

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №7

Тема: Булева алгебра. Логіка предикатів

Теоретичні відомості

Булевою функцією n незалежних змінних називається функція $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $n \geq 1$, в якій кожна змінна і сама функція набувають власних значень з множини $\{0, 1\}$, тобто $x_k \in \{0, 1\}$, $k = \overline{1, n}$; $y \in \{0, 1\}$.

Кортеж $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ конкретних значень булевих змінних називається *набором*, або *булевым вектором*. Якщо незалежні змінні розміщено у прямому порядку, тобто у вигляді $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, то набір називається *прямим*, а якщо їх розміщено у зворотному порядку, тобто у вигляді $x = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)$, то набір називається *зворотним*.

Областю визначення булевої функції n аргументів є сукупність 2^n булевих кортежів. Число різних булевих функцій є скінченне і дорівнює 2^{2^n} . За $n = 1$ число булевих функцій дорівнює 4, а за $n = 2$ – 16.

Існують такі *способи задання* булевих функцій.

1. **Табличний.** Функція задається у вигляді таблиці істинності.
2. **Графічний.** Функція задається у вигляді n -вимірною одиничного куба, у вершинах якого записано значення функції (у кружечках) та набори значень аргументів.

3. **Координатний** (картою Карно). У клітинках карти записуються значення функції (нулі зазвичай не вписують, їм відповідають порожні клітини). Значення змінної визначається відрізками (дужками) з позначенням цієї змінної. Наявність відрізка відповідає 1, а відсутність – 0.

4. **Числовий.** Функція задається у вигляді цілих десяткових (вісімкових, шістнадцяткових) чисел, які є еквівалентами тих наборів значень аргументів, на яких функція набуває значення 1.

5. **Аналітичний.** Функція задається у вигляді формули.

Булеві функції однієї та двох незалежних змінних прийнято називати *елементарними бульовими функціями*. Алгебра з такими логічними операціями називається *алгеброю логіки*, а булеві функції називаються ще *функціями алгебри логіки*.

Загальне число різних елементарних функцій дорівнює загальному числу функцій двох змінних, тобто $2^{2^2} = 16$.

Основними в алгебрі логіки є три логічні операції.

– *заперечення (інверсія)* – функція, яка набуває значення 1, коли $x = 0$, і значення 0 – за $x = 1$. Позначення: $y = \bar{x}$;

– *диз'юнкція (логічне додавання)* – функція, яка набуває значення 0 тоді й лише тоді, коли обидва аргументи дорівнюють нулю. Позначення: $y = x_1 + x_2$ або $y = x_1 \vee x_2$;

тоді й лише тоді, коли обидва аргументи дорівнюють одиниці. Позначається:
 $y = x_1 \cdot x_2$ або $y = x_1 \wedge x_2$.

Якщо операція містить один операнд, вона називається *одномісною*, або *унарною*, а якщо два, то – *двомісною*, або *бінарною*. Заперечення – це одномісна операція, а диз'юнкція та кон'юнкція – двомісні. Більш складні формули дістаємо за рахунок суперпозиції логічних формул, які, звичайно беруться у круглі дужки. Наприклад: $y = x_1 + x_2 (\bar{x}_1 + x_2)(x_1 + x_1 \bar{x}_2)$.

Елементарні функції однієї змінної.

Таблиця 1 – Таблиця істинності функції однієї змінної

x	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функції φ_0 та φ_3 – константи 0 та 1 відповідно. Позначення: $\varphi_0(x)=0$; $\varphi_3(x)=1$. Функція φ_1 набуває тих самих значень, що й x , тобто $\varphi_1(x)=x$. Функція $\varphi_2(x)=\bar{x}$, тобто це є логічна операція заперечення.

Елементарні функції двох змінних.

Таблиця 2 – Таблиця істинності функції двох змінних

x_1	x_2	ψ_0	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	ψ_{10}	ψ_{11}	ψ_{12}	ψ_{13}	ψ_{14}	ψ_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Операція						$\bar{x}_1$							x_1				
		0	•	←	x_1	•	x_2	⊕	+	↓	~	$\bar{x}_2$	+	$\bar{x}_1$	→	/	1
						x_2							$\bar{x}_2$				
	константа 0		диз'юнкція	заборона (заперечення імплікації)				додавання за модулем 2	кон'юнкція	стрілка Пірса (функція Вебба)	еквівалентність				імплікація	штрих Шеффера	константа 1

Формулою алгебри логіки або логічним виразом називається скінчена послідовність булевих змінних та функцій, пов'язаних знаками логічних операцій та круглими дужками.

Функція алгебри логіки – це рівність, у лівій частині якої стоїть булева змінна, а у правій – логічний вираз. Отже, функція алгебри логіки визначається формулою.

При обчислюванні логічних виразів дотримуються такого пріоритету операцій: насамперед обчислюються функції, потім заперечення, після чого логічне множення і, врешті, логічне додавання. Вирази, які стоять у дужках, обчислюються в першу чергу. Інші операції мають найменший пріоритет. Порядок їхнього виконання визначається круглими дужками.

Функції, які зводяться до залежності від меншого числа змінних, називаються *виродженими*, а функції, які суттєво залежать від усіх змінних, є *невиродженими*.

Функція багатьох змінних $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається *функцією, яка зберігає константу 0*, якщо $f(0, 0, \dots, 0) = 0$.

Функція n змінних $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається *функцією, яка зберігає константу 1*, якщо $f(1, 1, \dots, 1) = 1$.

Логічна функція $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається *двоїстою* до функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо має місце рівність $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$.

Логічна функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається *самодвоїстою*, якщо $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$.

Функція багатьох змінних називається *монотонною*, якщо для будь-якої пари наборів значень її аргументів $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ та $(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$, які задовольняють нерівності $x''_i \geq x'_i$, $i = \overline{1, n}$, виконується нерівність

$$f(x''_1, x''_2, \dots, x''_n) \geq f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n).$$

Функція багатьох змінних називається *лінійною*, якщо її можна подати у вигляді многочлена

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus \dots \oplus c_n x_n,$$

де $c_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{0, n}$.

Система функцій алгебри логіки $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ називається *повною*, якщо кожна інша функція алгебри логіки може бути виражена за допомогою суперпозицій цих функцій. При цьому стверджують, що повна система функцій утворює *базис* у логічному просторі.

Мінімальним базисом є такий базис, вилучення з якого будь-якої функції порушує його повноту.

Теорема Поста-Яблонського. Для того щоб система функцій була повною, необхідно і достатньо, щоб вона містила в собі хоча б одну функцію: незберігаючу константу 0, незберігаючу константу 1, несамодвоїсту, немонотонну й нелінійну.

З теореми випливає, що таких функцій має бути п'ять. Але, через те що деякі функції мають одразу кілька потрібних властивостей, базис може складатися з меншого числа функцій.

Властивості функції	Функції									
	0	1	$\neg$	+	$\cdot$	/	$\downarrow$	$\rightarrow$	$\oplus$	$\leftarrow$
Незберігаюча 0		*	*			*	*	*		
Незберігаюча 1	*		*			*	*		*	*
Несамодвоїста	*	*		*	*	*	*	*	*	*
Немонотонна			*			*	*	*	*	*
Нелінійна				*	*	*	*	*		*

З таблиці видно, що повними системами функцій будуть: $\{\neg, +, \cdot\}$, $\{\neg, +\}$, $\{\neg, \cdot\}$, $\{/ \}$, $\{\downarrow\}$, $\{0, \rightarrow\}$ тощо. Так, наприклад, алгебра Буля побудована на системі функцій $\{\neg, +, \cdot\}$, а алгебра Жегалкіна використовує базис $\{1, \cdot, \oplus\}$.

Булевою алгеброю називається множина логічних функцій з операціями диз'юнкція, кон'юнкція та заперечення, – тобто алгебра, базисом якої є система функцій $\{\neg, +, \cdot\}$.

