

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №6

Тема: Формули включення-виключення. Комбінаторика

В основі розв'язування багатьох комбінаторних задач лежить **формула включення-виключення**.

Нехай $A_1, A_2, \dots, A_n$ – підмножини деякої множини A , тоді число елементів в об'єднанні множин

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|, \end{aligned} \quad (6.1)$$

число елементів, що не належать об'єднанню множин $A_1, A_2, \dots, A_n$

$$\begin{aligned} |A \setminus A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= |A| - \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| - \\ &- \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Приклад 6.1 Знайдемо кількість додатних цілих чисел, що не перевищують 1000 та діляться на 7 або на 11. Позначимо як A множину чисел, що діляться на 7, B – множину чисел, що діляться на 11. Тоді

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{7 \cdot 11} \right\rfloor = 142 + 90 - 12 = 220.$$

Приклад 6.2 На вступному екзамені з математики було запропоновано три задачі: з алгебри, планіметрії й стереометрії. З 1000 абітурієнтів задачу з алгебри розв'язали 800, з планіметрії – 700, з стереометрії – 600 абітурієнтів. При цьому задачі з алгебри й планіметрії розв'язали 600 абітурієнтів, з алгебри й стереометрії – 500, з планіметрії й стереометрії – 400. Всі три задачі розв'язали 300 абітурієнтів. Чи існують абітурієнти, які не розв'язали жодної задачі, і якщо так, то скільки їх?

Розв'язання. Нехай U – множина всіх абітурієнтів, A – множина абітурієнтів, що розв'язали задачу з алгебри, B – множину абітурієнтів, що розв'язали задачу з планіметрії, C – множину абітурієнтів, що розв'язали задачу з стереометрії. За умовою $|U| = 1000$, $|A| = 800$, $|B| = 700$, $|C| = 600$, $|A \cap B| = 600$, $|A \cap C| = 500$, $|B \cap C| = 400$, $|A \cap B \cap C| = 300$.

У множину $A \cup B \cup C$ включені всі абітурієнти, що розв'язали хоча б одну задачу. Використовуючи формулу (6.1), будемо мати:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = \\ &= 800 + 700 + 600 - 600 - 500 - 400 + 300 = 900. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що не всі вступники розв'язали хоча б одну задачу.

Жодної задачі не розв'язали

$$n|U| - |A \cup B \cup C| = 1000 - 900 = 100 \text{ (абітурієнтів).}$$

Можливе розв'язання подібного типу задач за допомогою кругів Ейлера.

Приклад 6.3 У класі 30 чоловік. 20 з них щодня користуються метро, 15 – автобусом, 23 – тролейбусом, 10 – і метро, і тролейбусом, 12 – і метро, і автобусом, 9 – і тролейбусом, і автобусом. Скільки чоловік щодня користується всіма трьома видами транспорту?

Розв'язання.

1 спосіб. Використовуючи формулу (6.1)¹:

$$\begin{aligned}20 + 15 + 23 - 10 - 13 - 9 + x &= 30, \\27 + x &= 30, \\x &= 3.\end{aligned}$$

Таким чином, одержали кількість всіх учнів у класі, які щодня користуються всіма трьома видами транспорту.

2 спосіб. Для розв'язання знову скористаємося кругами Ейлера (рис. 6.1).

Нехай x чоловік користуються всіма трьома видами транспорту. Тоді користуються тільки метро й тролейбусом – $(10 - x)$ чоловік, тільки автобусом і тролейбусом – $(9 - x)$ чоловік, тільки метро й автобусом – $(12 - x)$ чоловік.

Знайдемо, скільки чоловік користується одним тільки метро:

$$20 - (12 - x) - (10 - x) - x = x - 2.$$

Аналогічно одержуємо: $x - 6$ – тільки автобусом і $x + 4$ – тільки тролейбусом, тому що всього 30 чоловік, складемо рівняння:

$$x + (12 - x) + (9 - x) + (10 - x) + (x + 4) + (x - 2) + (x - 6) = 30,$$

звідки $x = 3$.

Приклад 6.4 У трьох сьомих класах 70 хлопців. 3 з них 27 займаються в драмгуртку, 32 співають у хорі, 22 захоплюються спортом. У драмгуртку 10 хлопців з хору, у хорі 6 спортсменів, у драмгуртку 8 спортсменів; 3 спортсмена відвідують і драмгурток і хор. Скільки хлопців не співають у хорі, не захоплюються спортом і не займаються в драмгуртку? Скільки хлопців зайняті тільки спортом?

Розв'язання. Нехай Д – драмгурток, Х – хор, С – спорт (рис. 6.2). Тоді в колі Д – 27 хлопців, у колі Х – 32 чоловік, у колі С – 22 учня.

10 хлопців із драмгуртка, які співають у хорі, виявляться в загальній частині кіл Д и Х. Троє з них ще й спортсмени, вони виявляться в загальній частині всіх трьох кіл. Інші семеро спортом не захоплюються. Аналогічно, $8 - 3 = 5$ спортсменів, що не співають у хорі й $6 - 3 = 3$, що не відвідують драмгурток.

Бачимо, що

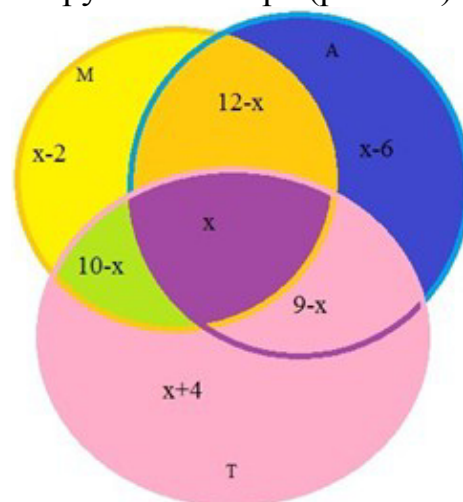


Рисунок 6.1

¹ Тут додали кількість учнів, які користуються хоча б одним видом транспорту й з отриманої суми відняли кількість тих, хто користується двома або трьома видами й, тому, увійшли в суму 2 – 3 рази.

