{4} = 0{,}14177 \text{ или } 14{,}177\ \%.$$

3.4.4 Наращение по сложной учетной ставке

Наращение является обратной задачей для учетных ставок. Формулы наращения по сложным учетным ставкам можно получить, разрешая соответствующие формулы для дисконтирования относительно S.

Получаем из $P = S \cdot (1-d)^n$

$$S = \frac{P}{(1-d)^n}, \tag{3.26}$$

а из $P = S \cdot \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}$

$$S = \frac{P}{\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}}. \tag{3.26}$$

Множитель наращения при использовании сложной учетной ставки d равен $(1-d)^{-n}$.

Пример 3.15 Какую сумму следует проставить в векселе, если реально выданная сумма равна 20 млн. грн., срок погашения 2 года. Вексель рассчитывается, исходя из сложной годовой учетной ставки 10%.

Решение.

$$S = \frac{20}{(1-0,1)^2} = 24,691358 \text{ млн. грн.}$$

Пример 3.16 Решить предыдущую задачу при условии, что наращение по сложной учетной ставке осуществляется не один, а 4 раза в год.

Решение.

$$S = \frac{20}{\left(1 - \frac{0,1}{4}\right)^8} = 24,490242 \text{ млн. грн.}$$

3.5 Сравнение интенсивности процессов наращения и дисконтирования по разным видам процентных ставок

Для решения поставленной задачи достаточно сопоставить соответствующие множители наращения (дисконтирования). Считаем размеры ставок одинаковыми.

Имеют место следующие соотношения для множителей наращения:

$$(1+i_{\text{сл}})^n < 1 + ni_{\text{пр}} < \frac{1}{1 - nd_{\text{пр}}} < \frac{1}{(1-d_{\text{сл}})^n} \quad \text{при } 0 < n < 1,$$

$$1 + i_{\text{пр}} = 1 + i_{\text{сл}} < \frac{1}{1-d_{\text{пр}}} = \frac{1}{1-d_{\text{сл}}} \quad \text{при } n = 1,$$

$$1 + ni_{\text{пр}} < (1 + i_{\text{сл}})^n < \frac{1}{(1 - d_{\text{сл}})^n} < \frac{1}{1 - nd_{\text{пр}}} \qquad \text{при } n > 1.$$

Видно, что соотношение множителей наращения зависит от сроков наращения процентов.

Пример 3.17 Множители наращения для разных видов ставок (20%) (см. табл. 3.2).

Таблица 3.3 – Множители наращения для разных видов ставок (20%)

Срок (в годах)	$i_{\text{пр}}$	$i_{\text{сл}}$	$d_{\text{пр}}$	$d_{\text{сл}}$
0,5	1,10	1,0954	1,1111	1,1180
1,0	1,20	1,2000	1,2500	1,2500
2,0	1,40	1,4400	1,6667	1,5625
10,0	11,00	6,1917	∞	9,3132

Соотношения для дисконтных множителей следующие:

$$(1 - d_{\text{сл}})^n < 1 - nd_{\text{пр}} < \frac{1}{1 + ni_{\text{пр}}} < \frac{1}{(1 + i_{\text{сл}})^n} \qquad \text{при } 0 < n < 1,$$

$$1 - d_{\text{сл}} = 1 - d_{\text{пр}} < \frac{1}{1 + i_{\text{пр}}} = \frac{1}{1 + i_{\text{сл}}} \qquad \text{при } n = 1,$$

$$1 - nd_{\text{пр}} < (1 - d_{\text{сл}})^n < \frac{1}{(1 + i_{\text{сл}})^n} < \frac{1}{1 + ni_{\text{пр}}} \qquad \text{при } n > 1.$$

3.6 Определение срока ссуды и размера процентной ставки

В ряде практических задач начальная (P) и конечная (S) суммы заданы контрактом, и требуется определить либо срок платежа, либо процентную ставку, которая в данном случае может служить мерой сравнения с рыночными показателями и характеристикой доходности операции для кредитора. Указанные величины нетрудно найти из исходных формул наращения или дисконтирования. По сути дела, в обоих случаях решается в известном смысле обратная задача.

