ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №5

Тема: Математична логіка. Математична індукція

Теоретичні відомості

Логіка – це наука про закони мислення та його форми. Основним поняттям у логіці є ***висловлення*** – це певне твердження, яке може бути або істинним або хибним.

Приклад 1 Наведемо приклади речень:

1) Трава зелена.
2) 6 є непарне число.
3) x–4=0.
4) Дивися на дорогу!

Перших два речення – висловлювання, інші два – ні, бо третє речення набуває істинного чи хибного значення залежно від значення змінної x, четверте речення – не розповідні.

Значення «істина» чи «хибність», яких набуває висловлювання, називають його ***значенням істинності***. Значення «істина» позначають буквою T (від англ. «truth» чи цифрою 1), а «хибність» – буквою F (від «false» чи цифрою 0). Символи, використовувані для позначення висловлювань, називають ***атомами***.

Приклад 2 Наведемо приклади висловлювань:

1) p: «Трава зелена».

2) r: «6 є непарне число».

Тут символи p, r – атоми. Висловлення «Трава зелена» – істинне, а висловлення «6 є непарне число» – хибне.

Складне висловлювання утворюють із наявних висловлювань за допомогою логічних операцій.

Логічною операцією називається операція, в якій операндами є висловлення, а операторами – логічні зв'язки.

Приклад 3 Наведемо приклади складних висловлювань.

1. Сніг білий, і небо теж біле.[1]

2. Якщо погода хороша, то ми їдемо відпочивати.[2]

Алгебра логіки – наука про сукупність висловлень, над якими визначені логічні операції.

Висловлення, які характеризуються значеннями 0 чи 1, позначатимемо літерами x, y, z тощо.[3]

У логіці висловлювань використовують п'ять логічних операцій: ***заперечення*** (читають «не» та позначають знаком «¬»), ***кон'юнкцію*** (читають «і (та)» та позначають знаком «∧»), ***диз'юнкцію*** (читають «або (чи)» та позначають знаком «∨»), ***імплікацію*** (читають «якщо ..., то» та позначають

[1] Тут логічна операція – це «і».
[2] Тут логічна операція – це «якщо ..., то».
[3] Такі змінні називатимемо ***бульовими***.

знаком «→»), ***еквівалентність*** (читають «тоді й лише тоді» та позначають знаком «~»).

Приклад 4 Розглянемо висловлювання: *p*: «Вологість велика», *q*: «Температура висока», *r*: «Ми почуваємо себе добре». Тоді речення «Якщо вологість велика та температура висока, то ми не почуваємо себе добре» можна записати складним висловлюванням $\left((p \wedge q) \to (\neg r)\right)$.

У логіці висловлювань атом *p* чи складне висловлювання називають ***формулою***.

Під ***алфавітом*** будемо розуміти кожну непорожню множину символів:

пропозиційних змінних – x, y, z, x_1, x_2, ...;

логічних зв'язок – ¬, ∧, ∨, →, ~, ...;

технічних символів – (,) тощо.

Словом у певному алфавіті називається довільна скінчена послідовність символів (можливо, порожня). Слово *a* називається ***підсловом*** *b*, якщо $b = b_1 a b_2$ для певних слів b_1 та b_2. Слово ab називається ***сполученням*** слів *a* та *b*.

Синтаксис – це сукупність правил, які дають змогу будувати формули та розпізнавати правильні формули серед послідовностей символів. ***Формула алгебри висловлень*** (***ФАВ***) – це слово, яке задовольняє такому означенню:

1) кожна пропозиційна змінна – формула;

2) якщо p та q – формули, то $(\neg p)$ або $\left(\overline{p}\right)$, $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \to q)$, $(p \sim q)$ – формули;

3) слово є формулою, якщо воно побудоване лише з використанням скінченної кількості правил.

Наприклад, вирази (слова) $\left(\left(\overline{p} \to q\right) \vee p\right)$, $\left((p \sim q) \to \left(\overline{r}\right)\right)$ є формулами, а слова $(p \sim q)$, $\left(\overline{r}\right)$, p, q, r – підформули останньої формули.

З метою економії дужок операції виконуються в такому порядку (пріоритет операцій): ¬, ∧, ∨, →, ~.

Семантика – набір правил інтерпретації формул, за яких значення формули має бути функцією значень її складових.

Нехай p та q – формули.

1. Формула $(\neg p)$ істинна, коли p хибна, і хибна, коли p істинна.[4]

2. Формула $(p \wedge q)$ істинна, якщо p та q водночас істинні. У всіх інших випадках формула $(p \wedge q)$ хибна.[5]

3. Формула $(p \vee q)$ хибна, якщо p та q водночас хибні. У всіх інших випадках $(p \vee q)$ істинна.[6]

---

[4] Формулу $(\neg p)$ читають «не *p*» чи «це не так, що *p*» та називають ***запереченням*** формули *p*.

[5] Формулу $(p \wedge q)$ читають «*p* і *q*» й називають ***кон'юнкцією*** формул *p* та *q*.

[6] Формулу $(p \vee q)$ читають «*p* або *q*» й називають ***диз'юнкцією*** формул *p* та *q*.