$5 + 3 + 3 = 11$ спортсменів відвідують хор або драмгурток;

$22 - (5 + 3 + 3) = 11$ займаються тільки спортом;

$70 - (11 + 12 + 19 + 7 + 3 + 3 + 5) = 10$ – не співають у хорі, не займаються в драмгуртку, не захоплюються спортом.



Рисунок 6.2

У комбінаториці вивчають об'єкти зі скінченної множини та їх властивості, а також визначають кількість об'єктів із певними властивостями (табл. 6.1).

Основні правила комбінаторики

Правило суми. Якщо об'єкт x можна вибрати n_1 способами, а інший об'єкт y – n_2 способами, то можна вибрати або x , або y $n_1 + n_2$ способами.

Правило добутку. Якщо об'єкт x можна вибрати n_1 способами та після кожного такого вибору об'єкт y можна вибрати n_2 способами, то пару об'єктів (x, y) у зазначеному порядку можна вибрати $n_1 n_2$ способами. Це правило можна пояснити інакше. Нехай якусь процедуру можна виконати розв'язавши два завдання. Якщо є n_1 способів розв'язати перше завдання та n_2 способів розв'язати після цього друге завдання, то всю процедуру можна виконати $n_1 n_2$ способами.

Таблиця 6.1 – Основні формули комбінаторики

Вид вибірки	Без повторень	З повтореннями
Перестановки	$P_n = n!$	$\overline{P}_{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!}, \sum_i k_i = n$
Розміщення	$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$	$\tilde{A}_n^r = n^r$
Сполучення	$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$	$\tilde{C}_n^r = C_{n+r-1}^r$

Приклад 6.5 Чемпіонат, у якому беруть участь 16 команд, проводиться у два тури (тобто кожна команда двічі зустрічається з кожною з інших команд). Визначити, яка кількість зустрічей повинна бути проведена.

Розв'язання. У кожній зустрічі одну з команд назовемо «хазяїном», а другу – «гостем». Тоді кількість зустрічей дорівнює кількості пар «хазяїн-гість», що вибираються із цих 16 команд. Отже, повинне бути проведено

$$A_{16}^2 = \frac{16!}{(16-2)!} = 16 \cdot 15 = 240 \text{ зустрічей.}$$

Приклад 6.6 Скільки різних чотиризначних чисел можна скласти із цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, щоб у кожному числі була цифра 1? (Цифри в числі не повинні повторюватися).

Розв'язання. Чисел з одиницями на першому місці буде A_7^3 . Чисел з одиницями на другому місці (третьому, четвертому) місці, теж було б по A_7^3 , якби в даний набір цифр не входив би нуль. Тому варто виключити ті числа, де нуль стоїть на першому місці, а їх по A_6^2 . Таким чином:

$$A_7^3 + 3(A_7^3 - A_6^2) = 7 \cdot 6 \cdot 5 + 3(7 \cdot 6 \cdot 5 - 6 \cdot 5) = 750 \text{ чисел.}$$

Приклад 6.7 3 колоди, що містить 52 карти (з них 4 тузи), взяли 10 карт. У скількох випадках серед них буде хоча б один туз?

Розв'язання. Усього 10 карт із 52 можна вибрати C_{52}^{10} способами. Варіантів, коли серед цих 10 карт не є жодного туза, буде C_{48}^{10} . Тоді шукана кількість дорівнює $C_{52}^{10} - C_{48}^{10} = \frac{52!}{10!42!} - \frac{48!}{10!38!}$.

Приклад 6.8 Розв'язати рівняння $C_{x+2}^4 = x^2 - 1$.

Розв'язання.

1) $x \geq 2, \quad x \in \mathbb{N}$.

2) $\frac{(x+2)!}{4!(x-2)!} = x^2 - 1$. Після перетворень, будемо мати

$$(x-1)(x+1) \left(\frac{x(x+2)}{24} - 1 \right) = 0.$$

3) $\begin{cases} x^2 + 2x - 24 = 0, \\ x = 1, \\ x = -1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ або } x = -6, \\ x = 1, \\ x = -1. \end{cases} \quad \text{Таким чином, } x = 4.$

Приклад 6.9 Знайти x та y з пропорції $C_x^{y+1} : C_x^y : C_x^{y-1} = 2 : 2 : 1$.

Розв'язання.

1) До кожного члена пропорції лівої частини застосуємо формулу для визначення кількості сполучень:

$$\frac{x!}{(x-y-1)!(y+1)!} : \frac{x!}{(x-y)!y!} : \frac{x!}{(x-y+1)!(y-1)!}.$$

2) Записавши окремо відношення першого члена пропорції до другого й другого до третього, після скорочення отримаємо:

$$\frac{x!}{(x-y-1)!(y+1)!} : \frac{x!}{(x-y)!y!} = \frac{x-y}{y+1};$$

$$\frac{x!}{(x-y)!y!} : \frac{x!}{(x-y+1)!(y-1)!} = \frac{x-y+1}{y}.$$

Будемо мати систему рівнянь:
$$\begin{cases} \frac{x-y}{y+1} = 1, \\ \frac{x-y+1}{y} = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5, \\ y=2. \end{cases}$$

Біном Ньютона. Нехай x та y – змінні, n – додатне ціле число. Тоді

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^n C_n^j x^j y^{n-j} = \sum_{j=0}^n C_n^j x^{n-j} y^j,$$

$$(x-y)^n = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j x^{n-j} y^j.$$

Приклад 6.9 Знайдемо розклад виразу $(x+y)^4$. Скориставшись біномом Ньютона, можемо записати:

$$\begin{aligned} (x+y)^4 &= C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 y + C_4^2 x^2 y^2 + C_4^3 x y^3 + C_4^4 y^4 = \\ &= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4x y^3 + y^4. \end{aligned}$$

Біноміальні коефіцієнти можна брати з трикутника Паскаля чи обчислювати за формулою $C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$.

