

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №8

Тема: Введення в теорію графів

Теоретичні відомості

Будемо вважати, що задано *скінченний неорієнтований граф* $G = (X, U)$, якщо задано такі два об'єкти:

- 1) скінченна непорожня множина $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$; елементи цієї множини називають *вершинами графа*;
- 2) деяка множина неупорядкованих пар елементів з X ; ця множина позначається U , її елементи називають *ребрами*.

За наочного подавання графа вершини зображуються *точками*, ребра – *відрізками*, які з'єднують точки.

Приклад 1 $G = (X, U)$,

де $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$;

$U = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_4, x_5\}\}$.

Наочно цей граф зображено на рис. 8.1.

Зауваження. Якщо $u_1 = \{x_1, x_2\}$ – ребро графа, то стверджують, що ребро u_1 з'єднує вершини x_1 та x_2 .

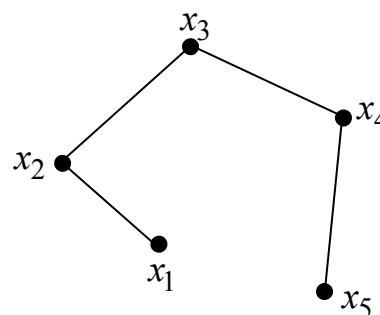


Рисунок 8.1 – Приклад графа

Графи, в яких одну й ту саму пару вершин з'єднує кілька ребер називаються *мультиграфами* (рис. 8.2).

Можливі також графи, в яких певні ребра можуть мати збіжні кінці. Такі ребра називають *петлями* (рис. 8.3).

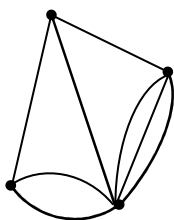


Рисунок 8.2 – Мультиграф

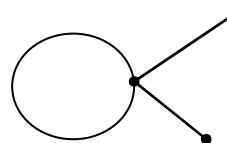


Рисунок 8.3 – Граф з петлею

У теорії графів можна відкидати петлі й замінювати кратні ребра на одне ребро. Тому надалі словом «граф» позначатимемо *скінченний неорієнтований граф без петель і кратних ребер* (його ще називають *простим*, або *звичайним*) (рис. 8.4).

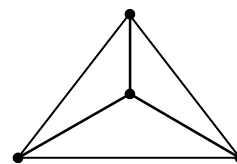


Рисунок 8.4 – Простий граф

Граф з петлями і кратними ребрами називається *псевдографом* (рис. 8.5).

Стверджуватимемо, що задано *орієнтований граф*, якщо зазначено два об'єкти:

- 1) непорожня скінчена множина X – вершини графа;
- 2) множина U , утворена з упорядкованих пар вершин.

Елементи множини U називають *дугами*. Дуга орієнтованого графа зображується відрізком із зазначенням напрямку (стрілкою) (рис. 8.6).



Рисунок 8.6 – Зображення орієнтації дуг

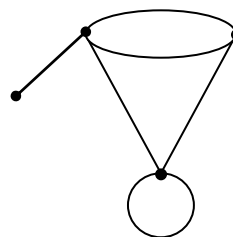


Рисунок 8.5 – Псевдограф

Приклад 2 Орієнтований граф $G = (X, U)$, де $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$; $U = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_4, x_5\}\}$. Граф G зображено на рис. 8.7.

Зауваження. Якщо $u_1 = (x_1, x_2)$ – дуга орграфа, то стверджують, що дуга u_1 виходить з вершини x_1 і закінчується у вершині x_2 .

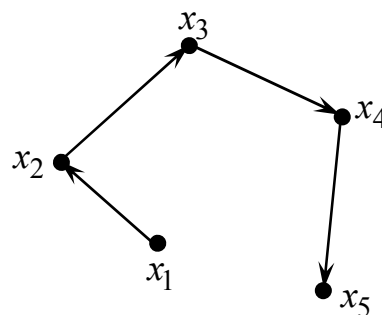


Рисунок 8.7 – Зображення орграфа G

Стверджуватимемо, що задано *орієнтований мультиграф*, якщо зазначено два об'єкти:

- 1) непорожня множина X – вершини графа;
- 2) множина U , утворена з упорядкованих пар вершин.

Отже, елементи (дуги) в U в разі орієнтованого мультиграфа можуть повторюватись; такі дуги називають *кратними*.

Говорять, що дві вершини x і y графа *суміжні*, якщо множина $u = \{x, y\}$ є ребром (відрізком або стрілкою), і *не суміжні* в протилежному випадку.

Якщо $u = \{x, y\}$ – ребро, то вершини x і y називаються його *кінцями*. Два ребра називаються *суміжними*, якщо вони мають спільний кінець.

Вершина x і ребро $u = \{x, y\}$ називаються *інцидентними*, якщо x є кінцем ребра $u = \{x, y\}$, і *не інцидентними* в протилежному випадку.

Далі позначатимемо *кількість вершин* графа – літерою n , а *кількість ребер* графа – літерою m : $|X| = n$, $|U| = m$. Кількість ребер, інцидентних до вершини x , називається *степенем* цієї вершини. Позначається $\delta(x)$ або $\deg(x)$.

Вершина, в якій $\deg(x) = 0$, називається *ізолюваною* (x на рис. 8.8), а в яких $\deg(x) = 1$, називаються *висячими*, або *кінцевими* (x на рис. 8.9).

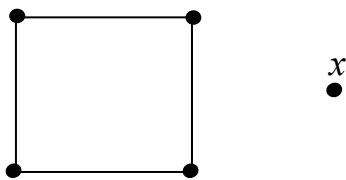


Рисунок 8.8 – Граф з ізольованою вершиною x

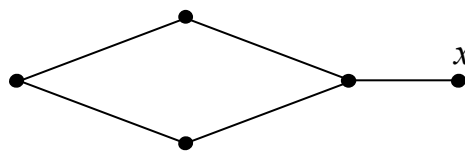


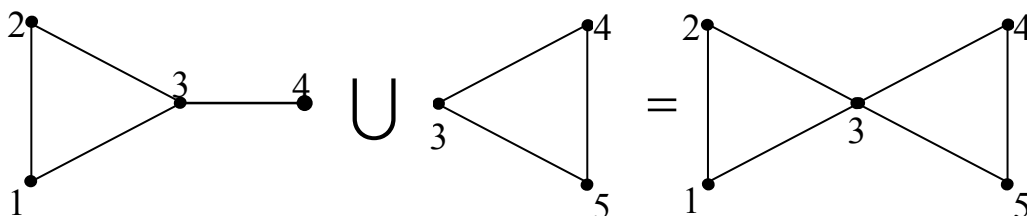
Рисунок 8.9 – Граф з висячою вершиною x

Граф, в якому кожна пара вершин з'єднана ребром, називається *повним*.