4. Формула $(p \to q)$ хибна, якщо формула p істинна, а q – хибна. У всіх інших випадках вона істинна. [7]

5. Формула $(p \sim q)$ істинна, якщо p та q мають однакові значення істинності. У всіх інших випадках формула $(p \sim q)$ хибна. [8]

Семантику логічних операцій зручно задавати за допомогою таблиць[9], які містять значення істинності формул залежно від значень істинності їх атомів. Семантику введених операцій у формі таблиць істинності наведено в табл. 5.1.

Таблиця 5.1 – Таблиця істинності основних формул

p	q	$(\neg p)$	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$(p \to q)$	$(p \sim q)$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Приклад 5 Нехай дано висловлювання p: «Сьогодні п'ятниця» та q: «Сьогодні падає дощ».

Заперечення висловлювання p – «Це не так, що сьогодні п'ятниця» або «Сьогодні не п'ятниця» чи «П'ятниця не сьогодні». [10]

Кон'юнкція p та q – «Сьогодні п'ятниця, і сьогодні падає дощ» істинне в дощову п'ятницю й хибне в інший день або в недощову п'ятницю.

Диз'юнкція p та q – «Сьогодні п'ятниця чи сьогодні падає дощ» істинне в будь-яку п'ятницю чи в будь-який дощовий день (зокрема, у дощову п'ятницю) і хибне тільки в недощові «не п'ятниці».

Приклад 6 В меню зазначено «Закуску чи салат подають із першою стравою». Це майже завжди означає, що з першою стравою буде подано чи закуску, чи салат, а не обидві страви. Тут використано альтернативне «чи (або)»; його позначають знаком «$\oplus$». Значення істинності цієї операції наведено в табл. 5.2.

Таблиця 5.2 – Таблиця істинності формули $(p \oplus q)$

p	q	$(p \oplus q)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

[7] Формулу $(p \to q)$ називають ***імплікацією***, атом p – припущенням імплікації, а q – її висновком. Читають: «якщо p, то p», «з p випливає q», «p лише тоді, коли q», «p достатнє для q», «q, якщо p», «q необхідне для p».

[8] Формулу $(p \sim q)$ читають «p тоді й лише тоді, коли q» чи «p еквівалентне q» та називають ***еквівалентністю*** формул p та q.

[9] Такі таблиці називають ***таблицями істинності***.

[10] Зазначимо, що речення, пов'язані з часовою змінною, – не висловлювання доти, доки не визначено момент часу. Це стосується й змінних у реченнях, які характеризують місце чи особу. Ці речення – не висловлювання, якщо не зазначено відповідного місця чи конкретної особи.

Для знаходження значення істинності складного висловлювання потрібно надати значення істинності всім атомам, які містить відповідна формула[11], та потрібно знаходити значення логічних операцій, визначених табл. 5.1. Якщо формула має n атомів[12], то така формула має 2^n інтерпретацій.

Приклад 7 Покажемо істинність формули $p \to q \sim \overline{p} \vee q$ за будь-яких $2^2 = 4$ інтерпретацій (табл. 5.3).

Таблиця 5.3

p	q	$p \to q$	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$	$p \to q \sim \overline{p} \vee q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

Якщо існує хоча б одна інтерпретація, за якої формула набуває істинного значення, вона називається ***здійсненною***, а якщо існує хоча б одна інтерпретація, за якої формула набуває хибного значення, вона називається ***спростовною***.

Формула p називається ***тавтологією***, якщо за будь-яких інтерпретацій її змінних вона набуває істинного значення. Позначення тавтології: $\models p$.

Формула називається ***протиріччям***, якщо за будь-яких інтерпретацій вона набуває хибного значення.

Приклад 8 Розглянемо формулу $\big((p \to q) \wedge p\big) \to q$, що має $2^2 = 4$ інтерпретацій (табл. 5.4).

Таблиця 5.4

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$\big((p \to q) \wedge p\big) \to q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Ця формула істинна в усіх інтерпретаціях, тобто є тавтологію.

Приклад 9 Розглянемо формулу $\Big((p \to q) \wedge \big(p \wedge \overline{q}\big)\Big)$, що має $2^2 = 4$ інтерпретацій (табл. 5.5).

Таблиця 5.5

p	q	$p \to q$	$\overline{q}$	$\big(p \wedge \overline{q}\big)$	$\Big((p \to q) \wedge \big(p \wedge \overline{q}\big)\Big)$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0

Ця формула хибна в усіх інтерпретаціях, тобто є ***протиріччям***.

[11] Набір значень істинності всіх атомів формули називають її ***інтерпретацією***.
[12] Формулу, яка містить *n* атомів, називають *n* -***місною***.

Областю істинності (***областю хибності***) формули називається множина наборів значень змінних, за яких формула набуває істинного (хибного) значення.

Дві формули є ***рівносильні*** тоді й лише тоді, коли за будь-яких інтерпретацій їх змінних вони набувають однакових значень. Позначення: $p = q$.

