

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3

Тема: Відношення. Способи задання відношень. Операції над відношеннями

Теоретичні відомості

Відношенням R множин X та Y називається довільна підмножина декартова добутку $X \times Y$: $R \subseteq X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$.

Якщо $(x, y) \in R$, то це записують xRy .

У кожного відношення є область визначення та множина значень.

Множина перших координат впорядкованої пари відношення R називається **область визначення**: $D(R) = \{x : xRy\}$.

Множина значень утворює другі координати впорядкованої пари: $E(R) = \{y : xRy\}$.

Бінарне відношення – окремий випадок відношення на множині, яке встановлюється між двома елементами множини.

Приклад 1 Бінарне відношення на множині натуральних чисел N :

- R_1 – відношення $\leq$ («менше або дорівнює»), тоді $4 R_1 9$ та $5 R_1 5$.
- R_2 – відношення «ділиться на», тоді $4 R_2 2$, $49 R_2 7$, $m R_2 1$ для будь-якого натурального m .
- R_3 – відношення «є взаємно простими», тоді $15 R_3 8$, $366 R_3 121$, $1001 R_3 612$.
- R_4 – відношення «складається з однакових цифр», тоді $127 R_4 721$, $230 R_4 302$, $3231 R_4 3213311$.

Приклад 2 Для бінарного відношення $\rho = \{(x, y) : x^2 = y\}$, визначеного на множині R , знайдіть область визначення, область значень та нарисуйте декартову діаграму.

Розв'язання. У відповідності з означенням

$$D(\rho) = \{x \in R : \exists y (x, y) \in \rho\} = R,$$

$$E(\rho) = \{y \in R : \exists x (x, y) \in \rho\} = R^+ \cup \{0\}.$$

Декартова діаграма для даного бінарного відношення зображена на рис. 3.1.

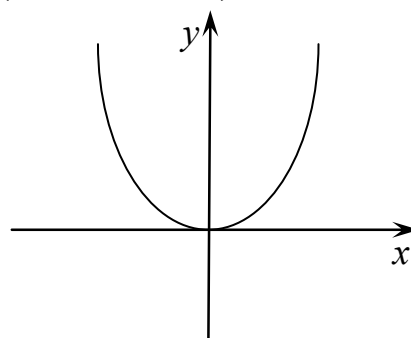


Рисунок 3.1 – Декартова діаграма бінарного відношення ρ

Відношення називається **оберненим** до відношення R , якщо воно складається з таких пар (y, x) , для яких: $R^{-1} = \{(y, x) : xRy\}$, $(R^{-1})^{-1} = R$.

Приклад 3 Знайти обернене відношення:

- нехай $R = \{(r, 1), (s, 1), (s, 3)\}$, тоді $R^{-1} = \{(1, r), (1, s), (3, s)\}$;

– нехай R – відношення $\{(x, y) : y \in \text{чоловіком } x\}$, тоді R^{-1} відношення $\{(y, x) : x \in \text{дружиною } y\}$.

Нехай $R \subseteq X \times Y$. Якщо $x \in X$, то **перерізом** відношення R по елементу x називається множина $R(x)$, яка складається з таких елементів $y \in Y$, для яких виконується $(x, y) \in R$.

Множина, яка складається з перерізів відношення $R \subseteq X \times Y$ по кожному з елементів множини X , називається **фактор-множиною** множини Y по відношенню R й позначається Y / R : $Y / R = \{R(x) \text{ для будь-якого } x \in X\}$.

Приклад 4 Нехай на множинах $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ і $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ задано відношення $R \subseteq X \times Y$ наступним чином $R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 4), (d, 1), (f, 4)\}$.

Переріз $R(a) = \{1, 2\}$, $R(e) = \emptyset$.

Фактор-множина буде складатися з елементів: $Y / R = \{\{1, 2\}, \{4\}, \{1\}\}$ або у вигляді таблиці:

a	b	d	f
$\{1, 2\}$	$\{4\}$	$\{1\}$	$\{4\}$

Нехай $R \subseteq X \times Y$ – відношення на $X \times Y$, а $S \subseteq V \times W$ – відношення на $V \times W$. **Композицією** відношень R та S називається відношення $T \subseteq X \times W$, визначене таким чином:

$$T = \{(a, c) : \text{існує такий елемент } b \in B, \text{ що } (a, b) \in R, (b, c) \in S\}.$$

Ця множина позначається $T = S \circ R$.

Приклад 5 Нехай $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$, $C = \{*, \#, !, \&\}$ й нехай відношення $R \subseteq X \times Y$ і $S \subseteq V \times W$ задано у вигляді:

$$R = \{(1, x), (1, y), (3, x)\}, \quad S = \{(x, *), (x, \#), (y, !), (y, \&)\}.$$

Тоді $S \circ R = \{(1, *), (1, \#), (1, !), (1, \&), (3, *), (3, \#)\}$.

Окрім можливості задавати відношення у вигляді фактор-множини, існує ще два способи. Розглянемо їх.

Матричний спосіб ґрунтується на поданні відношення $R \subseteq A \times B$ відповідною йому прямокутною таблицею (матрицею), що складається з нулів та одиниць, де рядки – перші координати, а стовпці – другі, причому на перетині i -го рядка і j -го стовпця буде 1, якщо виконується співвідношення $a_i R b_j$, або 0 – якщо воно не виконується.

Матриця повного (універсального) відношення – це квадратна матриця, що складається лише з одиниць. Матриця тотожного (діагонального) відношення – це квадратна матриця, яка складається з нулів та одиниць по головній діагоналі. Матриця порожнього відношення – це квадратна матриця, що складається лише з нулів.

Відношення $R \subseteq A \times B$ можна також зображати за допомогою **орієнтованого графа**.

Елементи множин A та B зображуються точками на площині (вершини), а впорядковані пари – лінією зі стрілкою (дуги), яка направлена від a до b , якщо aRb .