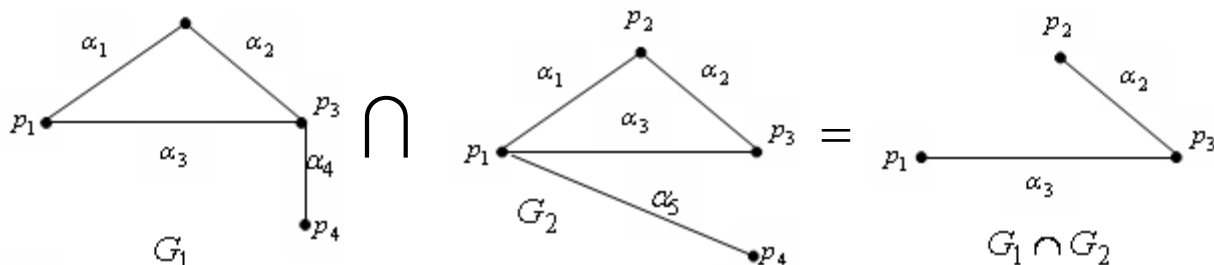
Розглянемо **операції**, за допомогою яких можна з наявного графа одержувати інші графи з меншим або більшим числом елементів.

1. Операція *додавання ребра*: якщо вершини x і y графа G не суміжні, то можна визначити граф $G+u$, що виходить додаванням ребра u до графа G .

2. Операція *об'єднання* (накладення): граф G називається об'єднанням графів $G_1 = (X_1, U_1)$ та $G_2 = (X_2, U_2)$, якщо $G = (X_1 \cup X_2, U_1 \cup U_2)$ ¹.

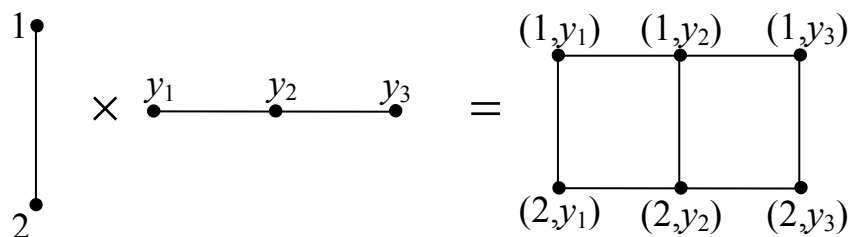


3. Операція *перетину* графів: *перетином* графів $G_1 = (X_1, U_1)$ та $G_2 = (X_2, U_2)$ називається граф $G = (X_1 \cap X_2, U_1 \cap U_2)$.



4. Операція *добутку*: нехай $G_i = (X_i, U_i)$ ($i=1,2$) – два графи. Добутком $G_1 \times G_2 = G$ називається граф, для якого $X_1 \times X_2 = XG$ – декартів добуток множин вершин вихідних графів, а UG визначається в такий спосіб: вершини (x_1, x_2) і (y_1, y_2) суміжні в графі G тоді й тільки тоді, коли або $x_1 = y_1$, а x_2 і y_2 суміжні в G_2 , або $x_2 = y_2$, а x_1 і y_1 суміжні в G_1 .

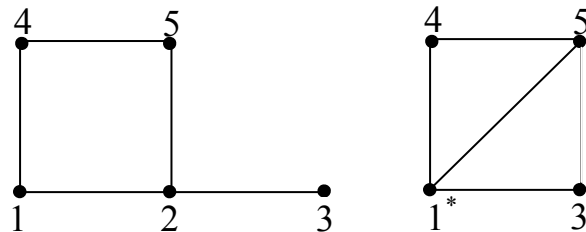
Очевидно, що $|G_1 \times G_2| = |G_1| \cdot |G_2|$, $|X(G_1 \times G_2)| = |G_1| \cdot |XG_2| + |G_2| \cdot |XG_1|$.



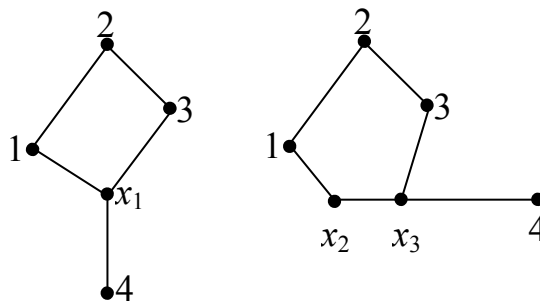
¹ Об'єднання називається *диз'юнктивним*, якщо $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. В цьому випадку об'єднання буде представляти собою два вихідних графи без змін.

5. Операція *ототожнення* (злиття) вершин. Нехай x_1 і x_2 – дві вершини графа, $H = G - x_1 - x_2$. До графа H приєднаємо нову вершину x_2^* , з'єднавши її ребром з кожною з вершин, що входять в об'єднання оточень вершин x_1 і x_2 у графі G .

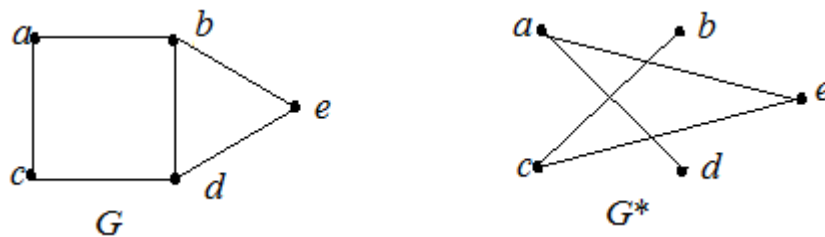
6. Операція *стягування* для ребра $\{x_1, x_2\}$ означає ототожнення суміжних вершин x_1 і x_2 .



7. Операція *розщеплення* вершини: нехай x_1 – одна з вершин графа G . Розіб'ємо її оточення довільним чином на дві частини M і N та виконаємо наступне перетворення графа G – видалимо вершину x_1 разом з інцидентними їй ребрами, додамо нові вершини x_2 і x_3 та з'єднаємо їх ребром $\{x_2, x_3\}$. Вершину x_2 з'єднаємо ребром з кожною вершиною множини M , а вершину x_3 з'єднаємо ребром з кожною вершиною множини N .