Властивості бінома Ньютона

1. Кількість членів розкладу на 1 більше за показник n .
2. Показники степеня числа x зменшуються, а числа y збільшуються від члена до члена на 1.
3. Сума показників x і y в кожному члені дорівнює n .
4. $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$.
5. Сума біноміальних коефіцієнтів бінома Ньютона, які займають парні місця, дорівнює сумі біноміальних коефіцієнтів, які займають непарні місця, і кожна з них дорівнює 2^{n-1} .

² Коефіцієнти C_n^j називають біноміальними.

ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1. Скільки натуральних чисел від 1 до 10000 не ділиться ні на α , ні на β , ні на γ , ні на δ (значення α , β , γ , δ взяти згідно варіанта з табл. 6.2)³?

Таблиця 6.2

n	α	β	γ	δ	n	α	β	γ	δ
1.	4	5	6	7	2.	2	5	4	13
3.	2	3	4	5	4.	2	8	5	13
5.	3	4	5	8	6.	11	7	9	3
7.	6	7	3	2	8.	3	6	5	4
9.	5	8	9	4	10.	4	8	19	3
11.	3	4	5	6	12.	19	5	10	2
13.	2	4	5	7	14.	5	6	7	8
15.	3	7	6	11	16.	11	3	9	5
17.	11	3	9	10	18.	12	3	5	19
19.	11	8	5	4	20.	23	2	8	7
21.	7	9	5	3	22.	17	4	3	5
23.	8	5	2	9	24.	5	7	9	11
25.	3	8	16	7	26.	13	4	7	2
27.	13	9	5	3	28.	3	12	4	6
29.	3	5	6	13	30.	3	7	11	2
31.	11	8	3	2	32.	8	5	13	2
33.	17	2	3	4	34.	4	7	9	11
35.	2	5	4	17	36.	21	4	2	5
37.	3	4	6	17	38.	2	9	5	13
39.	13	2	3	4	40.	5	6	7	9

2. Обчислити кількість різних перестановок цифр даного числа α (значення α взяти згідно варіанта з табл. 6.3)⁴, при яких ніякі n однакових цифр не йдуть одна за одною.

Таблиця 6.3

n	n	α	n	n	α
1.	3	4244522	2.	2	4954512
3.	2	6858757	4.	3	37665363
5.	2	1249248	6.	2	42535234
7.	3	32331252	8.	3	17721212
9.	2	46749679	10.	2	534354
11.	3	53233252	12.	2	52566314

³ варіант обирати з розрахунку $h \cdot n$

⁴ варіант обирати з розрахунку $h \cdot n$

13.	2	383448	14.	2	134534
15.	2	78959681	16.	3	9395339
17.	2	443536	18.	2	3744753
19.	3	3884383	20.	2	825824
21.	2	5612651	22.	3	1562112
23.	2	7434276	24.	2	3692362
25.	3	23992921	26.	2	7532423
27.	2	78974894	28.	2	9561158
29.	3	13341134	30.	3	1323321
31.	2	565262	32.	3	7832828
33.	2	49129258	34.	3	342363
35.	2	352366	36.	2	657636
37.	3	1887181	38.	2	7447353
39.	2	6556373	40.	3	2665264

3. Розв'яжіть задачу (табл. 6.4)⁵.

Таблиця 6.4

<i>n</i>	Умова задачі
1.	У класі 30 учнів, 16 з них займаються музикою, 17 захоплюються тенісом, а 10 займаються й музикою й тенісом. Чи є в класі учні, байдужі й до музики, і до тенісу, і якщо є, то скільки їх?
2.	У відділі інституту працюють кілька людей. Кожний з них знає хоча б одну іноземну мову, причому: 6 знають німецьку, 6 – англійську, 7 – французьку, 4 – англійську і німецьку, 3 – німецьку і французьку, 2 – французьку і англійську, 1 – всі три мови. Скільки всього людей працює у відділі?
3.	В класі навчається 35 чоловік. Всі вони в вільний час або плавають в басейні, або грають на скрипці, або працюють в ботанічному саду. 25 з них займаються плаванням та ботанікою, а 5 з них ще й музиканти. Чемпіон класу з плавання не грає на скрипці й не любить ботаніку, а два його товариша-ботаніки не вміють плавати, але хороші скрипалі. Серед скрипалів є 7 чоловік, що не плавають та не працюють в ботанічному саду. Скільки чоловік відвідують басейн?
4.	Під час дослідження читацьких смаків студентів виявилось, що 60% студентів читають журнал А, 50% – журнал В, 50% – журнал С, 30% – журнал А і В, 20% – журнал В і С, 40% – журнал А і С, 10% – журнал А, В і С. Скільки відсотків студентів не читає жоден журнал?