Операції булевої алгебри звичайно називають *булевими операціями*, а функції – *булевими функціями*.

Розглянемо тепер **основні закони булевих операцій**:

1) комутативний (для диз'юнкції та кон'юнкції):

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1, \quad x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1;$$

2) асоціативний:

$$x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3, \quad x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3;$$

3) дистрибутивний:

$$x_1 \cdot (x_2 + x_3) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 \text{ – перший дистрибутивний закон};$$

$$x_1 + (x_2 \cdot x_3) = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3) \text{ – другий дистрибутивний закон};$$

4) ідемпотентний:

$$x + x = x, \quad x \cdot x = x;$$

5) інверсний (формули де Моргана):

$$\overline{x_1 + x_2} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2, \quad \overline{x_1 \cdot x_2} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2;$$

6) закон вилученого третього (для диз'юнкції) і закон суперечності (для кон'юнкції):

$$x + \bar{x} = 1, \quad x \cdot \bar{x} = 0.$$

У булевій алгебрі мають місце такі властивості:

$$\bar{\bar{0}} = 1; \quad \bar{\bar{1}} = 0; \quad x + 0 = x; \quad x + 1 = 1; \quad x \cdot 0 = 0; \quad x \cdot 1 = x; \quad \bar{\bar{x}} = x.$$

Решта функцій двох змінних логіки виражаються через базис булевої алгебри в такий спосіб:

$$x_1 \rightarrow x_2 = \bar{x}_1 + x_2; \quad x_1 / x_2 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2; \quad x_1 \oplus x_2 = x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2;$$

$$x_1 \leftarrow x_2 = x_1 \cdot \bar{x}_2; \quad x_1 \downarrow x_2 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2; \quad x_1 \sim x_2 = x_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2.$$

Приклад 1 Спростити: $((x_1 \downarrow x_2) / x_3) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_3)$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} & \left((x_1 \downarrow x_2) / x_3 \right) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_3) = \left((\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2) / x_3 \right) \rightarrow (\bar{x}_1 + x_3) = \\ & = \left(\overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_3} \right) \rightarrow (\bar{x}_1 + x_3) = \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_3} + \bar{x}_1 + x_3 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 + x_3 = \\ & = \bar{x}_1 + x_3 (1 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2) = \bar{x}_1 + x_3. \end{aligned}$$

Елементарною диз'юнкцією (кон'юнкцією) називається диз'юнкція (кон'юнкція) скінченного числа булевих змінних, у якій кожна змінна зустрічається не більше одного разу в прямому чи інверсному вигляді.

Диз'юнктивною нормальною формою ДНФ (кон'юнктивною нормальною формою КНФ) називається формула, яка містить диз'юнкцію (кон'юнкцію) скінченного числа різних елементарних кон'юнкцій (диз'юнкцій).

ДНФ (КНФ) називається досконалою і позначається ДДНФ (ДКНФ), якщо в кожній її елементарній кон'юнкції (диз'юнкції) подано всі змінні.

Для того щоб **привести формулу до ДДНФ**, потрібно:

- за допомогою законів та властивостей булевої алгебри привести її до ДНФ;
- якщо в елементарній кон'юнкції не міститься змінної x_i із загальної кількості змінних, які входять до даної формули, додати до цієї кон'юнкції співмножник $x_i + \bar{x}_i$ і розкрити дужки;
- з однакових елементарних кон'юнкцій вилучити всі, окрім однієї або
- скласти таблицю істинності висловлення;
- для кожного набору значень змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, на якому функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дорівнює 1, виписати кон'юнкції всіх змінних; над тими змінними, які на цьому наборі дорівнюють 0, ставляться заперечення;
- всі такі кон'юнкції з'єднати знаком диз'юнкції.

Приклад 2

1 спосіб.

$$\begin{aligned} x_1 x_2 + \bar{x}_3 &= x_1 x_2 (x_3 + \bar{x}_3) + (x_1 + \bar{x}_1)(x_2 + \bar{x}_2) \bar{x}_3 = \\ &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 = \\ &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3. \end{aligned}$$

2 спосіб.

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_3$	$x_1 x_2$	$x_1 x_2 + \bar{x}_3$	ДДНФ	
0	0	0	1	0	1	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	∨
1	0	0	1	0	1	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	
0	1	0	1	0	1	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$	
0	0	1	0	0	0		
1	1	0	1	1	1	$x_1 x_2 \bar{x}_3$	
1	0	1	0	0	0		
0	1	1	0	0	0		
1	1	1	0	1	1	$x_1 x_2 x_3$	

Для того щоб **привести формулу до ДКНФ**, доцільно спочатку привести її до ДНФ, а потім від ДНФ перейти до КНФ в такий спосіб.

Нехай ДНФ має вигляд

$$f = c_1 + c_2 + \dots + c_m,$$

де c_i – елементарні кон'юнкції, $i = \overline{1, m}$.

Формулу $\overline{c_1 + c_2 + \dots + c_m}$ приведемо до ДНФ $k_1 + k_2 + \dots + k_l$, де k_i – елементарні кон'юнкції. Тоді

$$\overline{c_1 + c_2 + \dots + c_m} = \overline{k_1 + k_2 + \dots + k_l} = \overline{k_1} \cdot \overline{k_2} \cdot \dots \cdot \overline{k_l}.$$

Застосовуючи правило де Моргана, перетворимо елементарні кон'юнкції $\overline{k_i}$ на елементарні диз'юнкції D_i , де $i = \overline{1, l}$. Отже, дістанемо КНФ

$$f = D_1 \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_l.$$

І, врешті, використовуючи закон суперечності та другий дистрибутивний закон, зробимо перехід від КНФ до ДКНФ.

Або

- скласти таблицю істинності висловлення;
- для кожного набору значень змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, на якому функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дорівнює 0, виписати диз'юнкції всіх змінних; над тими змінними, які на цьому наборі дорівнюють 1, ставляться заперечення;
- всі такі диз'юнкції з'єднати знаком кон'юнкції.

Приклад 3

1 спосіб. $\overline{x_1 x_2 x_3} \cdot (x_1 x_2 \rightarrow x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3) = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (\overline{x_1 x_2} + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3) =$
 $= (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3) = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_1) \times$
 $\times (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2) =$
 $= (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3).$

2 спосіб.

Введемо наступні позначення: $f_1 = x_1 x_2$, $f_2 = x_1 x_2 x_3$, $f_3 = \overline{x_1 x_2 x_3}$, $f_4 = \bar{x}_2$, $f_5 = \bar{x}_3$, $f_6 = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$, $f_7 = x_1 x_2 \rightarrow x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$, $f_8 = \overline{x_1 x_2 x_3} \cdot (x_1 x_2 \rightarrow x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3)$ та складемо таблицю істинності.

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	ДКНФ	
0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	$\wedge$	
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1		
0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1		
0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1		
1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0		$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3$
1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1		
0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1		
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0		$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$

Елементарна диз'юнкція (кон'юнкція), яка містить усі змінні, називається *конституентою нуля (одиниці)*. Наприклад, якщо загальна кількість змінних $n = 3$, то $\bar{x}_1 + x_2 + x_3$ – конституента нуля, а $x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$ – конституента одиниці.

Вочевидь, що конституента нуля перетворюється на нуль лише за одного набору значень змінних. Аналогічно, конституента одиниці перетворюється на одиницю також лише за одного набору. Наприклад, конституенті одиниці $x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$ відповідає набір (1, 0, 1).

Оскільки для заданої булевої функції її ДДНФ являє собою диз'юнкцію конституент одиниці, а її ДКНФ – це кон'юнкція конституент нуля, то дана функція перетворюється на одиницю чи нуль лише за відповідних цим конституентам наборів значень змінних. Справедливе є і зворотне твердження.