Граф бінарного відношення – це дводольний граф. Відношення в A зображується графом із вершинами, що відповідають елементам цієї множини. Якщо a_iRa_j і a_jRa_i , то вершини зв'язуються двома протилежно спрямованими дугами, які умовно можна замінювати однією не спрямованою дугою (ребром). Співвідношенню a_iAa_i відповідає петля.

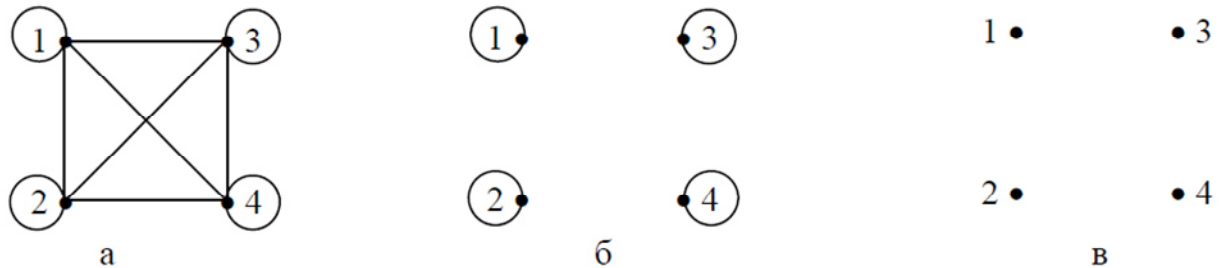


Рисунок 3.2 – Графи універсального (а), тотожного (б) та порожнього (в) відношень

Приклад 6 Нехай $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4,5,6\}$. Відношення $R=\{(1,2), (1,4), (2,3), (3,3), (3,6)\}$. Очевидно, $R(1)=\{2,4\}$, $R(2)=\{3\}$, $R(3)=\{3,6\}$. Множина $\{R(1), R(2), R(3)\}$ є фактор-множиною B/R .

Матриця відношення буде мати такий вигляд:

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Для наведеного вище відношення граф буде мати наступний вигляд:

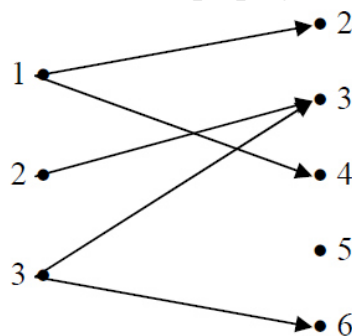


Рисунок 3.3 – Приклад представлення відношення за допомогою графа

Матриця оберненого відношення R^{-1} для відношення R – це транспонована матриця відношення R . Граф оберненого відношення R^{-1} утворюється із графа відношення R заміною всіх дуг на протилежні.

Матриця композиції відношень $T=R \circ S$ утворюється як добуток матриць відношень R та S з подальшою заміною відмінних від нуля елементів одиницями.

Справді, елемент t_{ik} матриці композиції знайдемо як суму добутків відповідних елементів матриць R та S (відповідно до правила множення матриць):

$$r_{ij}s_{jk} = 1 \Leftrightarrow r_{ij} = 1 \text{ та } s_{jk} = 1 \Leftrightarrow a_i R b_j \text{ та } b_j S c_k \Leftrightarrow a_i R \circ S c_k.$$

Якщо у виразі t_{ik} не один, а кілька одиничних доданків, то кожен з них відповідає одному й тому самому співвідношенню $a_i R \circ S c_k$, через що їх сума має бути замінена одиницею.

Для композиції відношень $R = \{(1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4)\}$ та $S = \{(1,1), (1,2), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (4,2), (4,3)\}$ матриця утворюється так:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай $R \subseteq A \times B$ та $S \subseteq B \times C$. Щоб побудувати граф $T = R \circ S$, потрібно до графа відношення R добудувати граф відношення S . Граф композиції відношень дістанемо, якщо вилучимо вершини, які відповідають елементам множини B . При вилученні вершини b_j кожний шлях, що проходить через неї від вершин множини A до вершин множини C , замінюється однією дугою з тим самим напрямком.

Для останнього прикладу маємо наступний граф:

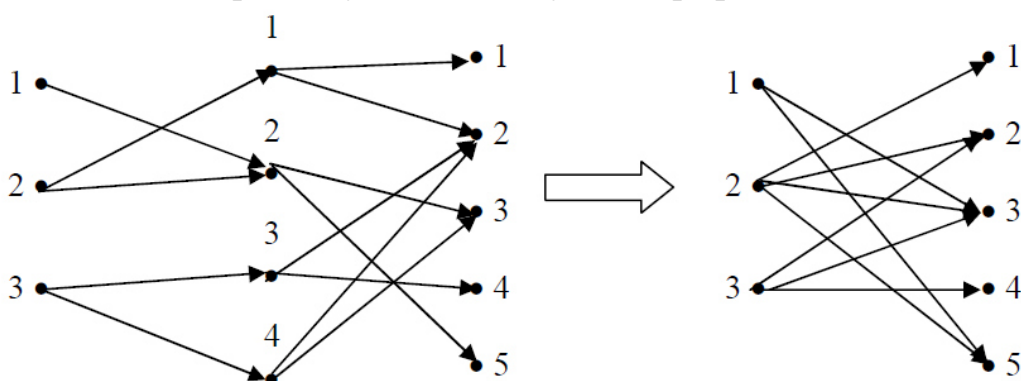


Рисунок 3.4 – Граф композиції відношень

ЗАДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. Дано множини A, B, C (табл. 3.1). Задати відношення R_i (табл. 3.1) в явній формі, записати його матрицю та граф. Знайти область визначення та область значень заданих відношень.