Наприклад, тавтології можна здобути з рівносильності заміною знака = на знак ~. Скажімо, з рівносильності $p \vee pq = p$ здобуваємо тавтологію $\models p \vee pq \sim p$. Доведення тавтології, наприклад, $\models (p \to q)(p \to r) \sim (p \to qr)$, можна виконати за допомогою перетворень:

$$(p \to q)(p \to r) = (\overline{p} \vee q)(\overline{p} \vee r) = \overline{p} \vee \overline{p}q \vee \overline{p}r \vee qr = \overline{p} \vee qr = p \to qr .$$

Тотожно-істинні формули та формули рівносильності називаються ***законами алгебри висловлень***. Нижче наведено закони, які найчастіше зустрічаються на практиці:

$x \wedge 0 = 0,\ x \wedge 1 = x,\ x \vee 0 = x,\ x \vee 1 = 1$	–	закони сталих (констант);
$x = x$	–	закон тотожності;
$\overline{\overline{x}} = x$	–	закон подвійного заперечення;
$x \wedge \overline{x} = 0$	–	закон протиріччя;
$x \vee \overline{x} = 1$	–	закон вилученого третього;
$x \vee y = y \vee x,\ x \wedge y = y \wedge x$	–	комутативність $\vee$ та $\wedge$;
$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z,$	–	асоціативність $\vee$;
$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z -$	–	асоціативність $\wedge$;
$x \wedge (y \vee z) = x \wedge y \vee x \wedge z$	–	перший дистрибутивний закон;
$x \vee y \wedge z = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$	–	другий дистрибутивний закон;
$x \wedge (x \vee y) = x$	–	перший закон поглинання;
$x \vee x \wedge y = x$	–	другий закон поглинання;
$x \vee x = x,\ x \wedge x = x$	–	ідемпотентність;
$x \wedge y \vee x \wedge \overline{y} = x$	–	перший закон склеювання;
$(x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) = x$	–	другий закон склеювання;
$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y},\ \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$	–	закони де Моргана;
$\models (x \to y) \wedge x \to y$	–	правило твердження, modus ponens;
$\models (x \to y) \wedge \overline{y} \to \overline{x}$	–	правило спростування, modus tollens.

Приклад 10 Застосувавши закони логіки висловлювань, доведемо еквівалентність формул $p \to (q \wedge r)$ і $(p \to q) \wedge (p \to r)$. Запишемо послідовність перетворень і назви використаних законів і правил:

$$\underbrace{p \to (q \wedge r) = \overline{p} \vee (q \wedge r)}_{\text{за правилом усунення імплікації}} = \underbrace{(\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{p} \vee r)}_{\text{за 2 законом дистрибутивності}} =$$

$$= \underbrace{(p \to q) \wedge (p \to r)}_{\text{за правилом введення імплікації}} .$$

Формула алгебри висловлень q є ***логічним наслідком*** з формули p (позначається $p \models q$), якщо q є істинне на всіх наборах значень змінних, для яких p є істинна. Наприклад, формула $q = x \vee x$ є логічним наслідком формули $p = x \wedge (y \vee \bar{y})$, тобто $x \wedge (y \vee \bar{y}) \models x \vee x$.

Логічний наслідок можна узагальнити на сукупності формул: формула алгебри висловлень q є ***логічним наслідком формул*** $p_1, p_2, ..., p_n$ та позначається як $p_1, p_2, ..., p_n \models q$, якщо для довільного набору значень з істинності всіх $p_i, i = \overline{1, n}$, на цьому наборі випливає істинність q. Наприклад, розглядаючи таблицю істинності 5.6, здобудемо три ілюстрації до наведеного означення:

$x, z, x \wedge y \to \bar{z} \models \bar{y}$ – 6-й рядок;

$x, x \to z, z \models x \vee y \to z$ – 6-й та 8-й рядки;

$x \wedge y \to \bar{z}$, $x \to z \models \overline{x \wedge y}\ x \wedge y \to \bar{z}$ – 1, 4 та 6-й рядки.

Таблиця 5.6 – Таблиця істинності логічного наслідку формул сукупності

x	y	z	$x \wedge y \to \bar{z}$	$\bar{y}$	$x \to z$	$x \vee y \to z$	$\overline{x \wedge y}$
0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0

Приклад 11 Перевірити правильність наступного судження. Якщо замінити мікросхему (*A*), телевізор працюватиме (*B*) за умови, що напругу увімкнено (*C*). Мікросхему замінили, а напругу не увімкнули. Отже, телевізор не працюватиме.

Розв'язання. Це судження можна записати у вигляді

$$A \to B \wedge C, \qquad A, \bar{C} \models \bar{B}.$$

Оскільки формули *A*, *B*, *C* не містять підформул, то можна перейти до відповідних пропозиційних змінних *x*, *y*, *z*.

Тоді даний логічний висновок набуде більш зручного вигляду:

$$x \to y \wedge z, \qquad x, \bar{z} \models \bar{y}.$$

Судження буде слушним, якщо формула

$$(x \to y \wedge z) \wedge x \wedge \bar{z} \to \bar{y}$$

є загальнозначуща. При викладках скористаємося основними законами алгебри висловлень:

$$\left(x \to y \wedge z\right) \wedge x \wedge \overline{z} \to \overline{y} = \overline{\left(\overline{x} \vee y \wedge z\right) \wedge x \wedge \overline{z}} \vee \overline{y} = \overline{0} \vee \overline{y} = 1 \vee \overline{y} = 1.$$

Формула є загальнозначущою, отже, судження є правильне.