Це дозволяє за заданою таблицею істинності булевої функції одразу записати її досконалі нормальні форми і, навпаки, за заданою ДНФ – скласти таблицю істинності.

Приклад 4 Для функції, заданої власною ДКНФ $y = (x_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)$, скласти таблицю істинності.

Розв'язання.

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Алгеброю Жегалкіна називається множина логічних функцій з операціями кон'юнкція, додавання за модулем 2 і константа 1, тобто алгебра, базисом якої є система функцій $\{1, \cdot, \oplus\}$.

Подамо **основні закони** цієї алгебри:

1) комутативний:

$$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1,$$

$$x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1;$$

2) асоціативний:

$$x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3,$$

$$x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3;$$

3) дистрибутивний:

$$x_1 \cdot (x_2 \oplus x_3) = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot x_3;$$

4) ідемпотентний:

$$x \cdot x = x;$$

5) закон приведення подібних членів:

$$x \oplus x = 0.$$

В алгебрі Жегалкіна мають місце такі властивості:

$$x \oplus 0 = x;$$

$$x \cdot 0 = 0;$$

$$x \cdot 1 = x.$$

Решта операцій алгебри логіки виражаються через базис цієї алгебри в такий спосіб:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x \oplus 1; & x_1 + x_2 &= x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \cdot x_2; & x_1 \sim x_2 &= 1 \oplus x_1 \oplus x_2; \\ x_1 \rightarrow x_2 &= 1 \oplus x_1 \oplus x_1 \cdot x_2; & & & x_1 \leftarrow x_2 &= x_1 \oplus x_1 \cdot x_2; \\ x_1 \downarrow x_2 &= 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \cdot x_2; & & & x_1 / x_2 &= 1 \oplus x_1 \cdot x_2.\end{aligned}$$

Функція алгебри Жегалкіна, подана у вигляді суми за модулем 2 добутків незалежних змінних, називається *канонічним многочленом*, або *поліномом Жегалкіна*.

Наприклад, $y = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \cdot x_2$ – поліном Жегалкіна.

Лінійна функція

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus \dots \oplus c_n x_n,$$

де $c_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{0, n}$, є окремим випадком полінома Жегалкіна.

Якщо булеву функцію задано у вигляді ДДНФ, то для здобуття многочлена Жегалкіна треба: знак «+» замінити знаком « $\oplus$ », заперечення $\bar{x}$ замінити на вираз $x \oplus 1$, розкрити дужки і зробити всі можливі спрощення.

Приклад 5

$$\begin{aligned}x_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 &= x_1 \cdot x_2 \oplus (x_1 \oplus 1) \cdot (x_2 \oplus 1) = \\ &= x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2.\end{aligned}$$

Функція Вебба:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x \downarrow x; & x_1 + x_2 &= (x_1 \downarrow x_2) \downarrow 0; & 1 &= (x \downarrow \bar{x}) \downarrow 0; \\ 0 &= x \downarrow \bar{x}; & x_1 \cdot x_2 &= (x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2); & \bar{x} &= x \downarrow 0.\end{aligned}$$

Функція Шеффера:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x / x; & x_1 + x_2 &= (x_1 / 1) / (x_2 / 1); & 1 &= x / \bar{x}; \\ 0 &= (x / \bar{x}) / 1; & x_1 \cdot x_2 &= (x_1 / x_2) / 1; & \bar{x} &= x / 1.\end{aligned}$$

Одна й та сама функція алгебри логіки може бути подана в певному базисі по-різному. Тому, наприклад, при побудові економних схем цифрових автоматів виникає проблема подання логічних функцій у мінімальній формі.

Приклад 6 Нехай $f = (1111\ 1110\ 0001\ 0011)$. Очевидно, що f є функцією чотирьох аргументів. Для зручності випишемо таблицю значень функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на наборах 0 та 1. Для кожного «одиничного» набору функції f вкажемо відповідний кон'юнкт, а для кожного «нульового» набору f – відповідний диз'юнкт.

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$	кон'юнкт/ диз'юнкт
0	0	0	0	1	$\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_4$
0	0	0	1	1	$\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_4$
0	0	1	0	1	$\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4$
0	0	1	1	1	$\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4$
0	1	0	0	1	$\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_4$
0	1	0	1	1	$\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_4$
0	1	1	0	1	$x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_4$

0	1	1	1	0	$x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4$
1	0	0	0	0	$\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$
1	0	0	1	0	$\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4$
1	0	1	0	0	$\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4$
1	0	1	1	1	$x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4$
1	1	0	0	0	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4$
1	1	0	1	0	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4$
1	1	1	0	1	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4$
1	1	1	1	1	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$

Тоді,

ДДНФ: $(\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_4) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_4) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4) \vee$
 $\vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge \bar{x}_4) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_4) \vee$
 $\vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4);$

ДКНФ: $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge$
 $\wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4).$

Приклад 7 Бульову функцію задано формулою алгебри логіки

$$\varphi(x, y, z) = (x \vee y) \rightarrow y \oplus z.$$

Треба задати цю функцію:

- 1) таблицею істинності;
- 2) вектором значень;
- 3) номерами наборів, на яких $\varphi = 1$;
- 4) графічно;
- 5) ДДНФ та ДКНФ.

Розв'язання.

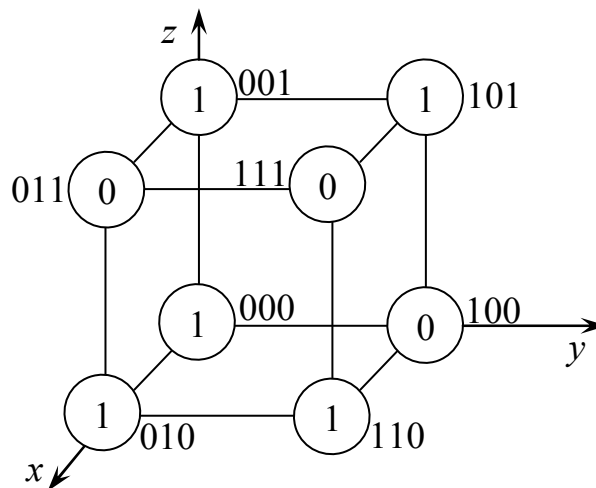
- 1) Складемо таблицю істинності:

x	y	z	$x \vee y$	$y \oplus z$	φ
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

- 2) $\varphi(x, y, z) = (11100110);$

- 3) $\varphi = \{0; 1; 2; 5; 6\};$

- 4) графічно:



5) ДДНФ:

$$(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z});$$

$$\text{ДКНФ: } (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

Приклад 8 Перевірити на повноту систему булевих функцій

$$\{xy \vee xz \vee yz; x \oplus y \oplus z; 1\}.$$

Розв'язання.

Перевірити на повноту цю систему функцій можна за допомогою таблиці Поста. Щоб скласти таблицю Поста, слід з'ясувати, чи належить функція з даної множини до кожного з класів Поста.

Складемо таблицю істинності функції $\varphi_1(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$:

x	y	z	xy	xz	yz	φ_1
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

За таблицею встановлюємо, що функція $\varphi_1(x, y, z)$ зберігає константу 0, зберігає константу 1 і є самодвоїстою, тому що кожне значення функції є запереченням симетричного до нього значення. Функція є монотонною, тому що її зображено формулою бульової алгебри без заперечень $\bar{x}$.

Щоб знайти многочлен Жегалкіна функції φ_1 , складемо ДДНФ і замінимо кожну диз'юнкцію на суму за модулем 2, а інверсію $\bar{x} = x \oplus 1$. Тоді

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz = (x \oplus 1)yz \oplus x(y \oplus 1)z \oplus xy(z \oplus 1) \oplus xyz = \\ &= xyz \oplus yz \oplus xyz \oplus xz \oplus xyz \oplus xy \oplus xyz = xy \oplus xz \oplus yz. \end{aligned}$$

Оскільки многочлен Жегалкіна функції містить кон'юнкції змінних, доходимо висновку, що функція є нелінійною.