Таблиця 3.1

n	множини A, B, C	відношення R_i
1.	$A=\{1,4,5,6,9\}, B=\{8,3,6\}, C=\{2,7,3\}$	а) $(a,b) \in R_1 \Leftrightarrow (a-b):(3+h);$ б) $(a,c) \in R_2 \Leftrightarrow (a+c):(ch)$
2.	$A=\{2,9,12,14\}, B=\{3,7,9\}, C=\{2,3,4\}$	а) $(a,b) \in R_1 \Leftrightarrow (a+b):(4-h);$ б) $(a,c) \in R_2 \Leftrightarrow (a-c):(2h+1)$
3.	$A=\{1,2,5,9,13\}, B=\{6,7,3,4\},$ $C=\{1,2,3\}$	а) $(a,b) \in R_1 \Leftrightarrow a:(bh);$ б) $(a,c) \in R_2 \Leftrightarrow (a+c):(c+h)$
4.	$A=\{1,3,4,5,6\}, B=\{7,18\}, C=\{4,2,14\}$	а) $(a,b) \in R_1 \Leftrightarrow (a-b):(5-h);$ б) $(c,b) \in R_2 \Leftrightarrow (c+4+h):b$
5.	$A=\{2,5,7,8\}, B=\{1,3,4,8\}, C=\{1,2,3\}$	а) $(a,b) \in R_1 \Leftrightarrow (a-b):4h;$ б) $(a,b) \in R_2 \Leftrightarrow (a+b):(2b+h)$
6.	$A=\{3,5,7,9,11\}, B=\{4,3,6\}, C=\{1,3,2\}$	а) $(a,b) \in R_1 \Leftrightarrow (a+b):4h;$ б) $(c,b) \in R_2 \Leftrightarrow cb < 2b+h$
7.	$A=\{3,5,7,9,11\}, B=\{3,2,5\}, C=\{1,2,9\}$	а) $(a,b) \in R_1 \Leftrightarrow (a-b):3h;$ б) $(c,a) \in R_2 \Leftrightarrow c+a=2a+h$
8.	$A=\{3,5,7,9,11\}, B=\{4,3,6\}, C=\{1,3,2\}$	а) $(a,b) \in R_1 \Leftrightarrow (a+b):3h;$ б) $(b,b) \in R_2 \Leftrightarrow b+h \leq \frac{b}{2}$
9.	$A=\{1,2,5,9,13\}, B=\{6,7,3,4\},$ $C=\{1,2,3\}$	а) $(c,b) \in R_1 \Leftrightarrow 6-h < 2c+2b < 10;$ б) $(a,b) \in R_2 \Leftrightarrow (a-b+h) > 2$
10.	$A=\{3,6,9,12\}, B=\{1,2,13\}, C=\{2,4,6\}$	а) $(a,b) \in R_1 \Leftrightarrow (a-b):(5-h);$ б) $(a,c) \in R_2 \Leftrightarrow a-c < h$
11.	$A=\{1,7,8,3\}, B=\{2,4,0\}, C=\{3,2,10\}$	а) $(a,b) \in R_1 \Leftrightarrow ab:2h;$ б) $(c,a) \in R_2 \Leftrightarrow c-a < 2a+h$
12.	$A=\{1,4,5,6,9\}, B=\{8,3,6\}, C=\{2,7,3\}$	а) $(b,a) \in R_1 \Leftrightarrow ba:2h;$ б) $(a,c) \in R_2 \Leftrightarrow ca < 3h$
13.	$A=\{2,9,12,14\}, B=\{3,7,9\}, C=\{2,3,4\}$	а) $(a,b) \in R_1 \Leftrightarrow (a+b):2(b-h);$ б) $(a,c) \in R_2 \Leftrightarrow (a+c):h(a-c)$

n	множини A, B, C	відношення R_i
14.	$A=\{1,4,5,6,9\}, B=\{8,3,6\}, C=\{2,7,3\}$	а) $(a,b) \in R_1 \Leftrightarrow (a-b):(5+h);$ б) $(a,c) \in R_2 \Leftrightarrow a-c < h-1$
15.	$A=\{2,9,12,14\}, B=\{3,7,9\}, C=\{2,3,4\}$	а) $(a,b) \in R_1 \Leftrightarrow ab:(2h+1);$ б) $(c,a) \in R_2 \Leftrightarrow c-a < 2a-h$
16.	$A=\{1,2,5,9,13\}, B=\{6,7,3,4\},$ $C=\{1,2,3\}$	а) $(b,a) \in R_1 \Leftrightarrow ba:(2h+3);$ б) $(a,c) \in R_2 \Leftrightarrow ca < 3h-1$
17.	$A=\{1,3,4,5,6\}, B=\{7,18\}, C=\{4,2,14\}$	а) $(a,b) \in R_1 \Leftrightarrow (a+b):(5h-3);$ б) $(a,c) \in R_2 \Leftrightarrow a+2c < h$
18.	$A=\{2,5,7,8\}, B=\{1,3,4,8\}, C=\{1,2,3\}$	а) $(a,b) \in R_1 \Leftrightarrow ab:(2h+1);$ б) $(c,a) \in R_2 \Leftrightarrow c+a+3 < 2a+3h$
19.	$A=\{3,5,7,9,11\}, B=\{4,3,6\}, C=\{1,3,2\}$	а) $(b,a) \in R_1 \Leftrightarrow (ba+1):2h;$ б) $(a,c) \in R_2 \Leftrightarrow ca < 3h-1$
20.	$A=\{3,5,7,9,11\}, B=\{3,2,5\}, C=\{1,2,9\}$	а) $(a,b) \in R_1 \Leftrightarrow (a+b):3h;$ б) $(b,b) \in R_2 \Leftrightarrow b+h \leq \frac{b}{2}$
21.	$A=\{1,4,5,16,19\}, B=\{8,13,16\},$ $C=\{2,7,13\}$	а) $(a,b) \in R_1 \Leftrightarrow (a-b):(3+2h);$ б) $(a,c) \in R_2 \Leftrightarrow (a+c):(c+h)$
22.	$A=\{2,9,12,24\}, B=\{3,7,19\},$ $C=\{2,3,14\}$	а) $(a,b) \in R_1 \Leftrightarrow (a+b):(4-3h);$ б) $(a,c) \in R_2 \Leftrightarrow (a-c):(2h-1)$
23.	$A=\{1,2,5,19,23\}, B=\{6,7,13,14\},$ $C=\{1,2,13\}$	а) $(a,b) \in R_1 \Leftrightarrow a:(b+h);$ б) $(a,c) \in R_2 \Leftrightarrow (a+c):(c-2h)$
24.	$A=\{1,3,4,15,16\}, B=\{7,18\},$ $C=\{4,12,24\}$	а) $(a,b) \in R_1 \Leftrightarrow (a-2b):(5-h);$ б) $(c,b) \in R_2 \Leftrightarrow (2c+4+h):b$
25.	$A=\{2,5,7,18\}, B=\{1,3,4,18\},$ $C=\{1,2,13\}$	а) $(a,b) \in R_1 \Leftrightarrow (2a-b):2h;$ б) $(a,b) \in R_2 \Leftrightarrow (2a+3b):(2b+h)$