⁵ варіант обирати з розрахунку $h \cdot n$

5.	В школі вивчають англійську мову 28 учнів, французьку – 23 учні, німецьку – 23 учні, англійську та французьку – 12 учнів, англійську та німецьку – 11 учнів, французьку та німецьку – 8 учнів, всі 3 мови 5 учнів. Якщо відомо, що кожний учень в школі вивчає хоча б одну із вказаних 3-х мов, знайдіть загальну кількість учнів в школі.
6.	В класі 40 чоловік. З них з хімії трійки мають 19 чоловік, з математики – 17, з фізики – 22. Лише з одного предмета мають трійки: з фізики – 11, з хімії – 4, з математики – 4. 7 чоловік мають трійки й з математики, й з фізики, з них 5 чоловік мають трійки й з хімії. Скільки чоловік навчаються без трійок?
7.	Зі 100 студентів англійську мову вивчають 28 студентів, німецьку – 30, французьку – 42, англійську і французьку – 10, англійську і німецьку – 8, німецьку і французьку – 5, всі 3 мови вивчають троє. Скільки студентів не вивчають жодної з цих трьох мов?
8.	На одній з кафедр університету працює 13 чоловік, кожен з них знає хоча б одну іноземну мову. 10 чоловік знають англійську, 7 – німецьку, 6 – французьку, 5 – англійську та німецьку, 4 – англійську та французьку, 3 – німецьку та французьку. Скільки чоловік знають всі три мови?
9.	У відділі науково-дослідного інституту працюють кілька людей, причому кожен з них знає хоча б одну іноземну мову. Шестеро знають англійську, шестеро – німецький, семеро – французький. Четверо знають англійську і німецьку, троє – німецький і французький, двоє – французьку та англійську. Одна людина знає все три мови. Скільки людей працюють у відділі?
10.	На базі відпочинку 70 чоловік. З них 27 займаються в драмгуртку, 32 співають в хорі, 22 захоплюються спортом. В драмгуртку 10 чоловік з хору, в хорі 6 спортсменів, в драмгуртку 8 спортсменів; 3 спортсмени відвідують й драмгурток, й хор. Скільки чоловік зайняті лише спортом?
11.	Всі студенти курсу відвідують спортивні секції: 91 студент плаває, 96 студентів грають у футбол, 94 студенти займаються гімнастикою, 36 пловців грає у футбол, 32 гімнасти плавають, 10 студентів займаються у всіх трьох секціях. Скільки гімнастів грають у футбол, якщо на курсі 189 студентів?
12.	На полу площею 20 м^2 лежать три килима. Площа одного килима 10 м^2 , другого – 8 м^2 , третього – 5 м^2 . Кожні два килими перекриваються на площі 3 м^2 . Всі три килими перекриваються на площі 1 м^2 . Яка площа пола, що покрита рівно одним килимом?
13.	Під час дослідження читацьких смаків студентів виявилось, що 60% студентів читають журнал А, 50% – журнал В, 50% – журнал С, 30% – журнал А і В, 20% – журнал В і С, 40% – журнал А і С, 10% – журнал А, В і С. Скільки відсотків студентів читає рівно 2 журнали?

14.	В шкільній хімічній олімпіаді приймали участь 21 чоловік, в фізичній – 26 чоловік, в математичній – 29 чоловік. 14 школярів приймали участь і в хімічній, і в математичній олімпіадах, 15 учнів – і в фізичній, і в математичній, 8 – у всіх трьох олімпіадах. Скільки школярів приймали участь хоча б в одній з трьох олімпіад? Знайдіть всі можливі відповіді.
15.	У відділі інституту працюють кілька людей. Кожний з них знає хоча б одну іноземну мову, причому: 6 знають іспанську, 6 – англійську, 7 – італійську, 4 – англійську та іспанську, 3 – іспанську та італійську, 2 – італійську та англійську, 1 – всі три мови. Скільки з працюючих знають тільки англійську?
16.	Всі студенти курсу вивчають іноземні мови: 95 студентів вивчають німецьку мову, 96 студентів вивчають французьку мову, 35 студентів вивчають англійську й німецьку мови, 34 студентів вивчають англійську й французьку мови, 38 студентів вивчають німецьку й французьку мови, 13 студентів вивчають всі мови. Скільки студентів вивчають англійську мову, якщо на курсі навчаються 183 студенти?
17.	В школі поглиблено вивчають економіку 28 учнів, інформатику – 23 учні, німецьку мову – 23 учні, економіку та інформатику – 12 учнів, економіку та німецьку мову – 11 учнів, інформатику та німецьку мову – 8 учнів, всі 3 предмети – 5 учнів. Якщо відомо, що кожний учень в школі вивчає хоча б один із вказаних 3-х предметів, знайдіть кількість учнів, які вивчають хоча б два з них.
18.	Всі студенти курсу вивчають іноземні мови: 95 студентів вивчають англійську мову, 104 студентів вивчають німецьку мову, 96 студентів вивчають французьку мову, 40 студентів вивчають англійську й німецьку мови, 39 студентів вивчають німецьку й французьку мови, 11 студентів вивчають всі мови. Скільки студентів вивчають англійську й французьку мови, якщо на курсі навчаються 192 студенти?
19.	Зі 100 легкоатлетів спринтерами є 28 чоловік, стаєрами – 30, стрибають в довжину – 42, 10 спринтерів стрибають в довжину, 8 добре бігають на короткі та довгі дистанції, 5 стрибунів в довжину бігають на довгі дистанції, всі 3 легкоатлетичні дисципліни любляють троє. Скільки легкоатлетів приймає участь тільки в одній легкоатлетичній дисципліні?
20.	В класі 40 чоловік. 3 них з біології трійки мають 19 чоловік, з математики – 17, з фізики – 22. Лише з одного предмета мають трійки: з фізики – 11, з біології – 4, з математики – 4. 7 чоловік мають трійки й з математики, й з фізики, з них 5 чоловік мають трійки й з біології. Скільки чоловік мають трійки тільки з одного предмета?