Складемо таблицю істинності функції $\varphi_2(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$:

x	y	z	φ_2
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

За таблицею встановлюємо, що функція φ_2 зберігає константу 0, не зберігає константу 1 і є несамоодвією.

З огляду на те, що $100 \leq 111$, але $\varphi_2(1, 0, 0) > \varphi_2(1, 1, 1)$, доходимо висновку, що функція є немонотонною. Функція $\varphi_2 = x \oplus y \oplus z$ є лінійною, оскільки задається многочленом Жегалкіна, який не містить кон'юнкцій змінних.

Функція $\varphi_3 = 1$ не зберігає константу 0, є несамоодвією, монотонною й лінійною.

За результатами досліджень складемо таблицю Поста:

Класи Поста Функції	P_0	P_1	S	L	M
$\varphi_1 = xy \vee xz \vee yz$	+	+	+	–	+
$\varphi_2 = x \oplus y \oplus z$	+	–	–	+	–
$\varphi_3 = 1$	–	+	–	+	+

де P_0 – клас функцій, які зберігають константу 0; P_1 – клас функцій, які зберігають константу 1; S – клас самоодвістих функцій; L – клас лінійних функцій; M – клас монотонних функцій.

Оскільки в кожному стовпці таблиці є знак мінус, то для кожного класу Поста в даній системі є хоча б одна функція, яка до цього класу Поста не належить. За теоремою Поста, така система булевих функцій є функціонально повною.

Мінімальною ДНФ (КНФ) булевої функції називається така ДНФ (КНФ), котра містить найменше число елементарних кон'юнкцій (диз'юнкцій) та змінних у них стосовно решти ДНФ (КНФ), які представляють дану функцію.

В інженерній практиці найчастіше мінімізується число змінних (число літер) у ДНФ (КНФ).

Нині розроблено чималу кількість методів (способів, прийомів) мінімізації в класі нормальних форм. Нижче розглянемо лише один з них – метод Квайна-Мак-Класкі мінімізації ДДНФ, який ґрунтується на систематичному застосовуванні операцій склеювання та поглинання:

$$k \cdot x + k \cdot \bar{x} = k, \quad k + k \cdot x = k, \quad k + k \cdot \bar{x} = k$$

де k – елементарна кон'юнкція.

Бульова функція $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається *імплікантою* функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо вона перетворюється на одиницю при наборі змінних, на якому сама функція також дорівнює одиниці. Коротше кажучи, якщо $g = 1$, то й $f = 1$.

З означення випливає, що кожна конституента одиниці, яка входить до складу ДДНФ, або їхня диз'юнкція є імплікантою певної булевої функції.

Імпліканта g називається *простою*, якщо жодна її частина не може бути імплікантою функції f .

Приклад 9 Для функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3$ знайти всі імпліканти.

Розв'язання.

x_1	x_2	x_3	f	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1

$$g_1 = x_1x_2x_3; \quad g_2 = x_1x_2\bar{x}_3; \quad g_3 = \bar{x}_1x_2x_3;$$

$$g_4 = x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3 = x_1x_2; \quad g_5 = \bar{x}_1x_2x_3 + x_1x_2x_3 = x_2x_3;$$

$$g_6 = \bar{x}_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3; \quad g_7 = x_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3 = f.$$

Імпліканти $g_4 = x_1x_2$ та $g_5 = x_2x_3$ є простими, решта – ні.

Булеву функцію, зображену за допомогою простих імплікант, називатимемо *скороченою ДНФ*. Пошук мінімальної ДНФ здійснюється серед скорочених ДНФ шляхом їхнього простого перебирання. У розглянутому прикладі скорочена ДНФ має вигляд

$$f(x_1, x_2, x_3) = g_4 + g_5 = x_1x_2 + x_2x_3.$$

Оскільки інших скорочених ДНФ немає, то ця форма й буде мінімальною.

Метод Квайна-Мак-Класкі виконується в три етапи:

- 2) знаходження простих імплікант;
- 3) пошук скорочених ДНФ;
- 4) вибір з цих форм мінімальної.

Нехай треба мінімізувати логічну функцію, задану таблицею істинності

x_1	x_2	x_3	x_4	f	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0

0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Перший етап: знаходження простих імплікант. На першому кроці цього етапу слід виписати з таблиці істинності конституенти одиниці, розміщуючи їх за групами (див. 1-й крок в таблиці). Номер групи N відповідає кількості одиниць у конститuentі; N може набувати значення від 0 до n , де n – загальна кількість змінних.

На другому кроці цього етапу виконаємо поелементне порівняння конститuent (початкових імплікант) сусідніх груп, тобто здійснимо склеювання. Конститuenta 1-ї групи (0100) склеюється за змінною x_4 з конститuentoю 2-ї групи (0101) і за змінною x_1 – з конститuentoю 2-ї групи (1100). Конститuenta 2-ї групи (0011) склеюється за змінною x_2 з конститuentoю 3-ї групи (0111) і за змінною x_1 – з конститuentoю (1011) цієї ж групи тощо.

Результат склеювання, тобто загальну частину конститuent, запишемо в наступний стовпець, роблячи прочерк «—» на місці вилученої змінної (2-й крок в таблиці). Конститuentи, які брали участь в операції склеювання, позначимо символом «*».

1-й крок					
№ гр.	*	x_1	x_2	x_3	x_4
1	*	0	1	0	0
2	*	0	0	1	1
	*	0	1	0	1
	*	1	0	0	1
	*	1	1	0	0
3	*	0	1	1	1
	*	1	0	1	1
	*	1	1	0	1

2-й крок					
№ гр.	*	x_1	x_2	x_3	x_4
1	*	0	1	0	—
	*	—	1	0	0
2		0	—	1	1
		—	0	1	1
		0	1	—	1
	*	—	1	0	1
		1	0	—	1
		1	—	0	1
	*	1	1	0	—

3-й крок					
№ гр.	*	x_1	x_2	x_3	x_4
1		—	1	0	—
Прості імпліканти					
	—	1	0	—	
	0	—	1	1	
	—	0	1	1	
	0	1	—	1	
	1	0	—	1	
	1	—	0	1	

Якщо початкова імпліканта (1-й крок) мала n змінних (розрядів), то кожна імпліканта 2-го кроку має $n - 1$ змінну. Імпліканти 2-го кроку знову піддаються операції склеювання. При цьому склеюванню підлягають імпліканти сусідніх груп, в яких в одній і тій самій позиції стоїть символ «—». Після цього кроку дістаємо імпліканти, які містять $n - 2$ змінних і т.і., допоки подальше склеювання стає неможливим.

Виписавши тепер з усіх кроків непозначені символом «*» імпліканти, дістанемо сукупність простих імплікант.

Другий етап: пошук скорочених ДНФ. З цією метою складемо імплікантну таблицю.

Конституенти Прості імпліканти	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$	$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4$	$x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$	$x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$
$g_1 = x_2 \bar{x}_3$	⊛		*		⊛			*
$g_2 = \bar{x}_1 x_3 x_4$		*				*		
$g_3 = \bar{x}_2 x_3 x_4$		*					*	
$g_4 = \bar{x}_1 x_2 x_4$			*			*		
$g_5 = x_1 \bar{x}_2 x_4$				*			*	
$g_6 = x_1 \bar{x}_3 x_4$				*				*

Кожен рядок цієї таблиці відповідає простій імпліканті, а кожен стовпець – початковій імпліканті (конституенті). Якщо проста імпліканта поглинає (накриває) конституенту одиниці, тобто є її частиною, то відповідна клітина матриці позначається символом «*». Потім відшукаємо стовпці імплікантної таблиці, які мають лише по одній позначці. Такі позначки обводимо кружечком. Відповідні цим позначкам прості імпліканти називаються *базисними* і становлять так зване ядро бульової функції, яке неодмінно входить до скороченої ДНФ.