Приклад 12 Студент у день іспиту вирішив встати раніше, зробити зарядку, після іспиту здати книжки в бібліотеку або сходити в кінотеатр і, якщо добре складе іспит, сходити в клуб. Використовуючи апарат логіки висловлювань, визначити, в якому випадку план студента не буде виконаний.

Розв'язання. Виділяємо прості висловлення у складі вхідного складного:

A: «Студент у день іспиту встав раніше»;

B: «Студент у день іспиту зробив зарядку»;

C: «Студент після іспиту здав книжки в бібліотеку»;

D: «Студент після іспиту сходив у кінотеатр»;

E: «Студент склав іспит добре»;

F: «Студент після іспиту сходив у дискотеку».

Формула вхідного складного висловлення: $A \wedge B \wedge \left(C \vee D\right) \wedge \left(E \to F\right)$.

План студента виконаний, якщо значення цього складного висловлення дорівнює 1. Якщо план студента не виконаний, то значення цього складного висловлення дорівнює 0, а його заперечення – 1:

$$\overline{A \wedge B \wedge \left(C \vee D\right) \wedge \left(E \to F\right)} = \overline{A} \vee \overline{B} \vee \left(\overline{C} \wedge \overline{D}\right) \vee \left(\overline{E \to F}\right) =$$

$$= \overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \wedge \overline{D} \vee E \wedge \overline{F}.$$

Підставляючи замість змінних прості висловлювання, одержимо відповідь на запитання. Вона відповідає інтуїтивному розумінню ситуації.

Приклад 13 Я піду на лекцію (x) або залишуся в барі й вип'ю кави (y). Я не піду на лекцію. Отже, я залишуся й вип'ю кави.

Запишемо логічне слідування:

$$x \vee y, \overline{x} \Big| = y.$$

Перевіримо загальнозначимість:

$$\left(x \vee y\right) \wedge \overline{x} \to y = \overline{\left(x \vee y\right) \wedge \overline{x}} \vee y = \overline{x}\,\overline{y} \vee x \vee y = 1 \vee x = 1.$$

Судження є правильне.

Літералом називають атом або його заперечення. Приклади літералів – p, $\overline{q}$, r.

Літерал називають ***позитивним***, якщо він не має знака заперечення, і ***негативним***, якщо має. Пару літералів $\left\{p, \overline{p}\right\}$ називають ***контрарною***.

Говорять, що формулу p записано в ***кон'юнктивній нормальній формі*** (***КНФ***), якщо вона має вигляд $p = p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n \ \left(n \geq 1\right)$, де кожна з формул $p_1, p_2, ..., p_n$ літерал або диз'юнкція літералів і всі формули $p_i, i = \overline{1,n}$ різні.

Приклад 14 Нехай p, q і r – атоми. Тоді $f=\left(p\vee\bar{q}\vee\bar{r}\right)\wedge\left(\bar{p}\vee q\right)$ – формула, записана в КНФ. У ній $f_1=\left(p\vee\bar{q}\vee\bar{r}\right)$ і $f_2=\left(\bar{p}\vee q\right)$, тобто f_1 – диз'юнкція літералів p, $\bar{q}$ і $\bar{r}$, а f_2 – диз'юнкція літералів $\bar{p}$ і q.

Говорять, що формулу p записано в ***диз'юнктивній нормальній формі*** (***ДНФ***), якщо вона має вигляд $p=p_1\vee p_2\vee\ldots\vee p_n\ \ (n\geq 1)$, де кожна з формул $p_1, p_2, \ldots, p_n$ літерал або кон'юнкція літералів і всі формули $p_i, i=\overline{1,n}$ різні.

Приклад 15 Нехай p, q і r – атоми. Тоді $f=\left(\bar{p}\wedge q\right)\vee\left(p\wedge\bar{q}\wedge\bar{r}\right)$ – формула, записана в ДНФ. У ній $f_1=\left(\bar{p}\wedge q\right)$ і $f_2=\left(p\wedge\bar{q}\wedge\bar{r}\right)$, тобто f_1 – кон'юнкція літералів $\bar{p}$ і q, а f_2 – кон'юнкція літералів p, $\bar{q}$ і $\bar{r}$.

Для побудови нормальних форм потрібно виконати таку послідовність еквівалентних перетворень.

Крок 1. Застосувати правила $p\to q=\bar{p}\vee q$ та $p\sim q=\left(p\to q\right)\wedge\left(q\to p\right)$ для усунення логічних операцій «$\to$» та «~».

Крок 2. Застосувати закон подвійного заперечення та закони де Моргана для перенесення знака заперечення безпосередньо до атомів.

Крок 3. Застосувати відповідні закони дистрибутивності для побудови нормальної форми. Щоб побудувати КНФ, потрібно використати дистрибутивний закон для диз'юнкції щодо кон'юнкції. Для побудови ДНФ слід застосувати дистрибутивний закон для кон'юнкції щодо диз'юнкції.

Приклад 16 Побудувати ДНФ формули $\left(\left(p\vee\bar{q}\right)\to r\right)\wedge\left(\bar{r}\to s\right)$.