21.	У відділі науково-дослідного інституту працюють кілька людей, причому кожен з них знає хоча б одну іноземну мову. Шестеро знають англійську, шестеро – німецький, семеро – французький. Четверо знають англійську і німецьку, троє – німецький і французький, двоє – французьку та англійську. Одна людина знає все три мови. Скільки людей знають тільки англійську мову?
22.	В класі навчається 35 чоловік. Всі вони в вільний час або плавають в басейні, або грають на скрипці, або працюють в ботанічному саду. 25 з них займаються плаванням та ботанікою, а 5 з них ще й музиканти. Чемпіон класу з плавання не грає на скрипці й не любить ботаніку, а два його товариша-ботаніки не вміють плавати, але добрі скрипалі. Серед скрипалів є 7 чоловік, що не плавають та не працюють в ботанічному саду. Скільки в класі скрипалів?
23.	На полу площею 20 м^2 лежать три килима. Площа одного килима 10 м^2 , другого – 8 м^2 , третього – 5 м^2 . Кожні два килими перекриваються на площі 3 м^2 . Всі три килими перекриваються на площі 1 м^2 . Яка площа пола, що не покрита килимами?
24.	На одній з кафедр університету працює 13 чоловік, кожен з них знає хоча б одну іноземну мову. 10 чоловік знають англійську, 7 – німецьку, 6 – французьку, 5 – англійську та німецьку, 4 – англійську та французьку, 3 – німецьку та французьку. Скільки чоловік знають хоча б дві мови?
25.	Всі студенти курсу вивчають іноземні мови: 91 студент вивчає англійську мову, 96 студентів вивчають німецьку мову, 94 студента вивчають французьку мову, 36 студентів вивчають англійську й німецьку мови, 32 студента вивчають англійську й французьку мови, 10 студентів вивчають всі мови. Скільки студентів вивчають тільки одну мову, якщо на курсі навчаються 189 студентів?
26.	Під час дослідження читацьких смаків студентів виявилось, що 60% студентів читають журнал А, 50% – журнал В, 50% – журнал С, 30% – журнал А і В, 20% – журнал В і С, 40% – журнал А і С, 10% – журнал А, В і С. Скільки відсотків студентів читає не менше двох журналів?
27.	У першому класі читати вміють 12 учнів, рахувати – 8, писати – 9; читати й писати – 4, читати й рахувати – 5, писати й рахувати – 3; читати, писати й рахувати – 2; 6 учнів дотепер нічому не навчилися. Скільки учнів у класі?
28.	Всі студенти курсу вивчають іноземні мови: 94 студентів вивчають англійську мову, 90 студентів вивчають французьку мову, 33 студентів вивчають англійську й німецьку мови, 35 студентів вивчають англійську й французьку мови, 31 студентів вивчають німецьку й французьку мови, 10 студентів вивчають всі мови. Скільки студентів вивчають німецьку мову, якщо на курсі навчаються 188 студенти?

29.	У відділі інституту працюють кілька людей. Кожний з них знає хоча б одну іноземну мову, причому: 6 знають німецьку, 6 – англійську, 7 – французьку, 4 – англійську і німецьку, 3 – німецьку і французьку, 2 – французьку і англійську, 1 – всі три мови. Скільки з працюючих знають хоча б дві іноземні мови?
30.	Художник Проблемний за місяць роботи написав 42 картини. На 17 з них є ліс, на 26 – ріка, а на 13 – і те, і інше, на інших картинах – не зрозумій що. Скільки картин зображують не зрозумій що?
31.	Всі студенти курсу вивчають іноземні мови: 91 студент вивчає англійську мову, 94 студенти вивчають німецьку мову, 101 студент вивчає французьку мову, 41 студент вивчає англійську й французьку мови, 39 студентів вивчають німецьку й французьку мови, 12 студентів вивчають всі мови. Скільки студентів вивчають англійську й німецьку мови, якщо на курсі навчаються 186 студентів?
32.	На олімпійських іграх наші спортсмени завоювали 96 медалей, з них 65 золотих і бронзових, а золотих і срібних 61. Скільки було золотих, срібних і бронзових медалей окремо?
33.	На базі відпочинку 70 чоловік. З них 27 займаються в драмгуртку, 32 співають в хорі, 22 захоплюються спортом. В драмгуртку 10 чоловік з хору, в хорі 6 спортсменів, в драмгуртку 8 спортсменів; 3 спортсмени відвідують й драмгурток, й хор. Скільки чоловік не співають в хорі, не захоплюються спортом та не займаються в драмгурті?
34.	Зі 100 студентів англійську мову вивчають 28 студентів, німецьку – 30, французьку – 42, англійську і французьку – 10, англійську і німецьку – 8, німецьку і французьку – 5, всі 3 мови вивчають троє. Скільки студентів вивчають хоча б дві мови?
35.	В школі вивчають англійську мову 28 учнів, французьку – 23 учні, німецьку – 23 учні, англійську та французьку – 12 учнів, англійську та німецьку – 11 учнів, французьку та німецьку – 8 учнів, всі 3 мови 5 учнів. Якщо відомо, що кожний учень в школі вивчає хоча б одну із вказаних 3-х мов, знайдіть кількість учнів, які вивчають тільки одну іноземну мову.
36.	На заміську прогулянку поїхало 92 чоловіки. Канапки з ковбасою взяли 48 чоловік, з сиром – 38 чоловік, з шинкою – 42 чоловіки, канапки з ковбасою й канапки з сиром – 28 чоловік, канапки з ковбасою та канапки з шинкою – 31 чоловік, канапки з сиром та канапки з шинкою – 26 чоловік. Всі три види канапок взяли 25 чоловік. Всі інші замість канапок взяли піріжки. Скільки чоловік взяли піріжки?

37.	В класі навчається 35 чоловік. Всі вони в вільний час або плавають в басейні, або грають на скрипці, або працюють в ботанічному саду. 25 з них займаються плаванням та ботанікою, а 5 з них ще й музиканти. Чемпіон класу з плавання не грає на скрипці й не любить ботаніку, а два його товариша-ботаніки не вміють плавати, але добрі скрипалі. Серед скрипалів є 7 чоловік, що не плавають та не працюють в ботанічному саду. Скільки ботаніків не цікавляться а ні плаванням, а ні музикою?
38.	Всі студенти курсу вивчають іноземні мови: 110 студентів вивчають англійську мову, 100 студентів вивчають німецьку мову, 45 студентів вивчають англійську й німецьку мови, 43 студенти вивчають англійську й французьку мови, 40 студентів вивчають німецьку й французьку мови, 17 студентів вивчають всі мови. Скільки студентів вивчають французьку мову, якщо на курсі навчаються 200 студентів?
39.	В класі 40 чоловік. З них з англійської мови трійки мають 19 чоловік, з математики – 17, з фізики – 22. Лише з одного предмета мають трійки: з фізики – 11, з англійської – 4, з математики – 4. 7 чоловік мають трійки й з математики, й з фізики, з них 5 чоловік мають трійки й з англійської. Скільки чоловік мають трійки хоча б з двох предметів?
40.	У відділі науково-дослідного інституту працюють кілька людей, причому кожен з них знає хоча б одну іноземну мову. Шестеро знають англійську, шестеро – німецький, семеро – французький. Четверо знають англійську і німецьку, троє – німецький і французький, двоє – французьку та англійську. Одна людина знає всі три мови. Скільки людей знають тільки французьку мову?