Після цього розглянемо різні варіанти вибору сукупності простих імплікант, які спільно накривають позначками інші клітини рядка імплікантної таблиці. Ці імпліканти разом з ядром утворюють скорочену ДНФ.

З таблиці видно, що скороченими ДНФ для заданої функції f будуть:

- 1) $f = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6$;
- 2) $f = g_1 + g_2 + g_3 + g_6$;
- 3) $f = g_1 + g_2 + g_5$;
- 4) $f = g_1 + g_3 + g_4 + g_5$;
- 5) $f = g_1 + g_3 + g_4 + g_6$.

Третій етап: вибір мінімальної форми. Серед цих скорочених ДНФ обирається та, яка задовольняє критерію мінімальності. При цьому враховуються економічні та технічні чинники її реалізації в конкретному цифровому пристрої. У нашому прикладі мінімальна ДНФ має вигляд

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = g_1 + g_2 + g_5 = x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_4.$$

Якщо винести за дужки x_4 , здобудемо більш простий вираз:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = g_1 + g_2 + g_5 = x_2 \bar{x}_3 + x_4 (\bar{x}_1 x_3 + x_1 \bar{x}_2),$$

який містить менше число змінних (літер). Така форма подання функції називається *дужковою*.

Предикатом називається твердження, яке містить змінні, конкретні значення яких не вказані. При одних значеннях змінних твердження може бути істинним висловленням, при інших – хибним.

Приклад 10

$$\begin{aligned}P(x): 3 + x = 5, \\ Q(x, y, z): x^2 + y^2 \geq z^2, \\ R(x, y): x^2 + y^2 \geq 0, \\ S(x): -1 \leq \sin x \leq 1.\end{aligned}$$

Більш строго: n -місний предикат – це функція $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ від n змінних, які приймають значення з деяких заданих предметних областей $x_1 \in B_1, x_2 \in B_2, \dots, x_n \in B_n$, а функція може приймати два значення: $E = \{0; 1\} = \{\text{істина, хиба}\}$.

Поняття предиката поєднує в одно поняття висловлення, відношення, функції.

Наприклад, висловлення «тварина x їсть їжу y », можна трактувати як двомісний предикат $P(x, y)$, який в залежності від значення аргументів x та y приймає значення 0 і 1. Наприклад: $x = \{\text{заєць}\}, y = \{\text{морква}\}$. $P(x, y) = 1$, так як висловлювання «тварина заєць (x) їсть моркву (y)» істинне. Якщо ж $x = \{\text{вовк}\}, y = \{\text{морква}\}$, то $P(x, y) = 0$, так як висловлювання «тварина вовк (x) їсть моркву (y)» хибне.

Наприклад, відношення R «натуральне число x ділиться націло на натуральне число y » можна задати як 2-місний предикат $P(x, y)$, який в залежності від того, які значення x і y , приймає значення 0 або 1.

Так, $P(12, 3) = 1$ тому, що «12 ділиться націло на 3» – істина; $P(13, 3) = 0$ тому, що «13 ділиться націло на 3» – хиба.

Наприклад, функцію $y = x^2$ можна також задати як двомісний предикат $P(x, y)$, який приймає значення 0, якщо $y \neq x^2$, і 1, якщо $y = x^2$, наприклад: $P(3, 9) = 1$; $P(3, 10) = 0$.

З простих предикатів, об'єднуючи їх логічними зв'язками типу « $\neg, \wedge, \vee$ », можна утворювати складні предикати – отримаємо логіку предикатів, аналогічну логіці висловлювань.

В логіці предикатів використовують дві спеціальні операції, які називають **кванторами**. За допомогою цих операцій, по-перше, пропозиційні форми можна перетворювати у висловлення, і по-друге, теорія предикатів стає значно гнучкішою, глибшою і багатшою, аніж теорія висловлень¹.

Найпопулярнішими і найбільш часто вживаними виразами у математиці є фрази або формулювання типу «для всіх» та «існує». Вони входять до більшості тверджень, висновків, лем або теорем при проведенні математичних доведень.

Приклад 11 Предикат «для всіх дійсних чисел x виконується рівність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ », «для заданих натуральних a і b завжди існує натуральне

¹ Саме тому логіку предикатів іноді називають **теорією квантифікації**.

число d , яке є більшим за числа a і b », «для всіх натуральних n справедливе твердження: якщо n ділиться націло на 6 і на 15, то n ділиться на 30» тощо.

Поняття, що відповідає словам «для всіх», лежить в основі квантора загальності. Нехай $P(x)$ – предикат на множині M . Тоді **квантор загальності** – це операція, що ставить у відповідність $P(x)$ висловлення «для всіх x з M $P(x)$ істинно». Для позначення цієї операції використовують знак $\forall$, який і називають квантором загальності. Останнє висловлення у математичній логіці записують так: $\forall x P(x)$ (читається: «для всіх x P від x »).

Існує й інший квантор, що є у певному розумінні є двоїстим до квантора загальності і називається **квантором існування**. Позначається він знаком $\exists$. Якщо $Q(x)$ – деякий предикат на множині M , то висловлення «існує в множині M елемент x такий, що $Q(x)$ істинно» записується у вигляді $\exists x Q(x)$ і читається скорочено «існує такий x , що Q від x » або «є такий x , що Q від x ».

Походження обраних позначень пояснюється тим, що символ $\forall$ є перевернутою прописною першою літерою німецького слова «alle» або англійського слова «all», що перекладається «усі». А символ $\exists$ відповідає першій літері слів «existieren» (нім.) або «exist» (англ.) – існувати.

Перехід від $P(x)$ до $\forall x P(x)$ або $\exists x P(x)$ називається **зв'язуванням змінної x** , або **навішуванням квантора на змінну x** . Навішування квантора зменшує місткість предиката на одиницю. Предикат $P(x, y, z)$ – тримісний; $\forall x P(x, y, z)$ – двомісний.

Предикат називається **здійсненням**, якщо на деякому наборі своїх змінних він приймає значення 1 – істина, в протилежному випадку він **нездійсненням**.

Приклад 12 З'ясувати місткість й тип предиката $P = \forall x \exists y (zy = x^2)$, кожен аргумент приймає значення з множини Z цілих чисел.

Розв'язування.

З того, що на тримісний предикат $P(x, y, z) = \forall x \exists y (zy = x^2)$ навішено два квантори (на x і y), то предикат $P = \forall x \exists y (zy = x^2)$ – одномісний – $P(z)$.

Щоб з'ясувати, чи є предикат $P(z)$ здійсненням, достатньо знайти хоча б одне z , при якому він дорівнює 1.

В якості такого z візьмемо $z = 1$, отримаємо $P(1) = \forall x \exists y (1 \cdot y = x^2) = 1$ для кожного $x \in Z$ $\exists y$ – на параболі $y = x^2$.

Якщо $D(x)$ – предикат, то висловлення $\forall x D(x)$ істинно тоді й тільки тоді, коли висловлення $D(x)$ істинно для будь-якого x . Заперечення $\forall x D(x)$ може бути записано як $\neg \forall x D(x)$.

Щоб довести хибність висловлення $\forall x D(x)$, достатньо знайти тільки одне значення x , для якого $\forall x D(x)$ хибно (або, що рівносильне $\neg D(x)$ – істино). Таким чином, $\forall x D(x)$ хибно тоді й тільки тоді, коли $\exists x(\neg D(x))$.

Для утворення заперечення з навішеним квантором загальності треба замінити $\forall x$ на $\exists x$ й взяти заперечення предиката, наступного за квантором².