Розв'язання. Наведемо послідовність кроків та зазначимо застосовані закони логіки висловлювань.

$$\underset{\text{за правилом усунення імплікації}}{\left(\left(p\vee\bar{q}\right)\to r\right)\wedge\left(\bar{r}\to s\right)}=\underset{\text{за законом де Моргана}}{\left(\overline{\left(p\vee\bar{q}\right)}\vee r\right)\wedge\left(\bar{\bar{r}}\vee s\right)}=$$

$$=\underset{\text{за законом подвійного заперечення}}{\left(\left(\bar{p}\wedge\bar{\bar{q}}\right)\vee r\right)\wedge\left(r\vee s\right)}=\underset{\text{за 1 законом дистрибутивності}}{\left(\left(\bar{p}\wedge q\right)\vee r\right)\wedge\left(r\vee s\right)}=$$

$$=\left(\left(\bar{p}\wedge q\right)\wedge\left(r\vee s\right)\right)\vee\left(r\wedge\left(r\vee s\right)\right)=$$

за 1 законом дистрибутивності

$$=\left(\left(\bar{p}\wedge q\wedge r\right)\vee\left(\bar{p}\wedge q\wedge s\right)\right)\vee\left(\left(r\wedge r\right)\vee\left(r\wedge s\right)\right)=$$

за законом асоціативності

$$=\left(\bar{p}\wedge q\wedge r\right)\vee\left(\bar{p}\wedge q\wedge s\right)\vee\left(r\wedge r\right)\vee\left(r\wedge s\right)=$$

за законом асоціативності

$$=\left(\bar{p}\wedge q\wedge r\right)\vee\left(\bar{p}\wedge q\wedge s\right)\vee r\vee\left(r\wedge s\right).$$

за законом ідемпотентності

Ми одержали ДНФ. Її можна спростити, якщо двічі використати закон поглинання: диз'юнктивний член r поглинає члени $\left(\overline{p} \wedge q \wedge r\right)$ і $\left(r \wedge s\right)$. Отже, $\left(\overline{p} \wedge q \wedge s\right) \vee r$ – інша ДНФ заданої формули. Останні міркування свідчать, що ДНФ, взагалі, не єдина.

Приклад 17 Побудувати КНФ формули $\left(p \wedge \left(q \to r\right)\right) \to s$.

Розв'язання. Наведемо послідовність кроків та зазначимо застосовані закони логіки висловлювань.

$$\left(p \wedge \left(q \to r\right)\right) \to s = \left(\overline{p \wedge \left(\overline{q} \vee r\right)}\right) \vee s =$$

за правилом усунення імплікації — за законом де Моргана

$$= \left(\overline{p} \vee \overline{\left(\overline{q} \vee r\right)}\right) \vee s = \overline{p} \vee \overline{\left(\overline{q} \vee r\right)} \vee s = \overline{p} \vee \left(\overline{\overline{q}} \wedge \overline{r}\right) \vee s =$$

за законом асоціативності — за законом де Моргана — за законом подвійного заперечення

$$= \overline{p} \vee \left(q \wedge \overline{r}\right) \vee s = \overline{p} \vee s \vee \left(q \wedge \overline{r}\right) = \left(\overline{p} \vee q \vee s\right) \wedge \left(\overline{p} \vee \overline{r} \vee s\right).$$

за законом комутативності — за законом асоціативності — за законом дистрибутивності

Ми одержали шукану КНФ.

Принцип математичної індукції. Нехай $P(n)$ є таке твердження, що

а) $P(1)$ істинно, і

б) для кожного *k*, якщо $P(k)$ істинно, то $P(k+1)$ істинно.

Тоді $P(n)$ істинно для будь-якого натурального числа *n*. Мовою предикатів це виглядає наступним чином: $\left(P(1) \wedge \left((\forall k)P(k) \to P(k+1)\right)\right) \to (\forall n)P(n)\right)$.

Приклад 18 Доведемо, що формула $1+3+5+\ldots+(2n-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$ вірна при будь-кому заданому числі $n = 1,2,3,\ldots$.

Для доведення цієї гіпотези достатньо встановити два факти:

а) при $n=1$ необхідне твердження вірне, тобто $1 = 1^2$.

б) припустимо, що твердження вірне при $n = k$, тобто

$$1+3+5+\ldots+(2k-1) = k^2$$

й переконаємося, що тоді воно вірне і для $n = k+1$, тобто

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1) = (k+1)^2.$$

Будемо мати

$$k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2,$$

$$(k+1)^2 = (k+1)^2.$$

Отже, твердження вірне для всіх значень *n*.

ЗАДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. Визначити яких висловлювань (Істинне, Хибне, або ні те, ні інше) стосуються формули, наведені у таблиці 5.1 відповідно до заданого варіанта[13]:

1) За допомогою таблиці істинності.
2) За допомогою основних законів алгебри.
3) Побудувати ДНФ формули.
4) Побудувати КНФ формули.