4. Розв'язати рівняння й знайти x та y з пропорції (табл. 6.5)⁶.

Таблиця 6.5

n	Рівняння	Пропорція
1.	$\frac{2P_{x+h} + 3P_x}{3P_{x+2} + 8P_{x+h}} = \frac{3A_{x+1}^3}{5A_{x+2}^4}$	$C_{x+1-h}^{y+1} : C_{x+1-h}^y : C_{x+1-h}^{y-1} = 5 : 4 : 2$
2.	$\frac{2P_{x-1+h} + P_{x-1}}{P_{x+2} + 2P_{x+h}} = \frac{5A_x^2}{3A_{x+2}^4}$	$C_{x-h}^{y+1} : C_{x-h}^y : C_{x-h}^{y-1} = 3 : 3 : 2$
3.	$\frac{5P_{x+h} + 8P_x}{2P_{x+2} + 5P_{x+h}} = \frac{7A_{x+1}^4}{3A_{x+2}^5}$	$C_{x+1-h}^{y+1} : C_{x+1-h}^y : C_{x+1-h}^{y-1} = 14 : 7 : 2$
4.	$\frac{3P_{x-1+h} + 4P_{x-1}}{P_{x+2} + 6P_{x+h}} = \frac{2A_x^2}{A_{x+2}^4}$	$C_{x-h}^{y+1} : C_{x-h}^y : C_{x-h}^{y-1} = 6 : 14 : 21$

⁶ варіант обирати з розрахунку $h \cdot n$

5.	$\frac{3P_{x+h} + 6P_x}{2P_{x+2} + 6P_{x+h}} = \frac{7A_{x+1}^5}{5A_{x+2}^6}$	$C_{x-h}^{y+2} : C_{x-h}^{y+1} : C_{x-h}^y = 42 : 35 : 20$
6.	$\frac{3P_{x-1+h} + 3P_{x-1}}{P_{x+2} + 3P_{x+h}} = \frac{5A_x^3}{2A_{x+2}^5}$	$C_{x+1-h}^{y+2} : C_{x+1-h}^{y+1} : C_{x+1-h}^y = 3 : 4 : 3$
7.	$\frac{4P_{x+h} + 7P_x}{3P_{x+2} + 8P_{x+h}} = \frac{5A_{x+1}^4}{4A_{x+2}^5}$	$C_{x+1-h}^{y+1} : C_{x+1-h}^y : C_{x+1-h}^{y-1} = 4 : 5 : 4$
8.	$\frac{3P_{x-1+h} + 3P_{x-1}}{2P_{x+2} + 5P_{x+h}} = \frac{4A_x^3}{3A_{x+2}^5}$	$C_{x-h}^{y+2} : C_{x-h}^{y+1} : C_{x-h}^y = 5 : 3 : 1$
9.	$\frac{3P_{x+h} + 2P_x}{5P_{x+2} + 6P_{x+h}} = \frac{4A_{x+1}^2}{7A_{x+2}^3}$	$C_{x+1-h}^{y+2} : C_{x+1-h}^{y+1} : C_{x+1-h}^y = 5 : 6 : 5$
10.	$\frac{3P_{x-1+h} + 2P_{x-1}}{2P_{x+2} + 4P_{x+h}} = \frac{4A_x^2}{3A_{x+2}^4}$	$C_{x-h}^{y+2} : C_{x-h}^{y+1} : C_{x-h}^y = 24 : 9 : 2$
11.	$\frac{P_{x+4+h} - P_{x+2+h}A_{x+5}^2}{P_{x+1+h}} = 2A_9^2$	$C_{x+1-h}^{y+2} : C_{x+1-h}^{y+1} : C_{x+1-h}^y = 28 : 12 : 3$
12.	$\frac{2P_{x+4+h}}{P_{x+1+h}} + 14P_3 = \frac{A_{x+4}^2 A_{x+10}^{x+9}}{P_{x+9}}$	$C_{x+1-h}^{y+1} : C_{x+1-h}^y : C_{x+1-h}^{y-1} = 6 : 3 : 1$
13.	$A_{x+6}^3 = \frac{P_{x+6+h}A_{x+1}^x}{P_{x+4+h}P_x} - 6A_{11}^{10}$	$C_{x-h}^{y+1} : C_{x-h}^y : C_{x-h}^{y-1} = 72 : 45 : 20$
14.	$\frac{4P_{x+4+h}}{P_{x+1+h}} + A_8^2 = \frac{8A_{x+7}^{x+5}P_{x+3}}{P_{x+5}P_{x+2}}$	$C_{x-h}^{y+2} : C_{x-h}^{y+1} : C_{x-h}^y = 14 : 10 : 5$
15.	$\frac{P_{x+4+h}P_{x+3} - P_{x+3+h}A_{x+4}^{x+3}}{(P_{x+1+h})^2} = 5A_8^7$	$C_{x+1-h}^{y+2} : C_{x+1-h}^{y+1} : C_{x+1-h}^y = 28 : 24 : 15$
16.	$\frac{P_{x+1}}{2P_{x-2}} + 4A_9^8 = \frac{A_x^2 P_{x+h}}{2P_{x-1+h}}$	$C_{x-h}^{y+1} : C_{x-h}^y : C_{x-h}^{y-1} = 3 : 4 : 3$
17.	$\frac{P_{x+1}}{2P_{x-2}} = \frac{P_{x-3+h}}{P_{x-5+h}} \cdot \frac{A_{x+3}^{x+2}}{P_{x+2}} + 6A_7^6$	$C_{x+1-h}^{y+1} : C_{x+1-h}^y : C_{x+1-h}^{y-1} = 55 : 22 : 6$
18.	$\frac{3P_{x+3}}{2P_x} + 6A_6^5 = \frac{3P_{x+3+h}A_{x-1}^{x-2}}{2P_{x+1+h}P_{x-2}}$	$C_{x+1-h}^{y+2} : C_{x+1-h}^{y+1} : C_{x+1-h}^y = 45 : 20 : 6$
19.	$\frac{3P_{x+1}}{P_{x-2}P_3} = \frac{P_{x+h}A_{x-3}^{x-4}}{2P_{x-2+h}P_{x-4}} + 7$	$C_{x-h}^{y+2} : C_{x-h}^{y+1} : C_{x-h}^y = 42 : 35 : 20$
20.	$\frac{P_{x-4+h}A_x^{x-1} - (P_{x-3+h})^2}{P_{x-6+h}} = 2A_5^3$	$C_{x-h}^{y+1} : C_{x-h}^y : C_{x-h}^{y-1} = 1 : 7 : 21$

5. Розв'язати задачі (табл. 6.6)⁷.