8. Нехай дано граф $G = (X, U)$ і $|X| = n$. *Доповненням* графа G називається граф G^* з множиною вершин X , в якому дві вершини суміжні тоді й тільки тоді, коли вони несуміжні в графі G . Отже, отримаємо правило побудови графа G^* : необхідно побудувати повний граф та видалити з нього всі ребра, які належать графу G .



Розглянемо $G = (X, U)$ – оргграф, де $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$.

Матрицею суміжності оргграфа G називається квадратна матриця $A(G) = (a_{ij})_{i, j=1, \dots, n}$, в якій:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо стрілка виходить з вершини } x_i \text{ та входить в вершину } x_j, \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Матрицею інцидентності орграфа G називається матриця $B(G) = (B_{ij})_{i=\overline{1,n}; j=\overline{1,m}}$, в якій елементи:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } x_i \text{ є кінцем дуги } u_j, \\ -1, & \text{якщо вершина } x_i \text{ є початком дуги } u_j, \\ 0, & \text{якщо вершина } x_i \text{ не є інцидентна до дуги } u_j. \end{cases}$$

Приклад 3 Розглянемо оргграф G (рис. 8.10). Для нього матриця суміжності матиме вигляд

$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

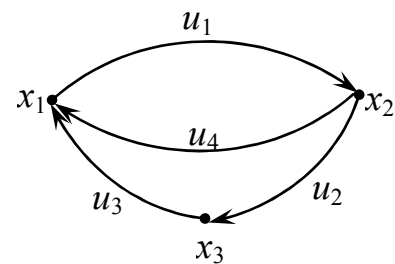


Рисунок 8.10 – Оргграф G

Матриця інцидентності матиме вигляд

$$B(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Розглянемо $G = (X, U)$ – скінченний неорієнтований граф, де $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$.

Матрицею суміжності графа G називається квадратна матриця $A(G) = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, в якій:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершини } x_i \text{ та } x_j \text{ суміжні,} \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Матрицею інцидентності графа G називається матриця $B(G) = (B_{ij})_{i=\overline{1,n}; j=\overline{1,m}}$, в якій елементи:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } x_i \text{ є інцидентна до ребра } u_j, \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Приклад 4 Розглянемо граф G_1 , який задано геометрично (рис. 8.11). Для нього матриця суміжності $A(G_1)$ матиме вигляд:

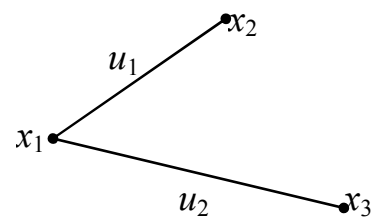


Рисунок 8.11 – Граф G_1

$$A(G_1) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

а матриця інцидентності

$$B(G_1) = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Приклад 5 Для орграфа $G=(X, U)$ (рис. 8.12) побудувати матриці суміжності та інцидентності.

Розв'язання.

Матриця суміжності:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця інцидентності:

$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

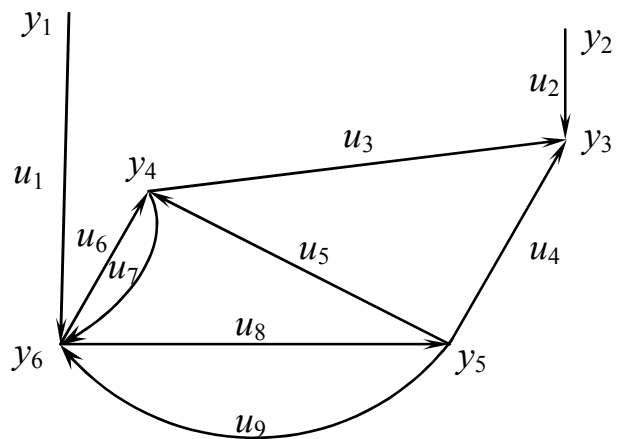


Рисунок 8.12

Зауваження. Матрицю суміжності можна визначити і для псевдографів. Тоді в разі орієнтованого (неорієнтованого) псевдографа $a_{ij} = k$, де k – кратність дуги (x_i, x_j) (ребра $\{x_i, x_j\}$) у цьому псевдографі.

Визначення матриці інцидентності без змін переносяться і на довільні мультиграфи (орієнтовані й неорієнтовані) і навіть на неорієнтовані псевдографи.

Приклад 6 Нехай задано геометрично орієнтований псевдограф G (рис. 8.13).

Тоді матриця суміжності $A(G)$ матиме вигляд

$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

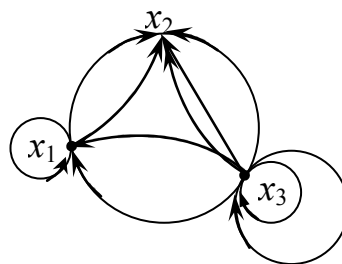


Рисунок 8.13 – Орієнтований псевдограф

Зауваження. Матриця суміжності для звичайних графів і матриця інцидентності для будь-яких графів задає граф однозначно.

Нехай граф $G = (X, U)$ – неорієнтований.

Вершина a називається *зв'язаною* з вершиною b , якщо існує маршрут, який з'єднує ці вершини. Граф, будь-яка пара вершин якого є зв'язана, називається *зв'язним*.

Нехай задано зв'язний граф $G = (X, U)$. *Відстанню між двома вершинами x та y графа G* називається довжина найкоротшого маршруту, в якому всі ребра є різними, який зв'язує ці вершини. Позначається через $d_G(x, y)$.

Ексцентриситет $e(x_i)$ вершини $x_i \in X$ у зв'язному графі G – відстань від x_i до найбільш віддаленої від неї вершини: $e(x_i) = \max_{x \in X} d(x, x_i)$. Мінімум цієї величини за всіма вершинами графа називається *радіусом* графа G :

$$r(G) = \min_x r(x) = \min_x \max_y d(x, y).$$

Діаметром графа називається найбільший із ексцентриситетів вершин, тобто величина $d(G) = \max_{x, y} d_G(x, y)$, де максимум береться за всіма можливими парами вершин графа.

Вершина x_0 , на яку припадає мінімум ексцентриситетів, тобто $e(x) = r(G)$, називається *центральною*.

Центром $C(G)$ графа G називається множина усіх його центральних вершин.

Приклад 7 Знайти діаметр і радіус для графа, зображеного на рис. 8.14.

Розв'язання.