2. Для даних відношень R_i (табл. 3.3)¹:

– знайдіть $R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$, $R_1 \circ R_2 \circ R_3$ та R_4^2 ;

– запишіть кожне задане та отримане відношення за допомогою графа та матриці.

¹ варіант обирати з розрахунку $N = h \cdot n$

Таблиця 3.3

N	відношення R_i	N	відношення R_i
1.	$R_1=\{(b,a), (c,e), (d,i), (f,o), (g,u)\};$ $R_2=\{(a,g), (w,e), (i,c), (y,o), (u,b)\};$ $R_3=\{(a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (c,a),$ $(a,c), (d,e), (e,d)\};$ $R_4=\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4),$ $(4,1), (4,4)\}$	2.	$R_1=\{(z,a), (y,e), (d,i), (f,o), (g,u)\};$ $R_2=\{(v,a), (e,d), (x,i), (y,o), (u,z)\};$ $R_3=\{(a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (c,d),$ $(d,c), (d,e), (e,d), (b,e), (e,b),$ $(b,d), (d,b)\};$ $R_4=\{(1,1), (1,2), (2,1)\}$
3.	$R_1=\{(a,1), (b,3), (4,d), (c,4), (b,2)\};$ $R_2=\{(a,2), (b,2), (d,3), (d,a), (b,4),$ $(1,b)\}$ $R_3=\{(a,b), (a,a), (b,c), (e,b), (e,a),$ $(a,c), (e,e), (e,d)\}$ $R_4=\{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2),$ $(3,3), (4,1), (4,4)\}$	4.	$R_1=\{(b,a), (c,e), (d,i), (f,o), (g,u)\}$ $R_2=\{(a,b), (e,c), (x,d), (y,d), (z,g)\}$ $R_3=\{(a,b), (e,a), (b,c), (c,b), (c,d),$ $(d,c), (b,e), (e,b), (b,d), (d,a)\}$ $R_4=\{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2),$ $(4,3)\}$
5.	$R_1=\{(b,a), (c,e), (d,i), (f,o), (g,u)\}$ $R_2=\{(a,d), (g,e), (i,x), (o,e), (z,c)\}$ $R_3=\{(a,b), (b,b), (b,c), (c,b), (e,a),$ $(d,e), (e,b)\}$ $R_4=\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2),$ $(2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$	6.	$R_1=\{(a,e), (b,w), (o,f), (i,g), (o,d),$ $(u,g)\}$ $R_2=\{(f,a), (w,w), (f,f), (y,b), (z,u)\}$ $R_3=\{(a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (c,d),$ $(d,c), (d,e), (e,d), (b,e), (e,b),$ $(b,d), (d,b)\}$ $R_4=\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,3)\}$
7.	$R_1=\{(b,a), (c,e), (d,e), (d,i), (f,o),$ $(f,u)\}$ $R_2=\{(v,f), (w,d), (i,c), (y,o), (u,a)\}$ $R_3=\{(a,b), (b,d), (c,b), (c,e), (e,d),$ $(d,b), (e,e)\}$ $R_4=\{(1,1), (2,2), (3,2), (3,3), (4,4)\}$	8.	$R_1=\{(d,f), (b,w), (c,e), (d,y), (f,o),$ $(g,u)\}$ $R_2=\{(v,a), (w,e), (x,d), (y,b), (z,f)\}$ $R_3=\{(a,b), (b,b), (b,d), (c,b), (c,c),$ $(e,d), (d,b), (e,e)\}$ $R_4=\{(1,1), (1,2), (1,3)\}$
9.	$R_1=\{(c,c), (b,a), (c,e), (c,w), (f,o),$ $(u,u)\}$ $R_2=\{(c,d), (w,e), (x,i), (y,f), (z,u)\}$ $R_3=\{(a,b), (e,a), (c,b), (c,d), (d,c),$ $(b,e), (e,b), (b,d), (d,a)\}$ $R_4=\{(1,1), (2,1), (2,2), (2,3)\}$	10.	$R_1=\{(b,b), (b,a), (c,e), (d,z), (o,f),$ $(g,u)\}$ $R_2=\{(f,a), (w,b), (f,f), (o,o), (z,d)\}$ $R_3=\{(a,b), (e,a), (b,c), (c,b), (c,d),$ $(d,c), (b,e), (d,b), (b,d), (d,a)\}$ $R_4=\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3),$ $(3,3)\}$
11.	$R_1=\{(a,a), (b,a), (c,e), (d,i), (f,o),$ $(g,u)\}$ $R_2=\{(v,a), (v,b), (w,w), (v,f), (x,i),$ $(x,f), (y,e), (a,d), (z,u)\}$ $R_3=\{(a,b), (b,c), (c,d), (d,a), (d,e),$ $(e,d), (b,c), (e,b), (b,d), (d,b)\}$ $R_4=\{(1,3), (3,1)\}$	12.	$R_1=\{(g,a), (b,a), (c,e), (d,i), (f,o),$ $(g,u)\}$ $R_2=\{(a,a), (v,b), (v,v), (v,i), (x,i),$ $(x,g), (y,o), (z,a), (u,e)\}$ $R_3=\{(a,b), (b,a), (b,c), (e,b), (c,a),$ $(a,d), (d,e), (e,d)\}$ $R_4=\{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,1),$ $(3,4)\}$