Таблиця 6.6

<i>n</i>	Умови задач
1.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути з колоди 13 карт одного кольору (порядок карт не має значення)? 2) 3 8 тенісистів і 6 тенісисток утворюють 3 змішані пари (в пару входять по одному тенісисту і одній тенісистці). Скількома способами це можна зробити? 3) У вищій лізі чемпіонату України з футболу грають 16 команд. Скільки є способів розподілення I, II та III місця і двох команд, які перейдуть в першу лігу (дві останні команди)? 4) Скільки п'ятицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5?
2.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами з колоди можна витягнути 7 карт, так, щоб серед них було 2 тузи та 2 королі (враховуючи порядок)? 2) Скількома способами можна розташувати 12 різних деталей у трьох ящиках? 3) Скількома способами можна розташувати 12 чоловік по трьох кімнатах, якщо в першу можна помістити 2, в другу 6, в третю 4 чоловіки? 4) Скільки слів можна отримати, якщо переставляти букви у слові «математика»?
3.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути 6 карт так, щоб серед них були дев'ятки, але не більше, ніж 2 (порядок карт не має значення)? 2) У фортепіанному гуртку навчаються 10 чоловік, у гуртку художнього слова – 15, у вокальному гуртку – 12 і у фотогуртку – 20 чоловік. Скількома способами можна утворити групу з чотирьох читців, трьох піаністів, п'яти співаків і одного фотографа? 3) Для поздоровлення дівчат, яких у класі 10, зі святом, хлопці вирішили купити 10 різних книг з 15, які запропонувало видавництво «Факт». Скільки є різних способів отримання подарунків дівчатами? 4) Скількома способами можна переставити букви в слові «обороздатність», аби дві букви «о» не йшли поряд?
4.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути з колоди 4 карт так, щоб серед них була хоча б дві десятки (порядок карт не має значення)? 2) В чемпіонаті України з футболу грає 18 команд. Скількома способами можуть розподілитись місця, зайняті командами, якщо відомо, що команди «Динамо», «Дніпро», «Шахтар», «Чорноморець» й «Таврія» займуть перші п'ять місць? 3) На біржу фірма повинна відрядити двох брокерів, трьох дилерів й одного менеджера. Скількома способами це можна зробити, якщо до складу фірми входять 15 брокерів, 10 дилерів і 5 менеджерів?

⁷ варіант обирати з розрахунку $h \cdot n$

	4) Скільки п'ятицифрових чисел можна утворити з дев'яти цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?
5.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами з колоди можна витягнути 6 карт, так, щоб серед них було 2 короля та 2 шістки (не враховуючи порядок)? 2) У турнірі беруть участь 12 шахістів. Визначити кількість різних розкладів першого туру (розклади вважаються різними, якщо вони відрізняються учасниками хоча б однієї партії; колір фігур та номер столу не враховується). 3) В мамі було 2 яблука, 3 груші та 2 апельсини. Кожен день вона давала дитині по одному фрукту. Скількома способами вона могла це зробити? 4) З букв розрізної абетки складено слово «конус». Скільки «слів» можна отримати, якщо переставити букви в цьому слові.
6.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна викласти всі красні карти на стіл? 2) З 15 робітників фірми директорові треба виділити бухгалтера, його помічника, двох менеджерів і чотирьох кур'єрів. Скількома способами це можна зробити? 3) Десять тенісистів мають бути розподілені в групи по 2, 3 і 5 спортсменів для поїздки на три турніри, які обираються з 6 можливих. Скількома способами це можна зробити? 4) Скільки слів можна отримати, якщо переставляти букви у слові «комбінаторика»?
7.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути з колоди 5 карт пікової масті так, щоб серед них обов'язково була шістка (порядок карт не має значення)? 2) У вищій лізі чемпіонату України з волейболу грають 20 команд. Скільки є способів розподілення I, II та III місця і трьох команд, які перейдуть в першу лігу (три останні команди)? 3) Скількома способами можна розташувати 13 однакових куль в трьох ящиках? 4) З букв розрізної абетки складено слово «циліндр». Скільки «слів» можна отримати, якщо переставити букви в цьому слові.
8.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути з колоди 5 карт, щоб серед них було не менше, ніж 2 дами (порядок карт не має значення)? 2) На футбольний турнір треба послати збірну команду в складі: тренер, його помічник, 2 асистенти, 20 футболістів, лікар і 2 масажисти. Тренерський склад може бути відібраний з 10 спеціалістів, футболісти – з 25 спортсменів, лікаря треба вибрати одного з трьох, а масажистів – двох з п'яти. Скількома способами може бути укомплектована така команда? 3) Скількома способами можна розділити 6 різних цукерок між трьома дітьми? 4) З букв розрізної абетки складено слово «анатомія». Скільки «слів»

