Тема 8 ЗАДАЧА КОМІВОЯЖЕРА

8.1 Постановка та математична модель задачі комівояжера

Формальне означення задачі комівояжера

Задача комівояжера (Travelling Salesman Problem, TSP) – одна з найважливіших задач транспортної логістики. Її суть полягає у знаходженні найкращого маршруту, тобто найкоротшого, а отже, найменш витратного у часовому (і, відповідно, економічному) відношенні.

За умовою задачі «комівояжер» виїжджає з деякого початкового міста й відвідує інші міста у кількості $n-1$, де n – загальна кількість пунктів призначення. Задається матриця відстаней $\{c_{ij}\}$ між пунктами, де i та j змінюються від 1 до n. При цьому необхідно врахувати такі обмеження:

– комівояжер в'їжджає до кожного пункту лише один раз;
– комівояжер виїжджає з кожного пункту лише один раз;
– маршрут є замкненим, без петель.

Приклади задач комівояжера

– оптимізація маршруту доставки товарів;
– планування обходу торгових агентів;
– маршрутизація роботів і дронів;
– виготовлення друкованих плат (мінімізація холостих переміщень);
– секвенування завдань у виробничих процесах;
– біоінформатика (аналіз послідовностей).

Подання задачі у вигляді графа

Задача комівояжера моделюється *зваженим повним графом*

$$G = (V, E),$$

де V – множина вершин (міста);
E – множина ребер;
кожному ребру (i, j) відповідає вага $c_{ij} \geq 0$, яку можна розуміти як, наприклад, відстань між містами, час або вартість подорожі.

Таким чином, граф G за умовою є повним. Задача може бути *симетричною або асиметричною*, коли вага ребра залежить від напряму: $c_{ij} \neq c_{ji}$. На рис. 8.1 продемонстровано приклад граф антисиметричної задачі комівояжера.

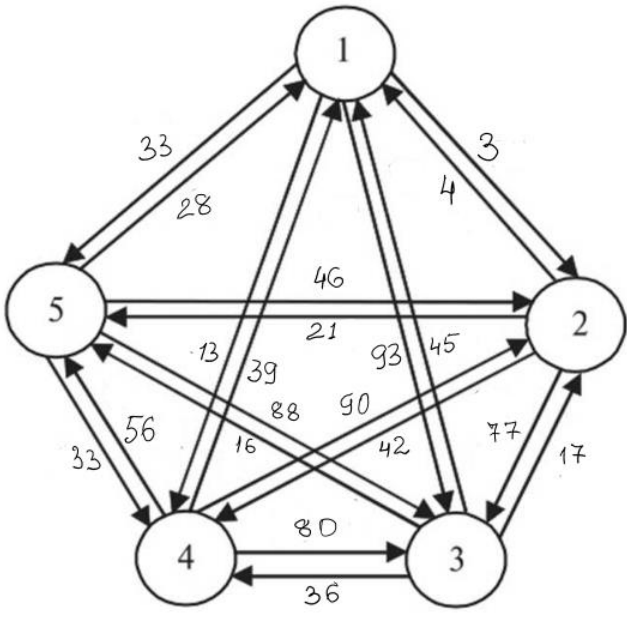

Рис. 8.1 – Приклад представлення графом задачі комівояжера

Шуканий маршрут відповідає ***гамільтоновому циклу мінімальної ваги***. Гамільтонів цикл – маршрут на цьому графі, до якого входить по одному разу кожна вершина графа

Математична модель задачі комівояжера (формулювання як задачі дискретної оптимізації)

Введемо бінарні *змінні*:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо перехід від } i \text{ до } j \text{ використовується;} \\ 0, & \text{у супротивному випадку.} \end{cases}$$

Цільова функція:

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (8.1)$$

Обмеження:

– з кожної вершини виходить рівно одне ребро:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall i; \qquad (8.2)$$

– у кожну вершину входить рівно одне ребро:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall j; \qquad (8.3)$$

– для забезпечення замкненості маршруту й відсутності петель вводяться додаткові змінні U_i $(i = 2, \ldots n)$ і задається обмеження:

$$U_i - U_j + nX_{ij} \leq n - 1, \qquad (8.4)$$

де $i, j = 2, \ldots, n$.

Саме це обмеження визначає послідовність відвідування пунктів

$$x_{ij} \in \{0,1\}. \qquad (8.5)$$

Алгоритмічна складність

Задача комівояжера є *NP– складною*. Кількість можливих маршрутів зростає факторіально:

$$(n-1)!.$$

Для великих n точне розв’язання за поліноміальний час є обчислювально неможливим.

Методи розв’язання

Точні методи:

– повний перебір (для малих n);
– метод гілок і меж;
– динамічне програмування (алгоритм Беллмана-Хелда-Карпа);
– цілочисельне лінійне програмування.

Наближені та евристичні методи:

– жадібні алгоритми;
– локальний пошук (2– opt, 3– opt);
– генетичні алгоритми;
– імітація відпалу;
– мурашині алгоритми.

Питання для самоконтролю до теми 8 та лабораторної роботи №6

1. Сформулювати змістовну та математичну постановку задачі комівояжера. Охарактеризувати зв'язок задачі комівояжера із задачею мережевого програмування.
2. Навести математичну модель задачі комівояжера з урахуванням обмежень, що ставляться на пов'язаний із задачею граф.
3. Охарактеризувати принципи розв'язання задачі комівояжера з використанням інструмента «Solver» для MS Excel;