N	відношення R_i	N	відношення R_i
13.	$R_1 = \{(v,a), (w,e), (x,i), (y,o), (z,u)\}$ $R_2 = \{(b,x), (e,c), (d,i), (a,b), (g,z)\}$ $R_3 = \{(a,b), (b,a), (b,c), (c,d), (d,c), (d,e), (b,e), (e,d), (b,d), (d,b)\}$ $R_4 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$	14.	$R_1 = \{(x,a), (y,e), (d,i), (u,o), (g,u)\};$ $R_2 = \{(a,a), (w,e), (x,d), (o,b), (z,u)\};$ $R_3 = \{(a,b), (b,a), (b,b), (c,a)\};$ $R_4 = \{(1,1), (2,1), (2,2), (2,3)\}$
15.	$R_1 = \{(b,a), (c,e), (d,i), (f,o), (g,u)\};$ $R_2 = \{(e,a), (a,e), (x,g), (y,f), (z,u)\};$ $R_3 = \{(a,b), (b,a), (b,c), (c,d), (d,c), (d,e), (b,e), (e,d), (b,d), (d,b)\};$ $R_4 = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,1), (3,4)\}$	16.	$R_1 = \{(c,a), (c,e), (d,c), (f,o), (g,u)\}$ $R_2 = \{(a,b), (e,d), (x,d), (y,d), (z,g)\}$ $R_3 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,c), (c,b)\}$ $R_4 = \{(1,3), (2,1)\}$
17.	$R_1 = \{(a,1), (b,3), (d,4), (c,4), (b,2)\};$ $R_2 = \{(2,c), (3,b), (1,d), (4,b), (1,b)\}$ $R_3 = \{(a,b), (e,a), (b,c), (c,b), (c,d), (d,c), (b,e), (d,b), (b,d), (d,a)\}$ $R_4 = \{(1,1), (1,4), (1,3), (2,3), (4,3)\}$	18.	$R_1 = \{(a,e), (b,f), (i,g), (o,d), (u,b)\}$ $R_2 = \{(f,a), (e,w), (f,d), (y,o), (z,u)\}$ $R_3 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (c,c)\}$ $R_4 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,3)\}$
19.	$R_1 = \{(c,b), (b,a), (c,e), (d,i), (g,u)\}$ $R_2 = \{(e,a), (b,b), (v,v), (i,i), (x,i), (x,w), (y,c), (z,g), (z,u)\}$ $R_3 = \{(a,b), (b,b), (b,d), (c,b), (c,c), (e,d), (d,b), (e,e)\}$ $R_4 = \{(1,2), (2,5), (3,4), (4,3), (5,1)\}$	20.	$R_1 = \{(a,f), (b,a), (c,e), (b,i), (f,o)\}$ $R_2 = \{(u,a), (w,i), (f,b), (y,o), (i,c)\}$ $R_3 = \{(a,b), (b,e), (b,d), (c,b), (c,c), (e,d), (d,b)\}$ $R_4 = \{(2,1), (1,2), (1,3), (3,3)\}$
21.	$R_1 = \{(b,a), (c,e), (d,e), (d,i), (f,o), (f,u)\}$ $R_2 = \{(v,f), (e,e), (x,i), (y,o), (z,d)\}$ $R_3 = \{(a,b), (b,d), (c,b), (c,e), (e,d), (d,b), (e,e)\}$ $R_4 = \{(1,1), (2,3), (3,2), (4,5), (5,4)\}$	22.	$R_1 = \{(c,w), (b,a), (c,e), (d,i), (g,u)\}$ $R_2 = \{(e,a), (w,b), (f,d), (y,g), (z,u)\}$ $R_3 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,c), (c,b)\}$ $R_4 = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (3,2)\}$
23.	$R_1 = \{(c,c), (b,a), (c,e), (i,c), (f,o), (u,u)\}$ $R_2 = \{(c,a), (e,e), (x,i), (y,o), (z,u)\}$ $R_3 = \{(a,b), (e,a), (c,b), (c,d), (d,c), (b,e), (e,b), (b,d), (d,a)\}$ $R_4 = \{(1,4), (2,1), (3,3), (4,2), (5,5)\}$	24.	$R_1 = \{(g,a), (b,a), (c,e), (d,i), (f,o), (g,u)\}$ $R_2 = \{(a,a), (v,b), (a,d), (v,i), (x,i), (x,w), (y,o), (z,a), (z,u)\}$ $R_3 = \{(a,a), (b,b), (c,a), (c,d), (d,c), (d,e), (b,e)\}$ $R_4 = \{(1,3), (2,4), (2,1), (1,4), (3,4)\}$
25.	$R_1 = \{(a,a), (b,a), (c,e), (d,i), (f,o), (g,u)\}$ $R_2 = \{(v,b), (v,b), (e,e), (v,i), (x,i), (x,g), (y,o), (a,a), (z,u)\}$ $R_3 = \{(a,b), (b,c), (c,d), (d,a), (d,e), (e,d), (b,c), (e,b), (b,d), (d,b)\}$ $R_4 = \{(1,3), (2,1), (3,5), (4,2), (5,4)\}$	26.	$R_1 = \{(c,a), (b,a), (c,e), (d,i), (a,o), (g,u)\}$ $R_2 = \{(x,a), (v,b), (v,v), (v,i), (x,i), (x,y), (o,d), (z,a), (e,b)\}$ $R_3 = \{(c,a), (b,b), (c,c), (c,d), (d,d), (b,e)\}$ $R_4 = \{(1,1), (1,2), (2,3), (1,3)\}$