Таблиця 5.1

n	Формула	***n***	Формула
1.	$(p \sim q) \to \overline{p}$	2.	$p \to \overline{p \leftrightarrow q}$
3.	$\left(p \to \overline{q}\right) \to \left(q \to \overline{p}\right)$	4.	$p \vee q \wedge (p \to q)$
5.	$(p \vee q) \sim \overline{p} \wedge q$	6.	$\overline{p \vee q} \leftrightarrow q$
7.	$\left(\left(\overline{(p \to q)} \to p\right) \to p\right)$	8.	$p \vee q \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$
9.	$\overline{p \vee q} \sim \overline{p} \vee \overline{q}$	10.	$p \wedge q \sim \overline{p} \wedge \overline{q}$
11.	$(p \sim q) \vee \overline{(q \leftrightarrow p)}$	12.	$p \wedge q \to \overline{p} \wedge \overline{q}$
13.	$p \sim \overline{q} \vee \overline{p} \to q$	14.	$(p \leftrightarrow q) \vee \overline{(p \to q)}$
15.	$\left(p \to \overline{q}\right) \leftrightarrow \left(q \to \overline{p}\right)$	16.	$\overline{(p \to q)} \vee (q \to p)$
17.	$p \leftrightarrow \overline{p} \to q$	18.	$\overline{\left(p \to \overline{q}\right) \vee q}$
19.	$\left((p \to q) \to \overline{p \wedge q}\right) \to p$	20.	$\overline{\overline{(q \to p)} \vee \overline{(p \leftrightarrow q)}}$
21.	$p \leftrightarrow q \leftrightarrow \overline{p \leftrightarrow q}$	22.	$\overline{\overline{p} \to q \to p \vee q}$
23.	$(p \wedge q \to p) \to q$	24.	$\overline{p \vee q \leftrightarrow \overline{p \to q}}$
25.	$\left(\overline{p} \wedge q \to p\right) \leftrightarrow q$	26.	$\overline{\overline{p \leftrightarrow q} \to p \vee q}$
27.	$(p \leftrightarrow q) \vee \left(\overline{p} \leftrightarrow \overline{q}\right)$	28.	$\overline{p \to q} \leftrightarrow q \vee p$
29.	$q \to \overline{p \to \overline{p \leftrightarrow q}}$	30.	$\overline{p \leftrightarrow q} \to p \wedge q$
31.	$\overline{\overline{p} \to q \to p}$	32.	$\left((p \to q) \to \overline{p \wedge q}\right) \to q$
33.	$\overline{p \leftrightarrow \overline{p \to q}}$	34.	$\left(\overline{p \wedge q} \to p\right) \to q$
35.	$\overline{\overline{p \leftrightarrow q} \to p}$	36.	$(p \to q) \vee \overline{(p \sim q)}$
37.	$\overline{p \to q} \leftrightarrow q$	38.	$\overline{p \vee q} \leftrightarrow p \wedge q$
39.	$\overline{p \leftrightarrow q} \to p$	40.	$\overline{p \vee q} \wedge (p \to q)$

[13] варіант обирати з розрахунку $h \cdot n$

2. Формалізувати речення відповідно до заданого варіанта (табл. 5.2)[14]:

1) Записати у вигляді формули.
2) Перевірити її на істинність за допомогою таблиці істинності.
3) Перевірити її на істинність за допомогою основних законів алгебри.
4) Побудувати ДНФ формули.
5) Побудувати КНФ формули.

Таблиця 5.2

n	Речення
1.	Я піду додому або залишуся тут і вип'ю чашку чаю, я не піду додому, отже, я залишуся і вип'ю чашку чаю.
2.	Якщо Олег ляже сьогодні пізно, він буде вранці в отупінні, якщо він ляже не пізно, то йому здаватиметься, що не варто жити, отже, або Олег буде завтра в отупінні, або йому здаватиметься, що не варто жити.
3.	Заперечення диз'юнкції двох висловлювань еквівалентно кон'юнкції заперечень кожного з цих висловлювань.
4.	Якщо 2 – просте число, то це найменше просте число, якщо 2 – найменше просте число, то 1 не є простим числом; число 1 не є простим числом, отже, 2 – просте число.
5.	Ігор або втомився, або хворий, якщо він втомився, то він злий; він не злий, отже, він хворий.
6.	Якщо завтра буде холодно, я одягну тепле пальто, якщо рукав буде полагоджений; завтра буде холодно, а рукав не буде полагоджений, отже, я не одягну тепле пальто.
7.	Ні Північ, ні Південь не перемогли в громадянській війні.
8.	Людину не підкупають лестощі, якщо розум у людини є.
9.	Іван прийде на іспит і він або Сергій отримає п'ятірку.
10.	Якщо не можеш визнати похвали заслуженими, то вважай їх лестощами.
11.	Якщо буде гарна погода, то я подзвоню друзям, і ми поїдемо до моря.
12.	Якщо я втомився або голодний, я не можу займатися.
13.	Натуральне число *n* ділиться на 3 тоді і лише тоді, коли сума цифр числа *n* ділиться на 3.
14.	Якщо вранці буде злива, то я або залишуся вдома, або вимушений буду взяти таксі.
15.	Сьогодні наша команда не виграла і, отже, не вийшла у фінал.
16.	Якщо я сьогодні встану і піду на заняття, моя мама буде задоволена, а якщо я не встану, то мама не буде задоволена.