Універсальна конкретизація. З істинності $\forall x D(x)$ випливає істинність $D(a)$ для довільного a з універсуму.

Універсальне узагальнення. Якщо довільне a з універсуму забезпечує істинність $D(a)$, робимо висновок, що $\forall x D(x)$ істинно.

Екзистенціальна конкретизація. З істинності $\exists x D(x)$ випливає, що існує конкретне b таке, що $D(b)$ істинно.

Екзистенціальне узагальнення. З існування конкретного c з універсуму, для якого $D(c)$ істинно, можна зробити висновок, що $\exists x D(x)$.

Приклад 13

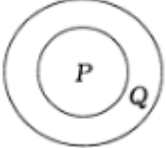
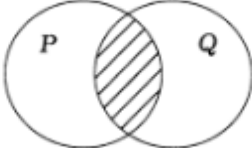
а) Якщо $p(x)$ – твердження « x – студент», а твердження $c(x)$ – « x навчається старанно», то твердження $\forall x (p(x) \rightarrow c(x))$ може бути інтерпретовано як «всі студенти навчаються старанно».

б) Якщо $p(x)$ – твердження « x – слон», а твердження $c(x)$ – « x надає перевагу арахісу в шоколаді», то твердження $\exists x (p(x) \wedge c(x))$ може бути інтерпретовано як «деякі слони надають перевагу арахісу в шоколаді».

в) Твердження «всі люди смертні» логічно може бути записано так: $\forall x (p(x) \rightarrow c(x))$, де $p(x)$ – « x – чоловік», а твердження $c(x)$ – « x смертний».

Для неформальної перевірки правильності умовиводу (силогізму³), які включають твердження типу «для всіх» або «для деякого», використовують діаграми Ейлера, які складаються з кругів, що зображають множини (табл. 1)

Таблиця 1

Твердження «всі $p \in q$ »	Твердження «деякі $p \in q$ »
	

Для перевірки умовиводу необхідно спробувати побудувати діаграму Ейлера, в якій посилки істинні, а висновок хибний. Якщо така побудова неможлива, то умовивід може бути вірним.

² Заперечення висловлення, яке містить більше одного квантора, здійснюється шляхом послідовного розглядання кожного квантора, починаючи з першого.

³ **Силогізм** – це вид дедуктивного умовиводу, в якому висновок випливає з декількох посилок.

Приклад 14 Розглянемо умовивід:

1 посилка

Всі студенти ВНЗ видатні

2 посилка

Всі видатні люди – вчені

висновок

Всі студенти ВНЗ – вчені

Побудуємо відповідну діаграму (рис. 7.1). Зверніть увагу на те, що поняття «видатні люди» є й в першій та другій посилці. Це поняття пов’язує посилки між собою. Обидві посилки можна зобразити на одній схемі.

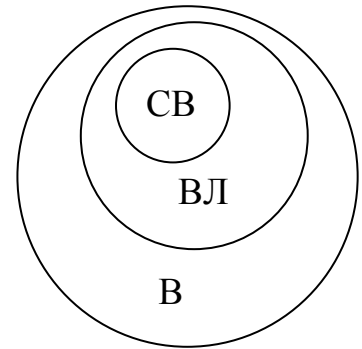


Рисунок 7.1

ЗАДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. Для булевої функції, заданої вектором значень (табл. 7.1)⁴:
 - побудувати ДДНФ і ДКНФ;
 - знайти мінімальну ДНФ методом Квайна – Мак-Класкі.

Таблиця 7.1

<i>n</i>	булева функція f	<i>n</i>	булева функція f
1.	(1110 0000 0111 1011)	2.	(1110 0000 0111 1010)
3.	(1100 0000 0111 1011)	4.	(1110 0000 0001 0111)
5.	(1100 0000 0111 0111)	6.	(1011 0000 0000 1101)
7.	(0111 0000 0000 1110)	8.	(1110 0000 0000 0111)
9.	(1010 0000 0111 1101)	10.	(1110 0000 0111 1100)
11.	(0000 1001 1011 1101)	12.	(0000 1001 1101 1011)
13.	(0000 0110 1110 0111)	14.	(0000 0111 0110 1110)
15.	(0000 1010 0111 1110)	16.	(0000 0110 0111 1110)
17.	(0000 0111 1101 1011)	18.	(0000 0111 1101 1110)
19.	(0000 0111 1100 1110)	20.	(0000 0111 1101 1010)
21.	(0000 0010 0111 1110)	22.	(0000 0010 1011 1101)
23.	(0000 0001 1101 1011)	24.	(0000 0001 1110 0111)
25.	(0000 0111 1011 1110)	26.	(0000 0001 1011 1101)
27.	(0000 0111 1011 1100)	28.	(0000 0111 1011 1101)
29.	(0000 0111 0111 1100)	30.	(0000 0111 1010 1110)
31.	(0000 0000 1110 0111)	32.	(0000 0001 0111 1110)
33.	(0000 0000 1011 1101)	34.	(0000 0000 1101 1011)
35.	(0000 0111 0111 1010)	36.	(0000 0000 0111 1110)
37.	(0000 0101 1011 1101)	38.	(0000 0101 1110 0111)
39.	(0000 0011 1101 1011)	40.	(0000 0011 1110 0111)

⁴ варіант обирати з розрахунку $h \cdot n$

2. Булеву функцію $f(x, y, z)$ задано формулою алгебри логіки (табл. 7.2)⁵. Треба задати цю функцію:

- таблицею істинності;
- вектором значень;
- номерами наборів, на яких $f = 1$;
- графічно;
- ДДНФ та ДКНФ.

Таблиця 7.2

n	булева функція f	n	булева функція f
1.	$(x \rightarrow y) \wedge (y \leftarrow z)$	2.	$x \oplus (y \rightarrow z)$
3.	$(x \wedge y) \oplus (x \wedge z) \oplus (y \vee z)$	4.	$(x \vee \bar{y}) \oplus (y \rightarrow z)$
5.	$x \wedge y + x \wedge z \oplus y \wedge z$	6.	$(x \oplus y) \rightarrow y \wedge z$
7.	$x \wedge (x / y) \vee z$	8.	$(x \vee y) \wedge (y \oplus z)$
9.	$x \wedge y \rightarrow (z \leftarrow x)$	10.	$(x \rightarrow y) \oplus (y \vee z)$
11.	$x \vee \bar{y} \wedge z \oplus \bar{z}$	12.	$(x \downarrow y) \rightarrow (y \oplus z)$
13.	$(\bar{x} \wedge y \oplus z) \wedge (x \wedge z \rightarrow y)$	14.	$(x / y) \vee (y \rightarrow z)$
15.	$x \leftarrow (y \rightarrow z)$	16.	$(x \oplus y) \downarrow (y / z)$
17.	$(x \oplus y) + (y \downarrow z)$	18.	$(x \wedge y) \rightarrow (y \downarrow z)$
19.	$(x \downarrow y) / (y \downarrow z)$	20.	$(x / y) \downarrow (x \rightarrow z)$
21.	$x \vee y \oplus z$	22.	$x \rightarrow (y / z)$
23.	$x / (y \rightarrow z)$	24.	$x / z \rightarrow (y / z)$
25.	$(x \rightarrow y) \wedge (y \oplus z)$	26.	$(x \oplus y) \downarrow (y \vee z)$
27.	$(x \vee y) \oplus (x \wedge y)$	28.	$(x / y) \rightarrow (y \oplus z)$
29.	$(x \wedge y) \rightarrow (x \oplus z)$	30.	$(x \rightarrow y) \oplus (y \downarrow z)$
31.	$(\bar{x} \downarrow z) \leftarrow (x \sim y)$	32.	$(x \leftarrow y) \vee (y \downarrow z)$
33.	$x / (y \oplus z)$	34.	$(x \sim y) \oplus (y \leftarrow z)$
35.	$(x / y) \sim (y \downarrow z)$	36.	$(\bar{x} \wedge y) \leftarrow (y / z)$
37.	$(x \downarrow y) \leftarrow (y \oplus z)$	38.	$(x \sim y) / (x \leftarrow z)$
39.	$x + y \oplus \bar{z}$	40.	$\bar{x} \leftarrow (y \downarrow z)$