3.6.1 Срок ссуды

Рассмотрим задачу расчета срока ссуды для различных ставок.

1. При наращивании по сложной годовой ставке i из исходной формулы наращения $S = P(1 + i)^n$ следует, что срок ссуды (в годах) рассчитывается по формуле

$$n = \frac{\log\left(\frac{S}{P}\right)}{\log(1+i)}, \tag{3.27}$$

где логарифм можно взять по любому основанию, поскольку он имеется как в числителе, так и в знаменателе.

2. При наращивании по номинальной ставке j процентов m раз в году из формулы $S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}$ получаем:

$$n = \frac{\log\left(\frac{S}{P}\right)}{m \cdot \log\left(1+\frac{j}{m}\right)}, \tag{3.28}$$

3. При дисконтировании по сложной годовой учетной ставке d из формулы $P = S \cdot (1 - d_{\text{сл}})^n$ имеем:

$$n = \frac{\log\left(\frac{P}{S}\right)}{\log(1-d)}, \tag{3.29}$$

4. При дисконтировании по номинальной учетной ставке m раз в году из выражения $P = S \cdot \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}$ находим:

$$n = \frac{\log\left(\frac{P}{S}\right)}{m \cdot \log\left(1-\frac{f}{m}\right)}. \tag{3.30}$$

Пример 3.18 За какой срок в годах сумма, равная 75 млн. грн., достигнет 200 млн. грн. при начислении процентов по сложной ставке 15% раз в году и поквартально?

Решение.

По формулам (3.27) и (3.28) получим соответственно сроки:

$$n = \frac{\log\left(\frac{200}{75}\right)}{\log(1+0{,}15)} = 7{,}0178 \text{ года}; \qquad n = \frac{\log\left(\frac{200}{75}\right)}{4 \cdot \log\left(1+\frac{0{,}15}{4}\right)} = 6{,}6607 \text{ года}.$$

3.6.2 Величина процентной ставки

Получим выражения для процентных ставок.

1. При наращивании по сложной годовой ставке i из исходной формулы наращения $S = P(1+i)^n$ следует, что процентная ставка i рассчитывается по формуле

$$i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1. \qquad (3.31)$$

2. При наращивании по номинальной ставке j процентов m раз в году из формулы $S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}$ получаем:

$$j = m \cdot \left(\sqrt[mn]{\frac{S}{P}} - 1\right). \qquad (3.32)$$

3. При дисконтировании по сложной годовой учетной ставке d из формулы $P = S \cdot (1 - d_{\text{сл}})^n$ имеем:

$$d = 1 - \sqrt[n]{\frac{P}{S}}. \qquad (3.33)$$

4. При дисконтировании по номинальной учетной ставке m раз в году из выражения $P = S \cdot \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}$ находим:

$$f = m \cdot \left(1 - \sqrt[mn]{\frac{P}{S}}\right). \qquad (3.34)$$

Пример 3.19 Сберегательный сертификат куплен за 100 тыс. грн., выкупная его сумма 160 тыс. грн., срок 2,5 года. Каков уровень доходности в виде годовой ставки сложных процентов?

Решение.

По формуле (3.31) получим

$$i = \sqrt[2,5]{\frac{160}{100}} - 1 = 0,20684 \text{ или } 20,684\%.$$

Пример 3.20 Срок до погашения векселя равен 2 годам. Дисконт при его учете составил 30 %. Какой сложной годовой учетной ставке соответствует этот дисконт?

Решение.