Для розв'язання цієї задачі зручно попередньо обчислити так звану матрицю відстаней між вершинами графа. У даному разі це буде матриця розміром 9×9 , елемент якої, що стоїть на місці (i, j) , дорівнює відстані від вершини i до вершини j :

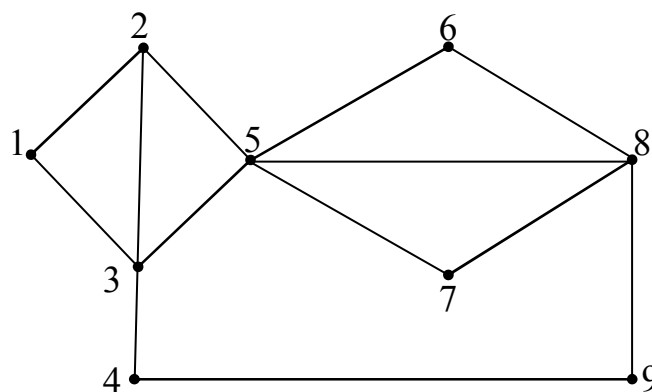


Рисунок 8.14

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{matrix}.$$

За визначенням, діаметр графа дорівнює найбільшому елементу матриці відстаней. Отже, $d = 3$.

Для знаходження радіуса відшукаємо в кожному рядку найбільше число; ці числа виписано праворуч від матриці відстаней. Найменші з них дають значення радіуса $r = 2$. Вершини 3-тя та 5-та є центральними, тому $C = \{3, 5\}$.

Нехай $G = (X, U)$ – скінченний неорієнтований граф. Скінчена послідовність вершин та ребер графа $x_0 u_1 x_1 u_2 x_2 \dots x_{l-1} u_l x_l$, в якій кожне ребро u_i є ребро, яке з'єднує вершини x_{i-1} та x_i , називається *маршрутом* на графі G . Говорять, що цей маршрут з'єднує вершини x_0 та x_l . Число l називають *довжиною маршруту*.

Отже, *довжина маршруту* – це кількість ребер, які входять до маршруту. Маршрут називають *замкненим*, якщо $x_0 = x_l$.

Маршрут, в якому всі ребра є різні, називають *ланцюгом*. Замкнений ланцюг називають *циклом*.

Ланцюг називають *простим*, якщо всі його вершини є різні. *Простий цикл* – це цикл, у якому всі вершини, окрім першої та останньої, є різні.

Приклад 8 У графі, поданому на рис. 8.15:

$x_1 u_3 x_3 u_3 x_1 u_3 x_3 u_2 x_2 u_4 x_4 u_5 x_2 u_3 x_1$ – маршрут;

$x_1 u_3 x_3 u_2 x_2 u_4 x_4 u_5 x_3 u_7 x_5$ – ланцюг;

$x_1 u_1 x_2 u_4 x_4 u_6 x_5$ – простий ланцюг.

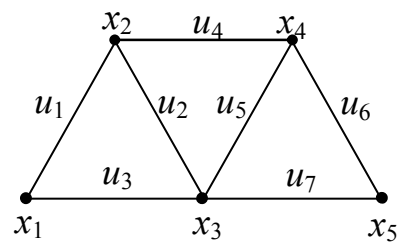


Рисунок 8.15

Орієнтовані маршрути на орграфі визначають в аналогічний спосіб, з тією різницею, що початкова вершина дуги маршруту має збігатися з кінцевою вершиною попередньої дуги.

Інакше кажучи, рух за маршрутом припускається лише в напрямках, зазначених стрілками.

Маршрут, який не містить повторних дуг, називається *шляхом*, а той, що не містить повторних вершин, – *простим шляхом*. Замкнений шлях називається *контуром*, а простий замкнений шлях – *простим контуром*.

Граф без циклів називається *ациклічним* (орграф – *безконтурним*), в іншому разі граф називається *циклічним* (орграф – *контурним*).

Умовимося вважати, що кожна вершина з'єднується сама з собою маршрутом довжини 0 і що цей маршрут є простим циклом. Такий цикл називають *нульовим* (якщо сказано просто цикл, то мається на увазі, що він не є нульовий).

Якщо існує цикл у скінченному графі, в якому кожне ребро графа брало участь один раз, то такий цикл називається *ейлеровим циклом*, а граф, який містить такий цикл, – *ейлеровим графом*.

Гамільтоновим циклом називається простий цикл, що проходить через усі вершини графа. Інакше кажучи, гамільтонів цикл і гамільтонів шлях проходять через кожну вершину графа точно один раз (можливо, окрім першої й останньої вершин). Зазначимо, що гамільтонові цикл і шлях, узагалі кажучи, не містять усіх ребер графа.

Нехай задано граф $G = (X, U)$, $|X| = n$, $|U| = m$; p – кількість компонент зв'язності графа. Величина $\lambda = m - n + p$ називається *цикломатичним числом графа*.

Приклад 9 Граф $G = (X, U)$ заданий матрицею суміжності.

$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

а) побудувати геометричне зображення графа. Визначити тип графа, типи ребер та вершин;

б) побудувати можливі види маршрутів на графі: маршрут та замкнений маршрут, ланцюг (шлях) та простий ланцюг (простий шлях), цикл та простий цикл, ланцюг та цикл Ейлера, ланцюг та цикл Гамільтона;

в) обчислити метричні характеристики графа: ексцентриситети вершин, радіус, діаметр та центр графа, його цикломатичне число.

Розв'язання.

а) геометричне зображення графа G на рис. 8.16.

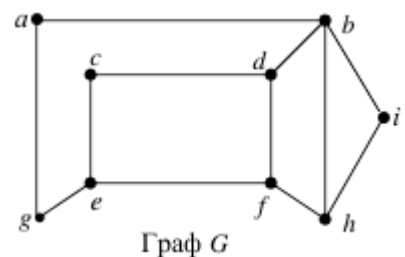


Рисунок 8.16

G – скінчений неорієнтований зв'язний плоский граф без петель і кратних ребер, який не має висячих вершин.

б) побудуємо можливі види маршрутів на графі: маршрут та замкнутий маршрут, ланцюг (шлях) та простий ланцюг (простий шлях), цикл та простий цикл, ланцюг та цикл Ейлера, ланцюг та цикл Гамільтона.