N	відношення R_i	N	відношення R_i
27.	$R_1 = \{(v,v), (w,e), (x,i), (y,o), (z,u)\}$ $R_2 = \{(b,a), (v,e), (d,z), (f,w), (i,d)\}$ $R_3 = \{(a,b), (b,a), (b,c), (c,d), (d,c), (d,e), (b,e), (e,d), (b,d), (d,b)\}$ $R_4 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$	28.	$R_1 = \{(c,a), (c,e), (d,i), (a,o), (g,u)\}$ $R_2 = \{(x,a), (v,b), (v,v), (v,g), (e,c), (x,d), (w,o), (a,a), (z,u)\}$ $R_3 = \{(c,a), (b,b), (c,c), (c,d), (d,d), (b,e)\}$ $R_4 = \{(1,3), (2,4), (3,2), (4,1), (5,5)\}$
29.	$R_1 = \{(a,1), (b,3), (d,4), (c,4), (b,2)\};$ $R_2 = \{(2,b), (3,d), (1,d), (4,b), (1,b)\}$ $R_3 = \{(a,b), (e,a), (b,c), (c,b), (c,d), (d,c), (b,e), (d,b), (b,d), (d,a)\}$ $R_4 = \{(1,3), (2,2), (3,4), (4,5), (5,1)\}$	30.	$R_1 = \{(a,e), (b,w), (i,g), (o,d), (u,b)\}$ $R_2 = \{(b,a), (e,c), (f,d), (y,o), (z,u)\}$ $R_3 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (c,c)\}$ $R_4 = \{(1,5), (2,1), (3,4), (4,2), (5,3)\}$
31.	$R_1 = \{(c,b), (b,a), (c,e), (d,i), (g,u)\}$ $R_2 = \{(v,a), (b,b), (v,c), (v,i), (x,i), (x,g), (u,e), (z,a), (z,u)\}$ $R_3 = \{(a,b), (b,b), (b,d), (c,b), (c,c), (e,d), (d,b), (e,e)\}$ $R_4 = \{(1,2), (2,4), (3,1), (4,3), (5,5)\}$	32.	$R_1 = \{(a,f), (b,a), (c,e), (b,i), (f,o)\}$ $R_2 = \{(i,a), (w,i), (f,b), (y,o), (z,u)\}$ $R_3 = \{(a,b), (b,e), (b,d), (c,b), (c,c), (e,d), (d,b)\}$ $R_4 = \{(1,1), (2,3), (3,5), (4,2), (5,4)\}$
33.	$R_1 = \{(b,a), (c,e), (d,e), (d,i), (f,o), (f,u)\}$ $R_2 = \{(v,a), (w,d), (a,e), (y,o), (e,c)\}$ $R_3 = \{(a,b), (b,d), (c,b), (c,e), (e,d), (d,b), (e,e)\}$ $R_4 = \{(1,3), (2,1), (3,2), (4,4), (5,5)\}$	34.	$R_1 = \{(c,b), (b,a), (c,e), (d,i), (g,u)\}$ $R_2 = \{(y,a), (b,w), (f,g), (i,a), (z,u)\}$ $R_3 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,c), (c,b)\}$ $R_4 = \{(1,5), (2,2), (3,4), (4,1), (5,3)\}$
35.	$R_1 = \{(c,c), (b,a), (c,e), (c,i), (f,o), (u,u)\}$ $R_2 = \{(v,a), (a,e), (x,c), (y,o), (o,d)\}$ $R_3 = \{(a,b), (e,a), (c,d), (d,c), (b,e), (e,b), (b,d), (d,a)\}$ $R_4 = \{(1,5), (2,3), (3,1), (4,2), (5,4)\}$	36.	$R_1 = \{(g,a), (b,a), (c,e), (d,i), (f,o)\}$ $R_2 = \{(a,a), (v,b), (v,v), (v,i), (x,i), (x,g), (y,f), (a,b), (z,u)\}$ $R_3 = \{(a,a), (e,b), (c,a), (c,d), (d,c), (d,e), (b,e)\}$ $R_4 = \{(1,4), (2,5), (3,1), (4,3), (5,2)\}$
37.	$R_1 = \{(a,a), (b,a), (c,e), (d,i), (f,o), (g,u)\}$ $R_2 = \{(e,a), (v,b), (w,w), (v,i), (x,i), (x,w), (o,d), (z,d), (z,u)\}$ $R_3 = \{(a,b), (b,c), (c,d), (d,a), (d,e), (e,d), (b,c), (e,b), (b,d), (d,b)\}$ $R_4 = \{(1,3), (2,2), (3,1), (4,5), (5,4)\}$	38.	$R_1 = \{(c,a), (b,a), (c,e), (d,x), (a,o), (g,u)\}$ $R_2 = \{(x,a), (v,b), (v,v), (v,i), (x,b), (x,y), (a,o), (z,a), (z,u)\}$ $R_3 = \{(c,a), (b,b), (c,c), (c,d), (d,d), (b,e)\}$ $R_4 = \{(1,2), (2,3), (3,1), (4,5), (5,4)\}$
39.	$R_1 = \{(v,d), (w,e), (x,i), (y,b), (z,u)\}$ $R_2 = \{(b,a), (c,e), (d,d), (f,y), (g,u)\}$ $R_3 = \{(a,b), (b,a), (b,c), (c,d), (d,c), (d,e), (b,e), (e,d), (b,d), (d,b)\}$ $R_4 = \{(1,4), (2,5), (3,2), (4,3), (5,1)\}$	40.	$R_1 = \{(d,a), (b,a), (c,e), (d,i), (a,o), (g,u)\}$ $R_2 = \{(x,a), (a,b), (v,v), (i,c), (x,i), (x,y), (o,o), (z,a), (z,u)\}$ $R_3 = \{(c,a), (b,b), (c,c), (c,d), (d,d)\}$ $R_4 = \{(1,5), (2,4), (3,1), (4,3), (5,2)\}$