По формуле (3.33) получим

$$d = 1 - \sqrt[2]{\frac{P}{S}} = 1 - \sqrt{\frac{0,7S}{S}} = 1 - \sqrt{0,7} = 0,16334 \text{ или } 16,334\%.$$

3.7 Непрерывное наращение и дисконтирование. Непрерывные проценты

3.7.1 Наращение и дисконтирование

В практических финансово-кредитных операциях непрерывное наращение, т.е. наращение за бесконечно малые отрезки времени, применяется крайне редко. Существенно большее значение непрерывное наращение имеет в анализе сложных финансовых проблем, например, при обосновании и выборе инвестиционных решений, в финансовом проектировании. С помощью непрерывных процентов удается учесть сложные закономерности процесса наращения, например, использовать изменяющиеся по определенному закону процентные ставки.

При непрерывном наращении процентов применяют особый вид процентной ставки – *силу роста* (*force of interest*). Сила роста характеризует относительный прирост наращенной суммы за бесконечно малый промежуток времени. Она может быть постоянной или изменятся во времени.

Наращенная сумма при дискретных процентах определяется по формуле

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn},$$

где j – номинальная ставка процентов, а m – число периодов начисления процентов в году.

Чем больше m, тем меньше промежутки времени между моментами начисления процентов. В пределе при $m \to \infty$ получим, что *наращенная сумма в случае непрерывного начисления процентов по ставке* j равна

$$S = \lim_{m\to\infty} P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} = P \lim_{m\to\infty}\left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m}\right]^{n} = P \lim_{m\to\infty}\left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{j}}\right]^{nj} = Pe^{nj}. \quad (3.35)$$

Для того, чтобы отличать ставку непрерывных процентов от ставок дискретных процентов, ее называют *силой роста* и обозначают символом δ. Тогда

$$S = Pe^{\delta n}. \quad (3.36)$$

Сила роста δ представляет собой номинальную ставку процентов при $m \to \infty$.

Дисконтирование на основе непрерывных процентных ставок осуществляется по формуле

$$P = Se^{-\delta n}. \quad (3.37)$$

Пример 3.21 Сумма, на которую начисляются непрерывные проценты, равна 2 млн. грн., сила роста 10%, срок 5 лет. Определить наращенную сумму.

Решение.

Наращенная сумма, согласно формуле (3.36), составит

$$S = Pe^{\delta n} = 2 \cdot e^{0,1 \cdot 5} = 3,29774425 \text{ млн. грн.}$$

Пример 3.22 Определить современную стоимость платежа из примера 18 при условии, что дисконтирование производится по силе роста 12% и по дискретной сложной учетной ставке такого же размера.

Решение.

Получим в тыс. грн.:

$$P = 5000 \cdot e^{-0{,}12 \cdot 5} = 2744, \qquad S = 5000 \cdot \left(1 - 0{,}12\right)^5 = 2639.$$

3.7.2 Связь дискретных и непрерывных процентных ставок

Дискретные и непрерывные процентные ставки находятся в функциональной зависимости, благодаря которой можно осуществлять переход от расчета непрерывных процентов к дискретным и наоборот. Формулу эквивалентного перехода от одних ставок к другим можно получить путем приравнивания соответствующих множителей наращения

$$\left(1 + i\right)^n = e^{\delta n}.$$

Из записанного равенства следует, что

$$\delta = \ln\left(1 + i\right). \tag{3.38}$$

$$i = e^{\delta} - 1. \tag{3.39}$$

Пример 3.23 Годовая ставка сложных процентов равна 15%, чему равна эквивалентная сила роста.

Решение.

Воспользуемся формулой (3.38)

$$\delta = \ln\left(1 + i\right) = \ln\left(1 + 0{,}15\right) = 0{,}13976,$$

т.е. эквивалентная сила роста равна 13,976%.

3.7.3 Переменная сила роста

Пусть сила роста изменяется во времени, следуя некоторому закону, представленному в виде непрерывной функции времени: $\delta_t = f\left(t\right)$. Тогда наращенная сумма и современная величина определяются как

$$S = Pe^{\int_0^n \delta_t dt}, \qquad P = Se^{-\int_0^n \delta_t dt}.$$

Функция времени может быть самого различного вида. Рассмотрим только два ее варианта – линейную и экспоненциальную. Начнем с линейной функции

$$\delta_t = \delta + at,$$

где δ – начальное значение силы роста, a – прирост силы роста в единицу времени.