Маршрутом (який поєднує вершини x_i та x_j) називається скінчена послідовність ребер та інцидентних їм сусідніх з ними в цій послідовності вершин, які утворюють неперервну криву з кінцями x_i, x_j , наприклад:

$$au_1bu_2du_2bu_4iu_5hu_6fu_7du_7fu_{10}e.$$

Маршрут замкнений, якщо кінці його співпадають ($x_i = x_j$):

$$au_1bu_2du_2bu_4iu_5hu_6fu_7du_7fu_{10}eu_{11}gu_{12}e.$$

Ланцюгом називається маршрут, в якому всі ребра різні, наприклад:

$$au_1bu_2du_7fu_6hu_3bu_4i.$$

Простим ланцюгом називається ланцюг, в якому немає вершин, які б повторювалися:

$$au_1bu_2du_7fu_6hu_5i.$$

Циклом називається ланцюг ненульової довжини, який поєднує вершину саму з собою, і немає ребер, які б повторювалися, наприклад:

$$du_8cu_9eu_{11}gu_{12}au_1bu_4iu_5hu_3bu_2d.$$

Простим циклом називається цикл, який поєднує вершину x саму з собою і немає вершин, які б повторювалися, окрім x , наприклад:

$$cu_8du_7fu_{10}eu_9c.$$

Ланцюгом Ейлера називається ланцюг, який містить всі ребра і притому по одному разу: немає.

Циклом Ейлера називається цикл, який містить усі ребра і притому по одному разу: немає.

Ланцюгом Гамільтона називається ланцюг, який містить усі вершини і притому по одному разу:

$$fu_7du_8cu_9eu_{11}gu_{12}au_1bu_4iu_5h.$$

Циклом Гамільтона називається цикл, який містить усі вершини і притому по одному разу:

$$au_1bu_{24}iu_5hu_6fu_7du_8cu_9eu_{11}gu_{12}a.$$

в) обчислимо метричні характеристики графа: ексцентриситети вершин, радіус, діаметр та центр графа, його цикломатичне число.

Запишемо матрицю відстані між вершинами графа:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

$$e(a)=3, e(b)=3, e(c)=3, e(d)=3, e(e)=3, e(f)=3, e(g)=3, e(h)=3, e(i)=3;$$

$$r(G)=3, d(G)=3;$$

$$C(G)=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\};$$

$$m=12, n=9, p=1, \lambda=12-9+1=4.$$

ЗАДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. Для заданих графів (табл. 8.1)² знайти:

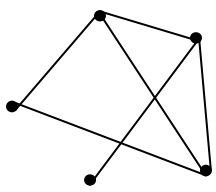
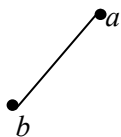
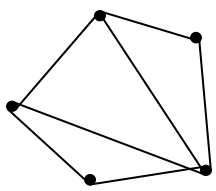
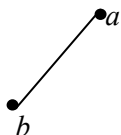
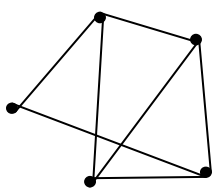
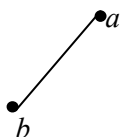
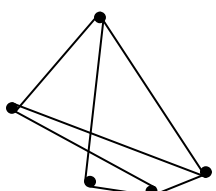
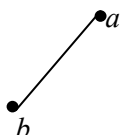
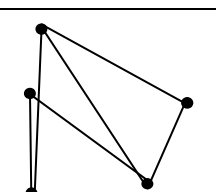
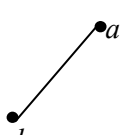
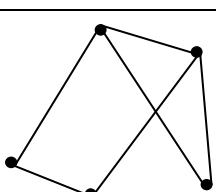
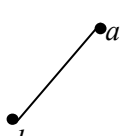
а) доповнення до графа G_1 ;

б) $G_1 \cup G_2$;

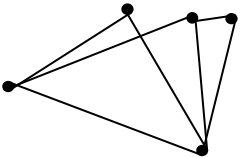
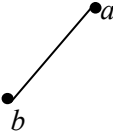
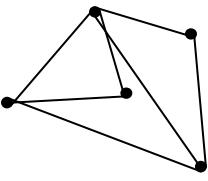
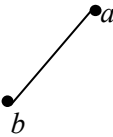
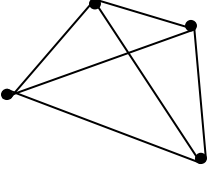
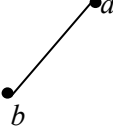
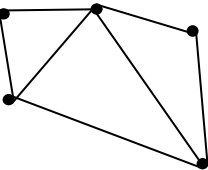
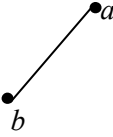
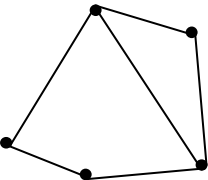
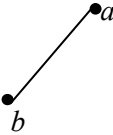
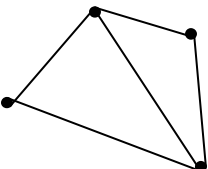
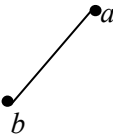
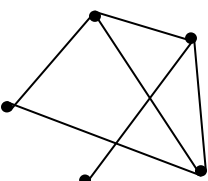
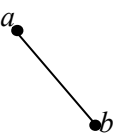
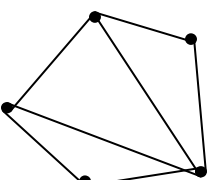
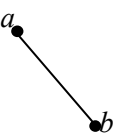
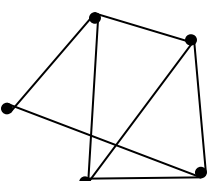
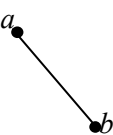
в) $G_1 \cap G_2$;

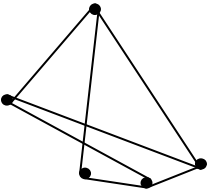
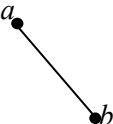
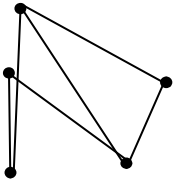
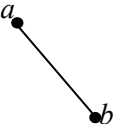
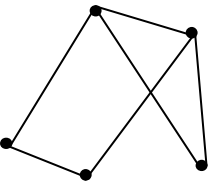
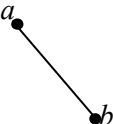
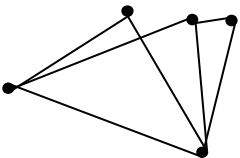
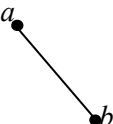
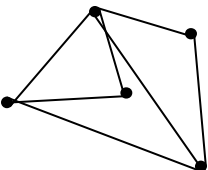
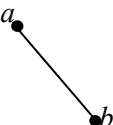
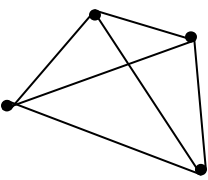
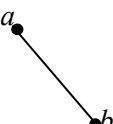
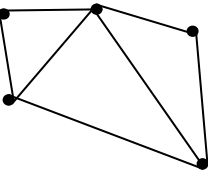
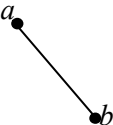
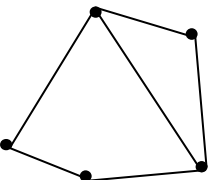
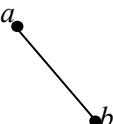
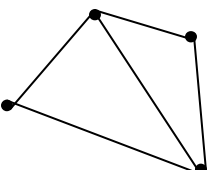
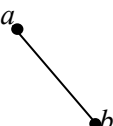
г) $G_1 \times G_2$.