N	відношення R_i	N	відношення R_i
41.	$R_1=\{(b,a), (c,i), (d,i), (f,o), (g,g)\};$ $R_2=\{(a,g), (w,e), (i,c), (y,o), (u,b)\};$ $R_3=\{(a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (c,a),$ $(a,c), (d,e), (e,d)\};$ $R_4=\{(1,1), (1,3), (2,1), (2,2), (3,4),$ $(3,1), (4,4)\}$	42.	$R_1=\{(k,a), (y,e), (d,i), (f,o), (g,u)\};$ $R_2=\{(v,a), (e,d), (x,i), (y,o), (u,k)\};$ $R_3=\{(a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (c,d),$ $(d,c), (d,e), (e,d), (b,e), (e,b),$ $(b,d), (d,b)\};$ $R_4=\{(1,1), (1,2), (2,2)\}$
43.	$R_1=\{(a,1), (b,3), (4,d), (c,4), (d,2)\};$ $R_2=\{(a,2), (b,2), (d,3), (d,a), (b,4),$ $(1,c)\}$ $R_3=\{(a,k), (a,a), (k,c), (e,k), (e,a),$ $(a,c), (e,e), (e,d)\}$ $R_4=\{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2),$ $(3,3), (4,1), (4,4)\}$	44.	$R_1=\{(k,a), (c,e), (d,i), (f,o), (g,u)\}$ $R_2=\{(a,k), (e,c), (x,d), (y,d), (z,g)\}$ $R_3=\{(a,k), (e,a), (k,c), (c,k), (c,d),$ $(d,c), (k,e), (e,b), (k,d), (d,a)\}$ $R_4=\{(2,1), (3,1), (3,4), (4,1), (4,2),$ $(4,4)\}$
45.	$R_1=\{(k,a), (c,e), (d,i), (f,o), (g,u)\}$ $R_2=\{(a,d), (g,e), (i,x), (o,e), (z,c)\}$ $R_3=\{(a,k), (k,k), (k,c), (c,k), (e,a),$ $(d,e), (e,k)\}$ $R_4=\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1),$ $(2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,1)\}$	46.	$R_1=\{(a,e), (k,w), (o,f), (i,g), (o,d),$ $(u,g)\}$ $R_2=\{(f,a), (w,w), (f,f), (y,k), (z,u)\}$ $R_3=\{(a,k), (k,a), (k,c), (c,k), (c,d),$ $(d,c), (d,e), (e,d), (k,e), (e,k),$ $(k,d), (d,k)\}$ $R_4=\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,2)\}$
47.	$R_1=\{(b,a), (c,k), (d,k), (d,i), (f,o),$ $(f,u)\}$ $R_2=\{(v,f), (w,d), (i,c), (y,o), (u,a)\}$ $R_3=\{(a,b), (b,d), (c,b), (c,k), (k,d),$ $(d,b), (k,k)\}$ $R_4=\{(1,1), (2,1), (3,1), (3,3), (4,4)\}$	48.	$R_1=\{(d,f), (b,w), (c,k), (d,y), (f,o),$ $(g,u)\}$ $R_2=\{(v,a), (w,k), (x,d), (y,b), (z,f)\}$ $R_3=\{(a,b), (b,b), (b,d), (c,b), (c,c),$ $(k,d), (d,b), (k,k)\}$ $R_4=\{(1,1), (2,2), (2,3)\}$
49.	$R_1=\{(k,k), (b,a), (k,e), (k,w), (f,o),$ $(u,u)\}$ $R_2=\{(k,d), (w,e), (x,i), (y,f), (z,u)\}$ $R_3=\{(a,b), (e,a), (k,b), (k,d), (d,k),$ $(b,e), (e,b), (b,d), (d,a)\}$ $R_4=\{(1,3), (2,2), (2,3), (3,2)\}$	50.	$R_1=\{(b,b), (b,t), (c,e), (d,z), (o,f),$ $(g,u)\}$ $R_2=\{(f,t), (w,b), (f,f), (o,o), (z,d)\}$ $R_3=\{(t,b), (e,t), (b,c), (c,b), (c,d),$ $(d,c), (b,e), (d,b), (b,d), (d,t)\}$ $R_4=\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3),$ $(4,3)\}$

3. Записати фактор-множину множини A відношення $R \subseteq A \times B$ (табл. 3.4)², заданого на множинах $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ та $B=\{1,2,3,4,5\}$.