⁵ варіант обирати з розрахунку $h \cdot n$

3. Перевірити на повноту множини булевих функцій (табл. 7.3)⁶:

Таблиця 7.3

n	булева функція f
1.	$\{(x \wedge y) \rightarrow z; (x \oplus y) \sim (x \vee z); x \vee \bar{y}\}$
2.	$\{(x \vee y) \rightarrow z; (x \wedge y) \sim (x \vee z); x \wedge \bar{y}\}$
3.	$\{(x \wedge y) \leftarrow z; (x \sim y) \sim (x \vee z); x \oplus y\}$
4.	$\{(x \vee y) \leftarrow z; (x \sim y) \sim (x \wedge z); x \rightarrow y\}$
5.	$\{(x \rightarrow y) \vee z; (\bar{x} \oplus y) \sim (x \vee z); \bar{x} \rightarrow y\}$
6.	$\{(x \rightarrow y) \wedge z; (x \oplus y) \sim (\bar{x} \vee z); x \rightarrow \bar{y}\}$
7.	$\{(\bar{x} \rightarrow y) \vee z; (\bar{x} \oplus \bar{y}) \sim (x \vee z); \bar{x} \leftarrow y\}$
8.	$\{(\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \vee z; (\bar{x} \oplus y) \sim (\bar{x} \vee z); x \leftarrow \bar{y}\}$
9.	$\{(x \rightarrow y) \vee \bar{z}; (\bar{x} \oplus \bar{y}) \sim (\bar{x} \vee z); \bar{x} \sim y\}$
10.	$\{(\bar{x} \rightarrow y) \wedge z; (\bar{x} \oplus y) \sim (x \wedge z); x \oplus \bar{y}\}$
11.	$\{(x \rightarrow \bar{y}) \wedge z; (x \oplus y) \sim (\bar{x} \wedge z); \bar{x} \rightarrow \bar{y}\}$
12.	$\{(x \rightarrow y) \wedge \bar{z}; (\bar{x} \oplus y) \sim (\bar{x} \wedge z); \bar{x} \sim \bar{y}\}$
13.	$\{(\bar{x} \wedge y) \rightarrow z; (\bar{x} \oplus \bar{y}) \sim (\bar{x} \wedge z); \bar{x} \oplus \bar{y}\}$
14.	$\{(x \wedge y) \rightarrow \bar{z}; (\bar{x} \oplus \bar{y}) \sim (x \wedge z); \bar{x} \wedge \bar{y}\}$
15.	$\{(\bar{x} \vee y) \rightarrow z; (x \sim y) \oplus (x \vee z); \bar{x} \vee \bar{y}\}$
16.	$\{(x \rightarrow y) \vee \bar{z}; (\bar{x} \sim y) \oplus (x \vee z); (x \vee y) \wedge z\}$
17.	$\{(\bar{x} \vee y) \leftarrow z; (x \sim y) \oplus (\bar{x} \vee z); (x \wedge y) \vee z\}$
18.	$\{(x \vee y) \leftarrow z; (\bar{x} \sim y) \oplus (\bar{x} \vee z); x \vee y \vee z\}$
19.	$\{(\bar{x} \vee y) \leftarrow \bar{z}; (\bar{x} \sim \bar{y}) \oplus (x \vee z); x \wedge y \wedge z\}$
20.	$\{(\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \wedge z; (\bar{x} \sim \bar{y}) \oplus (\bar{x} \vee z); (x \vee y) \wedge \bar{z}\}$
21.	$\{(x \rightarrow \bar{y}) \wedge \bar{z}; (x \sim y) \oplus (x \wedge z); (x \wedge y) \vee \bar{z}\}$
22.	$\{(\bar{x} \rightarrow y) \wedge \bar{z}; (\bar{x} \sim y) \oplus (x \wedge z); \bar{x} \vee y \vee z\}$
23.	$\{(\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \vee z; (x \sim y) \oplus (\bar{x} \wedge z); \bar{x} \wedge y \wedge z\}$

⁶ варіант обирати з розрахунку $h \cdot n$

24.	$\{(x \rightarrow \bar{y}) \vee \bar{z}; (\bar{x} \sim y) \oplus (\bar{x} \wedge z); \bar{x} \vee y \vee z\}$
25.	$\{(\bar{x} \rightarrow y) \vee \bar{z}; (\bar{x} \sim \bar{y}) \oplus (x \wedge z); \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}\}$
26.	$\{(\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \wedge \bar{z}; (\bar{x} \sim \bar{y}) \oplus (\bar{x} \wedge z); \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z\}$
27.	$\{(\bar{x} \rightarrow \bar{y}) \vee \bar{z}; (x \sim y) \wedge (x \oplus z); \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}\}$
28.	$\{(\bar{x} \wedge y) \rightarrow \bar{z}; (\bar{x} \sim y) \wedge (x \oplus z); x \oplus y \oplus z\}$
29.	$\{(\bar{x} \vee y) \rightarrow \bar{z}; (x \sim y) \wedge (\bar{x} \oplus z); \bar{x} \oplus y \oplus z\}$
30.	$\{(\bar{x} \vee y) \leftarrow \bar{z}; (\bar{x} \sim y) \wedge (\bar{x} \oplus z); \bar{x} \oplus \bar{y} \oplus z\}$
31.	$\{(x \wedge \bar{y}) \leftarrow \bar{z}; (x \sim \bar{y}) \wedge (x \oplus z); x \oplus \bar{y} \oplus z\}$
32.	$\{(x \wedge y) \leftarrow z; (x \sim y) \wedge (x \oplus \bar{z}); \bar{x} \oplus \bar{y} \oplus \bar{z}\}$
33.	$\{(x \wedge \bar{y}) \rightarrow z; (x \oplus \bar{y}) \sim (x \vee z); \bar{x} \vee y\}$
34.	$\{(x \leftarrow \bar{y}) \wedge z; (x \vee \bar{y}) \sim (x \oplus z); \bar{x} \wedge y\}$
35.	$\{(\bar{x} \leftarrow y) \vee \bar{z}; (\bar{x} \wedge y) \sim (\bar{x} \oplus z); \bar{x} \vee \bar{y}\}$
36.	$\{(\bar{x} \leftarrow y) \wedge \bar{z}; (x \sim \bar{y}) \oplus (x \wedge z); (x \wedge \bar{y}) \vee z\}$
37.	$\{(x \vee y) \leftarrow \bar{z}; (x \oplus y) \sim (x \vee \bar{z}); x \wedge y\}$
38.	$\{(x \leftarrow \bar{y}) \vee \bar{z}; (x \sim \bar{y}) \oplus (x \wedge \bar{z}); (x \wedge \bar{y}) \vee z\}$
39.	$\{(\bar{x} \rightarrow y) \vee z; (x \vee \bar{y}) \sim (x \oplus \bar{z}); x \leftarrow z\}$
40.	$\{(\bar{x} \vee y) \leftarrow \bar{z}; (x \wedge \bar{y}) \sim (x \oplus z); x \oplus \bar{y}\}$

4. Нехай $N(x)$ – « x – натуральне число», $C(x)$ – « x – ціле число», $P(x)$ – « x – просте число», $E(x)$ – « x – парне число», $O(x)$ – « x – непарне число», $D(x, y)$ « y ділиться на x », $Q(x, y)$ – « x батько y », $M(x, y)$ – « x сестра y », $R(x, y)$ – « x родич y ». Сформулюйте на природній мові наведені висловлювання, установивши їх значення істинності: (табл. 7.4):