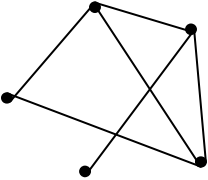
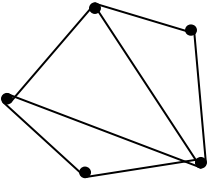
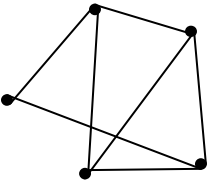
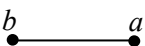
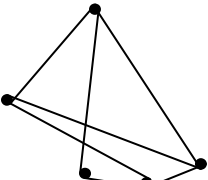
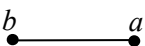
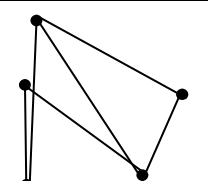
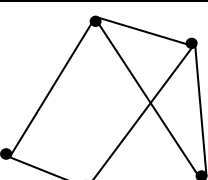
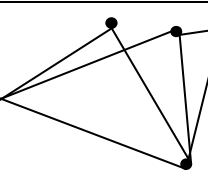
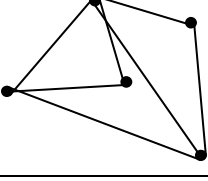
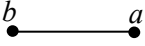
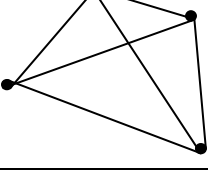
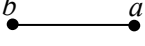
Таблиця 8.1

n	G_1	G_2
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		

² варіант обирати з розрахунку $h \cdot n$

7.		
8.		
9.		
10.		
11.		
12.		
13.		
14.		
15.		

16.		
17.		
18.		
19.		
20.		
21.		
22.		
23.		
24.		

25.		
26.		
27.		
28.		
29.		
30.		
31.		
32.		
33.		

34.		
35.		
36.		
37.		
38.		
39.		
40.		

2. Граф $G = (X, U)$ задано списком (табл. 8.2)³. Розглянути два випадки та виконати:

- 1) для випадку неорієнтованого графу побудувати його і знайти:
 - а) таблицю степенів вершин;
 - б) матрицю суміжності;
 - в) матрицю інцидентності;
 - г) побудувати можливі види маршрутів на графі: маршрут та замкнений маршрут, ланцюг та простий ланцюг, цикл та

³ варіант обирати з розрахунку $h \cdot n$

простий цикл, ланцюг та цикл Ейлера, ланцюг та цикл Гамільтона;

г) матрицю відстаней між вершинами графа;

е) обчислити метричні характеристики графа: ексцентриситети вершин, радіус, діаметр та центр графа, його цикломатичне число.

2) для випадку орієнтованого графу побудувати його і знайти:

а) матрицю суміжності;

б) матрицю інцидентності

Таблиця 8.2

n	граф $G = (X, U)$
1.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $U = \{(x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_2, x_6), (x_3, x_2), (x_4, x_3), (x_4, x_5),$ $(x_5, x_3), (x_5, x_6), (x_6, x_1), (x_6, x_4)\}$
2.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_5),$ $(x_5, x_2), (x_5, x_3), (x_5, x_6), (x_6, x_4)\}$
3.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_2, x_6), (x_3, x_4), (x_4, x_1),$ $(x_4, x_5), (x_4, x_6)\}$
4.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_5), (x_2, x_5), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_3, x_5),$ $(x_4, x_2), (x_4, x_5), (x_4, x_7), (x_6, x_1), (x_6, x_5), (x_6, x_7), (x_7, x_5)\}$
5.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $U = \{(x_1, x_4), (x_1, x_5), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_5), (x_4, x_2), (x_5, x_6), (x_6, x_3)\}$
6.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_3, x_6), (x_5, x_4),$ $(x_5, x_6), (x_7, x_4), (x_7, x_6)\}$
7.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$ $U = \{(x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_3, x_7), (x_4, x_5), (x_5, x_6),$ $(x_6, x_3), (x_7, x_8), (x_8, x_2), (x_9, x_4)\}$

8.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ $U = \{(x_1, x_5), (x_1, x_6), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_2, x_5),$ $(x_3, x_4), (x_3, x_7), (x_6, x_2), (x_6, x_3), (x_6, x_5), (x_7, x_1), (x_7, x_2), (x_7, x_4)\}$
9.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ $U = \{(x_1, x_8), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_5), (x_3, x_7), (x_4, x_2),$ $(x_4, x_3), (x_5, x_4), (x_6, x_5), (x_6, x_7), (x_7, x_1), (x_8, x_6), (x_8, x_7)\}$
10.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ $U = \{(x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_7),$ $(x_6, x_5), (x_6, x_7), (x_6, x_8)\}$
11.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_1, x_6), (x_1, x_{10}), (x_2, x_3), (x_3, x_5), (x_3, x_8), (x_4, x_2),$ $(x_4, x_6), (x_5, x_2), (x_5, x_4), (x_6, x_7), (x_6, x_{10}), (x_8, x_5), (x_8, x_7), (x_9, x_7),$ $(x_9, x_8), (x_{10}, x_7), (x_{10}, x_9)\}$
12.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$ $U = \{(x_2, x_1), (x_2, x_4), (x_4, x_3), (x_4, x_5), (x_6, x_1), (x_6, x_2), (x_6, x_3), (x_6, x_4),$ $(x_6, x_5), (x_6, x_7), (x_6, x_8), (x_6, x_9), (x_7, x_1), (x_7, x_9), (x_8, x_5), (x_8, x_9)\}$
13.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $U = \{(x_1, x_4), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_4, x_6), (x_5, x_2), (x_6, x_2)\}$
14.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_6), (x_2, x_8), (x_3, x_7), (x_4, x_2), (x_5, x_4), (x_5, x_{10}), (x_6, x_3),$ $(x_6, x_5), (x_7, x_4), (x_8, x_3), (x_9, x_1), (x_9, x_7), (x_{10}, x_8), (x_{10}, x_9)\}$
15.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_4), (x_3, x_4), (x_5, x_4),$ $(x_6, x_4), (x_7, x_4), (x_7, x_5), (x_7, x_6)\}$
16.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_6), (x_3, x_2), (x_4, x_5), (x_5, x_6), (x_6, x_4)\}$
17.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ $U = \{(x_1, x_3), (x_2, x_8), (x_3, x_5), (x_4, x_2), (x_5, x_7), (x_6, x_4), (x_7, x_1), (x_8, x_6)\}$