[14] варіант обирати з розрахунку $h \cdot n$

17.	Якщо він хоче досягти мети, він повинен багато знати і бути удачливим.
18.	Сьогодні ясно, отже сьогодні не йде ні дощ, ні сніг.
19.	Вчора було похмуро, а сьогодні тепло і ясно.
20.	Якщо сьогодні хмарно, то це означає, що завтра буде дощ, або вітер розганятиме хмари.
21.	Ти успішно складеш іспит тоді і лише тоді, коли добре підготуєшся; якщо ти не складеш іспит успішно, то позбудешся стипендії.
22.	Математичні відомості можуть застосовуватися вміло і бути корисними лише в тому випадку, якщо вони засвоєні творчо.
23.	Якщо у розпалі пристрасті розум сумнівається, то коли пристрасть остигне, він засудить твій вчинок.
24.	Якщо головний визначник системи лінійних рівнянь не дорівнює нулю, то система рівнянь визначена, тобто має єдиний розв’язок.
25.	Другом можна вважати того і лише того, хто щасливий, якщо щасливий його друг, і зажурений, якщо той зажурений.
26.	Якщо я успішно закінчу школу і вступлю до інституту, то я зможу скласти іспит по математиці тоді і лише тоді, коли я багато займатимуся або викладач буде поблажливий.
27.	Ти зрозумієш цю тему, якщо прийдеш сьогодні на заняття або прочитаєш підручник, інакше тобі зможе допомогти друг тоді і лише тоді, коли зрозуміє цю тему сам.
28.	Якщо "Пірати" або "Цуценята" програють і "Велетні" виграють, то "Увертиши" втратять перше місце і, крім того, я програю парі.
29.	Якщо робітники або адміністрація упираються, то страйк буде врегульований тоді і лише тоді, коли уряд доб’ється судової заборони, але війська не будуть послані на завод.
30.	Хліби уціліють тоді і лише тоді, коли будуть вириті іригаційні канави; якщо хліби не уціліють, то фермери збанкрутують і залишать ферми.
31.	Я піду в кафе або залишуся дома і вип’ю чашку чаю, я не піду в кафе, отже, я залишуся і вип’ю чашку чаю.
32.	Якщо завтра буде тепло, я одягну куртку, якщо карман буде пришитий; завтра буде тепло, а карман не буде пришитий, отже, я не одягну куртку.
33.	Андрій прийде на іспит і він або Сашко отримає четвірку.
34.	Якщо буде сонячна погода, то я подзвоню друзям, і ми поїдемо на шашлики.

35.	Натуральне число n ділиться на 9 тоді і лише тоді, коли сума цифр числа n ділиться на 9.
36.	Сьогодні наша команда виграла і, отже, вийшла у півфінал.
37.	Якщо я сьогодні просплю й запізнюся на заняття, моя мама буде розстроєна, а якщо я не просплю, то мама буде задоволена.
38.	Другом можна вважати того і лише того, хто удачливий, якщо удачливий його друг, і зажурений, якщо той зажурений.
39.	Якщо я не виспався або втомився або голодний, я не можу займатися.
40.	Якщо головний визначник системи лінійних рівнянь дорівнює нулю, то система рівнянь невизначена, тобто має безліч розв'язків.

3. За допомогою метода математичної індукції довести тотожність (табл. 5.3)[15].

Таблиця 5.3

n	Тотожність
1.	$1+4+7+10+...+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$
2.	$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$
3.	$1+2+2^2+2^3+...+2^{n-1}=2^n-1$
4.	$1+r+r^2+r^3+...+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}$
5.	$1+3+5+7+...+(2n-1)=n^2$
6.	$1^3+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2$
7.	$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
8.	$1\cdot 2+2\cdot 3+...+(n-1)n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$
9.	$1+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
10.	$1\cdot 3+2\cdot 5+...+n(2n+1)=\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$
11.	$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 5}+...+\frac{2n^2-1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n^2}{(2n+1)}$

[15] варіант обирати з розрахунку ***h·n***

12.	$\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}+\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+1)}{n+2}$
13.	$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$
14.	$1+18+75+\ldots+n(2n-1)^2=\frac{n(n+1)(6n^2-2n-1)}{6}$
15.	$1+12+45+\ldots+n^2(2n-1)=\frac{n(n+1)(3n^2+n-1)}{6}$
16.	$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)}$
17.	$\frac{1}{2\cdot 5\cdot 8}+\frac{1}{5\cdot 8\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(3k-1)(3k+2)(3k+5)}=\frac{3k^2+7k}{20(3k+2)(3k+5)}$
18.	$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
19.	$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$
20.	$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$
21.	$1-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{k-1}k^2+(-1)^k(k+1)^2=(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}$
22.	$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$
23.	$1-2^3+3^3-4^3+\ldots+(2n-1)^3-(2n)^3=-n^2(4n+3)$
24.	$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$
25.	$2+16+56+\ldots+(3n-2)\cdot 2^n=10+(3n-5)\cdot 2^{n+1}$
26.	$5+45+325+\ldots+(4n+1)\cdot 5^{n-1}=n\cdot 5^n$
27.	$1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^2}+3\cdot\frac{1}{2^3}+\ldots+n\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{n(n+1)}{2}+1-\frac{1}{2^n}$
28.	$\frac{1\cdot 7}{3\cdot 5}+\frac{3\cdot 9}{5\cdot 7}+\frac{5\cdot 11}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{(2n-1)(2n+5)}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(6n+1)}{3(2n+3)}$
29.	$\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 5}\cdot 2+\frac{4}{5\cdot 6}\cdot 2^2+\ldots+\frac{n+1}{(n+2)(n+3)}\cdot 2^{n-1}=\frac{2^n}{n+3}-\frac{1}{3}$