Нетрудно доказать, что

$$\int_0^n \delta_t dt = \int_0^n (\delta + at)\,dt = \frac{1}{a} \cdot \left. \frac{(\delta + at)^2}{2} \right|_0^n = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{(\delta + an)^2}{2} - \frac{\delta^2}{2} \right) = \delta n + \frac{an^2}{2}.$$

Таким образом, множитель наращения находится как

$$q = e^{\delta n + \frac{an^2}{2}}. \tag{3.40}$$

Пример 3.24 Пусть начальное значение силы роста равно 8%, процентная ставка непрерывно и линейно изменяется, прирост за год составляет 2% ($a = 0{,}02$). Срок наращения 5 лет. Найти множитель наращения. Рассмотреть случай, когда сила роста линейно уменьшается, т.е. $a = -0{,}02$.

Решение.

Для расчета множителя наращения воспользуемся формулой (3.40):

$$q = e^{\delta n + \frac{an^2}{2}} = e^{0{,}08 \cdot 5 + \frac{0{,}02 \cdot 5^2}{2}} = e^{0{,}65} = 1{,}91554.$$

В случае, когда сила роста линейно уменьшается, т.е. $a = -0{,}02$, будем иметь

$$q = e^{\delta n + \frac{an^2}{2}} = e^{0{,}08 \cdot 5 - \frac{0{,}02 \cdot 5^2}{2}} = e^{0{,}15} = 1{,}16183.$$

Рассмотрим ситуацию, когда сила роста изменяется экспоненциально вида

$$\delta_t = \delta a^t,$$

где δ – начальное значение силы роста, a – постоянный темп роста.

В этом случае степень множителя равна

$$\int_0^n \delta_t dt = \int_0^n \left(\delta a^t \right) dt = \delta \cdot \left. \frac{a^t}{\ln a} \right|_0^n = \frac{\delta}{\ln a} \cdot \left(a^n - 1 \right),$$

а сам множитель находится как

$$q = e^{\frac{\delta}{\ln a} \cdot \left(a^n - 1 \right)}. \tag{3.41}$$

Пример 3.25 Пусть начальное значение силы роста равно 8%, процентная ставка непрерывно и экспоненциально увеличивается, прирост за год составляет 20% ($a = 1{,}2$). Срок наращения 5 лет. Найти множитель наращения.

Решение.

Для расчета множителя наращения воспользуемся формулой (3.41):

$$q = e^{\frac{\delta}{\ln a} \cdot \left(a^n - 1 \right)} = e^{\frac{0{,}08}{\ln 1{,}2} \cdot \left(1{,}2^5 - 1 \right)} = e^{0{,}65305} = 1{,}92139.$$

3.7.4 Расчет срока ссуды и процентных ставок

Срок ссуды. При разработке параметров соглашения и оценивании сроков достижения желательного результата требуется определить продолжительность операции (срока ссуды) через остальные параметры сделки. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

При наращении по постоянной силе роста. Исходя из формулы $S = Pe^{\delta n}$, получаем

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{\delta}. \tag{3.42}$$

При наращении с изменяющейся силой роста (с постоянным темпом роста a) на основе (3.41) получим

$$n = \frac{\ln\left[1 + \frac{\ln a \cdot \ln\left(\frac{S}{P}\right)}{\delta}\right]}{\ln a}. \tag{3.43}$$

Расчет процентных ставок. Из тех же исходных формул, что и выше, получим выражения для процентных ставок.

При наращении по постоянной силе роста. Исходя из $S = Pe^{\delta n}$, получаем

$$\delta = \frac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{n}. \tag{3.44}$$

При наращении с изменяющейся с постоянным темпом силой роста

$$\delta = \frac{\ln a \cdot \ln\left(\frac{S}{P}\right)}{a^n - 1}. \tag{3.45}$$