18.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_3, x_1), (x_4, x_3), (x_5, x_4),$ $(x_5, x_6), (x_6, x_4), (x_6, x_7), (x_7, x_5)\}$
19.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_4), (x_2, x_5), (x_3, x_1), (x_3, x_4), (x_5, x_4),$ $(x_5, x_6), (x_6, x_7), (x_7, x_3), (x_7, x_4)\}$
20.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ $U = \{(x_1, x_4), (x_2, x_6), (x_3, x_2), (x_4, x_8), (x_5, x_1), (x_6, x_1),$ $(x_6, x_7), (x_7, x_3), (x_8, x_3), (x_8, x_5)\}$
21.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $U = \{(x_1, x_3), (x_2, x_6), (x_3, x_5), (x_4, x_2), (x_5, x_1), (x_6, x_4)\}$
22.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_6), (x_2, x_7), (x_3, x_7), (x_4, x_7),$ $(x_5, x_3), (x_5, x_4), (x_7, x_1), (x_7, x_5), (x_7, x_6)\}$
23.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $U = \{(x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_6), (x_4, x_2), (x_4, x_5),$ $(x_5, x_1), (x_6, x_4), (x_6, x_5)\}$
24.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $U = \{(x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_4, x_2), (x_5, x_2), (x_5, x_3), (x_5, x_4), (x_5, x_6)\}$
25.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $U = \{(x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_2, x_5), (x_3, x_2), (x_4, x_1), (x_4, x_3), (x_5, x_4), (x_5, x_6)\}$
26.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ $U = \{(x_1, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_5), (x_3, x_7), (x_4, x_6), (x_4, x_8), (x_5, x_2), (x_5, x_4),$ $(x_6, x_1), (x_6, x_3), (x_7, x_5), (x_8, x_6)\}$
27.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ $U = \{(x_1, x_4), (x_2, x_1), (x_3, x_2), (x_4, x_5), (x_5, x_8), (x_6, x_3), (x_7, x_6), (x_8, x_7)\}$
28.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $U = \{(x_2, x_1), (x_2, x_5), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_2), (x_4, x_6), (x_5, x_3), (x_5, x_4),$ $(x_5, x_6), (x_6, x_2), (x_6, x_3)\}$

29.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_7), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_3, x_6), (x_3, x_7), (x_4, x_1), (x_4, x_5),$ $(x_5, x_6), (x_5, x_7), (x_6, x_4), (x_7, x_4)\}$
30.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_6), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_3, x_6), (x_4, x_1),$ $(x_4, x_5), (x_5, x_6)\}$
31.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_5), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_1, x_6), (x_2, x_7), (x_6, x_7)\}$
32.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_5), (x_2, x_3), (x_1, x_4), (x_4, x_7), (x_6, x_7), (x_1, x_3), (x_3, x_4),$ $(x_5, x_6), (x_3, x_6)\}$
33.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_4, x_6), (x_3, x_4), (x_5, x_6), (x_3, x_5), (x_5, x_7)\}$
34.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_5, x_6), (x_3, x_5), (x_6, x_8), (x_2, x_7), (x_7, x_8), (x_5, x_7)\}$
35.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_4), (x_2, x_5), (x_2, x_3), (x_4, x_5), (x_6, x_7), (x_5, x_7), (x_4, x_6)\}$
36.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ $U = \{(x_2, x_3), (x_2, x_6), (x_2, x_8), (x_3, x_4), (x_3, x_7), (x_3, x_8), (x_4, x_5), (x_4, x_7),$ $(x_5, x_6), (x_5, x_7), (x_6, x_8)\}$
37.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_5), (x_2, x_3), (x_1, x_4), (x_4, x_7), (x_6, x_7), (x_1, x_3),$ $(x_3, x_4), (x_5, x_6), (x_3, x_6)\}$
38.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_5), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_4, x_5), (x_4, x_8),$ $(x_5, x_7), (x_7, x_8)\}$
39.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_6), (x_5, x_6), (x_3, x_5), (x_1, x_8), (x_7, x_8),$ $(x_3, x_7), (x_6, x_7)\}$

40.	$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ $U = \{(x_1, x_2), (x_2, x_8), (x_2, x_6), (x_5, x_6), (x_3, x_5), (x_1, x_8), (x_7, x_8), (x_4, x_7), (x_6, x_7)\}$
-----	---

3. Для заданого графа (табл. 8.3)⁴ у випадку неорієнтованого та орієнтованого окремо:

- побудувати його;
- записати матрицю суміжності;
- записати матрицю інцидентності.

Таблиця 8.3

<i>n</i>	№ ребра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.	вершини	A	A	B	B	C	C	D	E	E	G	B	G
	вершини	B	C	F	C	D	F	E	F	G	F	F	A
2.	вершини	A	A	B	B	C	C	D	E	E	G	B	G
	вершини	B	C	C	B	D	F	E	F	E	F	F	A
3.	вершини	A	A	B	B	C	C	D	E	E	G	B	G
	вершини	B	D	C	D	C	F	E	F	G	F	E	A
4.	вершини	A	A	B	B	C	C	D	E	E	G	B	G
	вершини	C	E	C	D	D	F	D	F	G	F	F	B
5.	вершини	A	A	B	B	C	C	D	E	E	G	B	G
	вершини	A	E	C	D	D	F	E	F	G	F	E	A
6.	вершини	A	A	B	B	C	C	D	E	E	G	B	G
	вершини	B	F	C	A	D	E	E	F	G	F	F	A
7.	вершини	A	A	B	E	C	C	D	E	E	G	B	G
	вершини	A	B	C	C	D	C	E	F	G	F	F	G
8.	вершини	A	A	B	B	C	C	D	F	E	G	B	G
	вершини	G	E	C	A	D	F	E	F	G	F	E	B
9.	вершини	A	A	B	B	C	C	E	E	A	G	B	G
	вершини	C	B	B	C	E	F	E	F	G	F	F	C
10.	вершини	A	A	B	B	C	C	D	E	E	G	B	G
	вершини	B	E	E	G	D	F	E	F	G	F	F	F
11.	вершини	A	A	B	B	C	C	D	E	E	G	B	G
	вершини	B	D	E	D	D	F	F	F	G	F	F	A