Таблиця 7.4

n	Висловлювання 1	Висловлювання 2
1.	$\forall x (D(2, x) \rightarrow E(x))$	$\exists x \forall y M(x, y)$
2.	$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y (E(y) \rightarrow D(x, y)))$	$\forall x (N(x) \rightarrow C(x))$
3.	$\exists x (N(x) \rightarrow C(x))$	$\forall x \exists y M(x, y)$

4.	$\exists y \forall x Q(x, y)$	$\forall x (C(x) \rightarrow (E(x) \vee \neg E(x)))$
5.	$\exists x \forall y ((C(x) \wedge C(y)) \rightarrow D(x, y))$	$\exists x \forall y Q(x, y)$
6.	$\forall x \exists y Q(x, y)$	$\forall x \forall y ((E(x) \vee O(x)) \rightarrow \neg D(x, y))$
7.	$\forall x \forall y (O(x) \rightarrow (P(y) \rightarrow D(x, y)))$	$\exists x \exists y Q(x, y)$
8.	$\forall x (\neg D(2, x) \rightarrow O(x))$	$\exists y \forall x M(x, y)$
9.	$\forall x \exists y M(x, y)$	$\exists x (E(x) \rightarrow D(x, 6))$
10.	$\forall x (C(x) \rightarrow N(x))$	$\exists x \exists y M(x, y)$
11.	$\forall x \exists y (Q(x, y) \rightarrow \neg M(x, y))$	$\forall y (P(y) \rightarrow \exists x (E(x) \rightarrow D(x, y)))$
12.	$\exists x (N(x) \rightarrow \neg C(x))$	$\exists x \forall y (Q(x, y) \rightarrow \neg M(x, y))$
13.	$\exists x (C(x) \rightarrow (E(x) \vee O(x)))$	$\forall x \exists y (M(x, y) \rightarrow \neg Q(x, y))$
14.	$\exists x \forall y (M(x, y) \rightarrow \neg Q(x, y))$	$\forall x \forall y ((C(x) \wedge C(y)) \rightarrow D(x, y))$
15.	$\forall x \forall y (Q(x, y) \rightarrow R(x, y))$	$\forall x (\exists y (E(y) \wedge D(2, y)) \rightarrow \neg P(x))$
16.	$\forall x (N(x) \rightarrow (P(x) \vee E(x)))$	$\exists x \forall y (Q(x, y) \rightarrow \neg R(x, y))$
17.	$\exists x \exists y (\neg R(x, y) \rightarrow \neg M(x, y))$	$\forall x (D(3, x) \rightarrow \neg E(x))$
18.	$\forall x (C(x) \rightarrow (\neg N(x) \vee P(x)))$	$\exists x \forall y (\neg Q(x, y) \rightarrow R(x, y))$
19.	$\forall x \exists y (R(x, y) \rightarrow \neg Q(x, y))$	$\forall x \exists y ((N(x) \wedge N(y)) \rightarrow D(x, y))$
20.	$\exists x \forall y (E(x) \rightarrow (P(y) \rightarrow D(x, y)))$	$\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow M(x, y))$

5. З'ясувати місткість й тип предиката (табл. 7.5)⁷. Кожен аргумент приймає значення з множини $M = \{Z - \text{цілі}; R - \text{дійсні}; N - \text{натуральні числа}\}$. Запишіть висловлення при заданих значеннях аргументів та встановіть його істинність.

Таблиця 7.5

n	M	Предикат	Значення аргументів
1.	Z	$\forall x (x + y - z > 2)$	$y = 2, z = -5$
2.	R	$\exists x \forall y (xy = z - x)$	$z = 2.34$

⁷ варіант обирати з розрахунку $h \cdot n$

3.	N	$\forall x \exists y (xyz = yz)$	$z = 24$
4.	Z	$\exists x (xz + yx = 1)$	$y = 2, z = -5$
5.	R	$\exists y \forall x (yx^2 = 3yx + z)$	$z = 2.34$
6.	N	$\forall x (x^2 - y^2 > x + z)$	$y = 21, z = 15$
7.	Z	$\exists x \forall y (2y + x > x + z^2)$	$z = -5$
8.	R	$\exists y \forall x (x + 2y > y + z)$	$z = -1.25$
9.	Z	$\forall x \exists y (xz = y)$	$z = -32$
10.	R	$\exists x \forall y (xy - 2x^2z > 0)$	$z = -0.4$
11.	N	$\forall x \exists z (z > xy^3)$	$y = 21$
12.	Z	$\forall x \exists y (x + y + z = 5)$	$z = -4$
13.	R	$\forall x \exists y (x^2 + z^2 > 2(x + y)^2)$	$z = -1.5$
14.	N	$\exists x \exists y (xz = y^2)$	$z = 32$
15.	Z	$\forall y \exists z (x^2 + yz > 0)$	$x = -4$
16.	R	$\exists z (xy + z^2 > 2xy)$	$x = -0.5, y = 2.1$
17.	N	$\forall y (x - 2y < z - y)$	$x = 2, z = 5$
18.	Z	$\forall x \exists z (xy = xz)$	$y = -2$
19.	R	$\exists y (yx - xyz > 0)$	$x = -0.25, z = 1.15$
20.	N	$\exists y \forall x (xy - zx < 0)$	$z = 12$
21.	Z	$\forall x \forall y (x + y + z > \sqrt[3]{xyz})$	$z = -8$
22.	R	$\forall x \exists z (xz - y^2z > 0)$	$y = 2.05$
23.	N	$\forall x \forall y (xz = y^2)$	$z = 7$
24.	Z	$\forall y \exists z (xz = y)$	$x = -3$
25.	R	$\forall x \exists z (yx + yz < 0)$	$y = -0.05$

26.	N	$\forall x \forall y \left(y = \frac{x-4}{x+4} + z \right)$	$z = 2$
27.	Z	$\forall y \exists z \left(x^2 + y^2 \geq z^2 \right)$	$x = -3$
28.	R	$\forall x \exists z \left(x-1 \leq y-z \right)$	$y = -1.5$
29.	N	$\forall x \exists z \left(xy = z + x \right)$	$y = 4$
30.	Z	$\exists y \exists x \left(yx = 3y^2x + z \right)$	$z = -8$
31.	R	$\forall y \left(x^2 - y^2 > y + z \right)$	$x = 2.1, z = -1.5$
32.	N	$\forall x \exists z \left(2y + x > x^2 + z \right)$	$y = 5$
33.	Z	$\forall x \forall z \left(x - 2y > y + z \right)$	$y = -2$
34.	R	$\forall x \exists y \left(x^z = y \right)$	$z = 0.5$
35.	N	$\exists y \forall z \left(xy - 2xz^2 > 0 \right)$	$x = 4$
36.	Z	$\forall y \exists z \left(z > x^3y \right)$	$x = -4$
37.	R	$\forall x \exists z \left(x + y + z = 5 \right)$	$z = -3.4$
38.	N	$\forall x \exists z \left(x^2 + y^2 > 3(x+z)^2 \right)$	$y = 6$
39.	Z	$\exists x \exists z \left(xy = -z^2 \right)$	$y = -2$
40.	R	$\forall y \exists z \left(xy = -z \right)$	$x = -2.12$

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення булевої функції, її області визначення та області значень.
2. Сформулюйте способи задання булевих функцій.
3. Перелічіть елементарні функції однієї змінної.
4. Перелічіть елементарні функції двох змінних.
5. Сформулюйте теорему Поста-Яблонського.
6. Сформулюйте означення ДДНФ та алгоритм її знаходження.
7. Сформулюйте означення ДКНФ та алгоритм її знаходження.
8. Опишіть метод Квайна-Мак-Класкі мінімізації ДДНФ.
9. Дайте визначення предиката.
10. Які види предикатів бувають?