30.	$\frac{3}{1\cdot 2\cdot 4\cdot 5}+\frac{4}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\ldots+\frac{n+2}{n(n+1)(n+3)(n+4)}=\frac{n(n+5)}{8(n+1)(n+4)}$
31.	$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{3}$
32.	$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
33.	$1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+n\cdot 2^n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$
34.	$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$
35.	$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
36.	$18+80+\ldots+(n-1)(2n-1)(2n+2)=\frac{n(n-1)(3n^2+7n+1)}{3}$
37.	$2+6+10+\ldots+2\cdot(2n-1)=2n^2$
38.	$2+18+60+\ldots+n(n+1)(2n-1)=\frac{n(n+1)(n+2)(3n-1)}{6}$
39.	$1\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3^2}+5\cdot\frac{1}{5^3}+\ldots+(2n-1)\cdot\frac{1}{3^n}=1-(n+1)\cdot\frac{1}{3^n}$
40.	$15+42+\ldots+\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{2}=\frac{n(n+4)(n^2+4n+7)}{4}$

4. Довести подільності (табл. 5.4) [16] методом математичної індукції при будь-якому натуральному n.

Таблиця 5.4

n	Подільність	***n***	Подільність
1.	$\left(5^{n+3}+11^{3n+1}\right)\vdots 17$	2.	$\left(5^n-3^n+2n\right)\vdots 4$
3.	$\left(7^n+3n-1\right)\vdots 9$	4.	$\left(11^{n+2}+12^{2n+1}\right)\vdots 133$
5.	$\left(7^{2n}-4^{2n}\right)\vdots 33$	6.	$\left(5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}\right)\vdots 19$
7.	$\left(2^{2n-1}-9n^2+21n-14\right)\vdots 27$	8.	$\left(6^{2n}+3^{n+2}+3^n\right)\vdots 11$
9.	$\left(6^{2n}+19^n-2^{n+1}\right)\vdots 17$	10.	$\left(7^{n+1}+8^{2n-1}\right)\vdots 19$
11.	$\left(7^n\cdot 2^{3n}-3^{2n}\right)\vdots 47$	12.	$\left(7\cdot 5^{2n}+12\cdot 6^n\right)\vdots 19$

[16] варіант обирати з розрахунку ***h*·*n***

13.	$\left(5^{2n+1}+3^{n+2}\cdot 2^{n-1}\right)\vdots 19$	14.	$\left(7^{2n}-1\right)\vdots 24$
15.	$\left(9^{n}+3\right)\vdots 4$	16.	$\left(9^{n+1}-18n-9\right)\vdots 18$
17.	$\left(5^{n+2}+26\cdot 5^{n}+8^{2n+1}\right)\vdots 59$	18.	$\left(15^{n}+6\right)\vdots 7$
19.	$\left(3^{3n+3}-1\right)\vdots 26$	20.	$\left(n^{3}-n\right)\vdots 3$
21.	$\left(11\cdot 3^{2n}+10\cdot 2^{n}\right)\vdots 7$	22.	$\left(4^{n}+15n-1\right)\vdots 9$
23.	$\left(5-3^{n}+2n\right)\vdots 4$	24.	$\left(14\cdot 13^{n}+13\cdot 2^{n}\right)\vdots 9$
25.	$\left(3^{3n+2}+2^{4n+1}\right)\vdots 11$	26.	$\left(3^{2n+3}+40n-27\right)\vdots 64$
27.	$\left(4^{n}+6n-10\right)\vdots 18$	28.	$\left(5^{n}+2\cdot 3^{n}-3\right)\vdots 8$
29.	$\left(3^{2n+1}+2^{n+2}\right)\vdots 7$	30.	$\left(5^{n}-4n+15\right)\vdots 16$
31.	$\left(n^{3}+5n\right)\vdots 6$	32.	$\left(10^{n}+18n-28\right)\vdots 27$
33.	$\left(17\cdot 5^{3n-1}-3^{3n+2}-42n\right)\vdots 28$	34.	$\left(6^{2n}-1\right)\vdots 35$
35.	$\left(6^{2n-2}+3^{n+1}+3^{n-1}\right)\vdots 11$	36.	$\left(2n^{3}+3n^{2}+7n\right)\vdots 6$
37.	$\left(2^{2n+1}\cdot 3^{n+3}+1\right)\vdots 11$	38.	$\left(3^{3n+3}-26n-27\right)\vdots 676$
39.	$\left(n^{5}-n\right)\vdots 30$	40.	$\left(n^{3}+3n^{2}+5n\right)\vdots 3$

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення висловлення.
2. Яких значень може набувати висловлення?
3. Дайте означення логічної операції.
4. Які логічні операції використовують?
5. Що називають таблицею істинності?
6. Скільки інтерпретацій має формула?
7. Що називають тавтологією?
8. Що називають протиріччям?
9. Дайте означення області істинності формули.
10. Дайте означення області хибності формули.
11. Дайте означення кон’юнктивної нормальної форми.
12. Дайте означення диз’юнктивної нормальної форми.
13. Сформулюйте алгоритм побудови нормальних форм.
14. Сформулюйте принцип математичної індукції.