⁴ варіант обирати з розрахунку $h \cdot n$

<i>n</i>	№ ребра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12.	вершини	A	A	E	B	C	C	D	E	E	G	B	G
	вершини	C	D	B	D	G	F	F	F	A	F	G	A
13.	вершини	B	B	C	F	D	F	E	F	G	F	F	A
	вершини	A	G	B	B	C	C	D	E	E	G	B	G
14.	вершини	B	C	C	B	D	F	E	F	E	F	F	A
	вершини	A	A	B	B	C	C	D	E	E	G	B	G
15.	вершини	B	D	C	D	C	F	E	F	G	F	E	A
	вершини	A	A	B	B	C	C	D	E	E	G	B	G
16.	вершини	C	E	C	C	D	F	D	F	G	F	F	B
	вершини	A	A	B	G	C	C	D	E	E	G	B	G
17.	вершини	A	E	C	D	D	F	E	F	G	F	E	A
	вершини	A	A	B	B	C	C	D	E	E	G	B	G
18.	вершини	B	F	C	A	D	E	E	F	G	F	F	A
	вершини	A	A	B	B	C	C	D	E	E	G	B	G
19.	вершини	A	B	C	G	D	C	E	F	G	F	F	G
	вершини	A	A	B	E	C	C	D	E	E	G	B	G
20.	вершини	G	E	C	A	D	F	E	F	G	F	E	B
	вершини	A	A	B	B	C	C	D	F	E	G	B	G
21.	вершини	C	B	B	C	E	F	E	F	G	F	F	C
	вершини	A	A	B	B	C	C	E	E	A	G	B	G
22.	вершини	B	E	E	G	D	F	E	F	G	F	F	F
	вершини	A	A	B	B	C	C	D	E	E	G	B	G
23.	вершини	B	D	E	D	D	F	F	F	G	F	F	A
	вершини	A	A	B	B	C	C	D	E	E	G	B	G
24.	вершини	C	D	B	D	G	F	F	F	A	F	G	A
	вершини	A	A	E	B	C	C	D	E	E	G	B	G
25.	вершини	A	A	B	B	C	C	D	E	E	G	B	G
	вершини	B	C	D	C	D	F	E	F	G	F	F	A
26.	вершини	A	A	B	D	C	C	D	E	E	G	B	G
	вершини	B	C	C	B	D	F	E	F	E	F	F	A
27.	вершини	A	A	B	B	C	C	D	E	E	G	B	G
	вершини	A	E	C	D	D	F	E	F	G	F	E	A

n	№ ребра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
28.	вершини	A	A	B	B	C	C	D	E	E	G	B	G
	вершини	C	E	E	C	D	F	D	F	G	F	F	B
29.	вершини	A	A	B	B	C	C	D	E	E	G	B	G
	вершини	B	D	C	D	C	F	E	F	G	F	E	A
30.	вершини	A	A	B	B	C	C	D	E	E	G	B	G
	вершини	B	F	C	E	D	E	E	F	G	F	F	A
31.	вершини	A	A	B	E	C	C	E	E	A	G	B	G
	вершини	A	B	C	C	D	C	E	F	G	F	F	G
32.	вершини	A	A	B	B	C	C	D	F	E	G	B	G
	вершини	B	D	E	D	D	F	F	F	G	F	F	A
33.	вершини	A	A	B	E	C	C	D	E	E	G	B	G
	вершини	C	B	B	C	E	F	E	F	G	F	F	C
34.	вершини	G	E	C	A	D	F	E	F	G	D	E	B
	вершини	B	E	E	G	D	F	E	B	G	F	A	F
35.	вершини	B	B	C	C	D	F	E	A	G	F	D	A
	вершини	B	D	E	D	D	F	F	F	G	G	F	A
36.	вершини	B	C	C	B	D	F	E	F	E	D	F	A
	вершини	C	D	E	D	G	F	F	G	A	F	G	A
37.	вершини	A	A	B	B	C	C	D	E	E	G	B	G
	вершини	B	C	C	B	D	F	E	F	E	F	F	A
38.	вершини	C	B	B	C	E	F	E	F	G	F	F	C
	вершини	A	A	B	B	C	C	D	E	E	G	B	G
39.	вершини	B	E	E	G	D	F	E	A	G	D	F	F
	вершини	B	D	E	D	D	F	F	F	G	F	B	A
40.	вершини	B	E	E	G	D	F	E	F	G	F	F	B
	вершини	A	A	B	B	C	C	D	E	E	G	B	G

4. Для деякого графа, заданого матрицею суміжності (інцидентності) (табл. 8.4)⁵, виконати:

- а) побудувати геометричне зображення графа, визначити тип графа, записати список ребер і матрицю суміжності та інцидентності відповідно;

⁵ варіант обирати з розрахунку $h \cdot n$

- б) побудувати можливі види маршрутів на графі: маршрут та замкнений маршрут, ланцюг та простий ланцюг, цикл та простий цикл, ланцюг та цикл Ейлера, ланцюг та цикл Гамільтона;
- в) обчислити метричні характеристики графа: ексцентриситети вершин, радіус, діаметр та центр графа, його цикломатичне число.

Таблиця 8.4

n	матриця	n	матриця
1.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	2.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	4.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	6.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	8.	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	10.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

11.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	12.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
13.	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	14.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
15.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	16.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
17.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	18.	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
19.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	20.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
21.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	22.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

23.	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	24.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
25.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	26.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
27.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	28.	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
29.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	30.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
31.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	32.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
33.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	34.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

35.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	36.	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
37.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	38.	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
39.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	40.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Питання для самоперевірки

1. Що таке граф?
2. Які види графів бувають?
3. Що називається вершиною графа?
4. Що називається ребром графа?
5. Що таке підграф?
6. Які операції над графами відомі?
7. Які типи матриці пов'язані із графами?
8. Як побудувати матрицю суміжності?
9. Як побудувати матрицю інцидентності?
10. Що називається ступенем вершини?
11. Як побудувати матрицю відстаней?