Таблиця 3.4

n	відношення	n	відношення
1.	$R=\{(a,1), (a,2), (a,5), (d,2), (e,1),$ $(e,3), (f,4)\}$	2.	$R=\{(c,1), (a,2), (b,4), (d,2), (e,1),$ $(e,3), (e,5)\}$

² варіант обирати з розрахунку $N = h \cdot n$

3.	$R=\{(a,1), (b,2), (g,3), (b,3), (a,4), (d,5), (f,4)\}$	4.	$R=\{(b,1), (c,2), (d,4), (d,2), (e,1), (g,3), (f,4)\}$
5.	$R=\{(a,1), (b,2), (c,4), (d,1), (e,1), (e,3), (f,4), (g,1)\}$	6.	$R=\{(a,1), (a,3), (c,4), (d,2), (e,1), (f,3), (g,5)\}$
7.	$R=\{(c,1), (c,2), (c,3), (d,1), (e,2), (e,3), (f,2), (g,5)\}$	8.	$R=\{(a,1), (b,2), (c,4), (d,2), (e,1), (e,3), (g,5)\}$
9.	$R=\{(b,1), (c,2), (a,5), (d,2), (e,1), (f,4), (f,5)\}$	10.	$R=\{(a,1), (a,2), (a,4), (c,2), (e,1), (e,5), (f,3)\}$
11.	$R=\{(b,1), (c,2), (c,3), (d,1), (e,1), (e,2), (f,2), (f,3)\}$	12.	$R=\{(a,1), (b,2), (a,4), (d,2), (e,1), (e,3), (f,4)\}$
13.	$R=\{(c,1), (a,2), (b,4), (d,2), (e,1), (a,3), (e,4)\}$	14.	$R=\{(b,3), (c,1), (d,4), (d,1), (e,1), (e,2), (f,4)\}$
15.	$R=\{(a,3), (a,4), (b,4), (d,2), (e,1), (e,3), (f,4)\}$	16.	$R=\{(c,1), (f,2), (b,4), (d,3), (e,1), (e,2), (e,4)\}$
17.	$R=\{(a,1), (b,1), (a,3), (b,2), (a,4), (d,1), (f,4)\}$	18.	$R=\{(a,1), (c,2), (d,3), (d,2), (e,1), (e,3), (f,4)\}$
19.	$R=\{(b,1), (b,2), (c,4), (d,2), (e,1), (e,3), (f,4), (f,1)\}$	20.	$R=\{(a,2), (a,3), (c,4), (d,2), (e,1), (b,3), (f,4)\}$
21.	$R=\{(c,1), (a,2), (c,3), (d,1), (e,2), (b,3), (f,2), (f,4)\}$	22.	$R=\{(b,1), (b,2), (c,4), (d,2), (e,1), (e,3), (a,4)\}$
23.	$R=\{(b,3), (c,2), (a,4), (d,2), (e,1), (f,1), (f,4)\}$	24.	$R=\{(a,1), (b,2), (b,3), (c,2), (e,1), (e,4), (f,3)\}$
25.	$R=\{(b,1), (c,2), (a,3), (d,1), (e,1), (d,2), (f,2), (f,3)\}$	26.	$R=\{(a,1), (b,4), (a,3), (d,2), (e,1), (e,3), (f,4)\}$
27.	$R=\{(c,3), (a,2), (b,4), (d,2), (e,1), (a,3), (e,4)\}$	28.	$R=\{(b,3), (a,1), (c,4), (d,1), (e,1), (e,2), (f,4)\}$
29.	$R=\{(a,4), (b,2), (a,3), (b,3), (e,4), (d,4), (f,4)\}$	30.	$R=\{(b,1), (c,2), (d,4), (e,2), (e,1), (f,3), (f,4)\}$
31.	$R=\{(a,1), (c,2), (c,4), (d,1), (e,1), (e,3), (f,4), (f,1)\}$	32.	$R=\{(b,1), (a,3), (c,4), (d,2), (e,1), (e,3), (f,4)\}$
33.	$R=\{(b,1), (c,2), (c,3), (d,1), (e,2), (e,3), (f,2), (f,4)\}$	34.	$R=\{(a,1), (b,3), (c,2), (d,3), (e,1), (e,3), (e,4)\}$
35.	$R=\{(a,3), (c,2), (a,4), (d,2), (e,1), (e,3), (f,4)\}$	36.	$R=\{(a,3), (a,2), (a,4), (c,2), (e,1), (b,2), (f,3)\}$
37.	$R=\{(b,1), (a,2), (c,3), (a,1), (e,1), (e,2), (f,2), (d,3)\}$	38.	$R=\{(a,1), (b,4), (a,4), (d,2), (e,1), (e,2), (f,4)\}$
39.	$R=\{(c,1), (a,2), (b,4), (d,2), (e,1), (f,3), (e,4)\}$	40.	$R=\{(a,2), (c,3), (b,4), (d,1), (e,1), (e,2), (f,4)\}$
41.	$R=\{(a,1), (a,2), (a,4), (d,2), (e,1), (e,3), (f,4)\}$	42.	$R=\{(c,1), (a,2), (b,4), (d,2), (e,1), (e,3), (e,4)\}$
43.	$R=\{(a,1), (b,2), (a,3), (b,3), (a,4), (d,4), (f,4)\}$	44.	$R=\{(b,1), (c,2), (d,4), (d,2), (e,1), (e,3), (f,4)\}$
45.	$R=\{(a,1), (b,2), (c,4), (d,1), (e,1), (e,3), (f,4), (f,1)\}$	46.	$R=\{(a,1), (a,3), (c,4), (d,2), (e,1), (f,3), (f,4)\}$

47.	$R=\{(c,1), (c,2), (c,3), (d,1), (e,2), (e,3), (f,2), (f,4)\}$	48.	$R=\{(a,1), (b,2), (c,4), (d,2), (e,1), (e,3), (e,4)\}$
49.	$R=\{(b,1), (c,2), (a,4), (d,2), (e,1), (f,3), (f,4)\}$	50.	$R=\{(a,1), (a,2), (a,4), (c,2), (e,1), (e,2), (f,3)\}$

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення декартова добутку множин? Воно є множиною?
2. Дайте означення підмножини.
3. Дайте означення відношення.
4. Дайте означення перерізу відношення: по елементу, по множині?
5. Дайте означення фактор-множини.
6. Дайте означення композиції двох відношень.
7. Назвіть способи задання відношень.
8. Дайте означення оберненого відношення.
9. Яким графом зображується повне відношення, тотожне відношення?
10. Яка матриця відповідає порожньому відношенню?