	можна отримати, якщо переставити букви в цьому слові.
9.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути з колоди 4 карти однієї масті (не враховуючи порядок)? 2) У вищій лізі чемпіонату України з баскетболу грають 18 команд. Скільки є способів розподілення I, II та III місця і двох команд, які перейдуть в першу лігу (дві останні команди)? 3) 3 8 тенісистів і 6 тенісисток утворюють 3 змішані пари (в пару входять по одному тенісисту і одній тенісистці). Скількома способами це можна зробити? 4) Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, якщо кожна з них використовувати лише один раз?
10.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна викласти карти на стіл, якщо карти повинні йти зі спаданням: спочатку тузи, королі, ..., двійки? 2) В речовій лотереї розігрується 8 предметів. Всього в «урні» 50 квитків. Виймається 5 квитків. Скількома способами їх можна взяти так, щоб рівно два з них були виграшні? 3) Чемпіонат, в якому беруть участь 20 команд, проводиться в два круги (тобто кожна команда двічі зустрічається з кожною з решти команд). Визначити, яка кількість зустрічей має бути проведена. 4) 3 цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9 утворюють всілякі п'ятицифрові числа, що не мають однакових цифр. Визначити кількість чисел, в яких є цифри 7, 8, 9 одночасно.
11.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути з колоди 5 карт так, щоб 3 з них були однієї масті (порядок карт не має значення)? 2) В речовій лотереї розігрується 8 предметів. Всього в «урні» 50 квитків. Виймається 5 квитків. Скількома способами їх можна взяти так, щоб принаймні два з них були виграшні? 3) Розклад на день містить 5 уроків. Визначити кількість таких можливих розкладів при виборі з 11 дисциплін, при умові, що жоден предмет не стоїть у розкладі двічі на день. 4) Скільки п'ятицифрових чисел можна утворити з дев'яти цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?
12.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути з колоди 5 карт так, щоб не більш, ніж 3 з них були однієї масті (порядок карт не має значення)? 2) Команда з п'яти чоловік виступає в змаганнях, в яких бере участь ще 20 спортсменів. Скількома способами можуть бути розподілені місця, зайняті членами цієї команди, при умові, що жодне місце на цих змаганнях не може бути поділено? 3) Садівник повинен протягом трьох днів посадити 10 дерев десяти різних порід. Скількома способами він може розподілити за днями свою роботу, якщо буде висаджувати не менше одного дерева в день? 4) 3 букв розрізної абетки складено слово «колода». Скільки «слів»

	можна отримати, якщо переставити букви в цьому слові.
13.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути з колоди 5 карт так, щоб серед них була хоча б одна дама (порядок карт не має значення)? 2) Скільки можна скласти різних неправильних дробів, чисельниками і знаменниками яких є числа 3, 5, 7, 13, 17? 3) Скількома способами Пончик може розсувати 6 цукерок по 9 карманах, якщо кожен карман може вмістити всі цукерки? 4) З букв розрізної абетки складено слово «мікропроцесор». Скільки «слів» можна отримати, якщо переставити букви в цьому слові.
14.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути з колоди 4 карти бубнової масті так, щоб серед них обов'язково буда дама (порядок карт не має значення)? 2) На десяти картках записані цифри 0, 1, 2, 3, ..., 9 (на кожній по одній). Беруть чотири картки і складають із цифр, записаних на них, чотирицифрове число. Скільки різних чотирицифрових чисел можна отримати таким чином? 3) З групи, в яку входять 7 хлопчиків і 4 дівчини, треба скласти команду з 6 чоловік так, щоб вона містила не менше двох дівчинок. Скільки є способів скласти таку команду? 4) Скільки шестицифрових чисел можна утворити з дев'яти цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?
15.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна викласти колоду на стіл так, щоб після кожного туза йшов король іншої масті? 2) На футбольний турнір треба послати збірну команду в складі: тренер, його помічник, 2 асистенти, 25 футболістів, лікар і 3 масажисти. Тренерський склад може бути відібраний з 11 спеціалістів, футболісти – з 45 спортсменів, лікаря треба вибрати одного з трьох, а масажистів – з п'яти. Скількома способами може бути укомплектована така команда? 3) Скількома способами можна розкласти 28 різних предметів по чотирьох ящиках, так, щоб в кожному ящику опинилося по 7 предметів? 4) З букв розрізної абетки складено слово «інженерія». Скільки «слів» можна отримати, якщо переставити букви в цьому слові.
16.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна викласти колоду, якщо спочатку повинні йти вісімки (порядок вісімок не має значення)? 2) Три стрільці повинні улучити 15 мішеней (кожен по п'ять). Скількома способами вони можуть розподілити мішені між собою? 3) Букви азбуки Морзе складаються з символів – точка й тире. Скільки букв отримаємо, якщо будемо вимагати, щоб кожна буква складалася не більше ніж з п'яти вказаних символів? 4) З букв розрізної абетки складено слово «програмування». Скільки «слів» можна отримати, якщо переставити букви в цьому слові.
17.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути з колоди 15 карт, не враховуючи їх порядок? 2) В поштовому відділенні продаються листівки 10 сортів. Скількома

	способами можна купити в ньому 12 листівок? 3) В класі вивчають 14 предметів. Скількома способами можна скласти розклад занять на суботу, якщо в цей день повинно бути 5 різних уроків? 4) 3 букв розрізної абетки складено слово «алгоритмізація». Скільки «слів» можна отримати, якщо переставити букви в цьому слові.
18.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами з колоди можна витягнути 4 карти, так, щоб серед них було 2 короля та 2 дами (враховуючи порядок)? 2) 3 команди, в якій 10 плавців, вибирається четвірка, що приймає участь в естафеті комплексним плаванням (тобто кожний пливе своїм стилем). Скількома способами можна вибрати цю естафетну четвірку? 3) 3 9 тенісистів і 5 тенісисток утворюють 4 змішані пари (в пару входять по одному тенісисту і одній тенісистці). Скількома способами це можна зробити? 4) 3 букв розрізної абетки складено слово «студентство». Скільки «слів» можна отримати, якщо переставити букви в цьому слові.
19.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути з колоди 3 карти різних мастей (враховуючи порядок)? 2) Скількома способами можна 5 кульок розкидати по 8 лунках, якщо кожна лунка може вмістити всі 5 кульок? 3) Є 5 ящиків з номерами від 1 до 5 (тобто ящики можна розрізнити) й 7 кульок, що не можна розрізнити. Скільки способів розкласти ці кульки по ящиках? Способи відрізняються, якщо хоча б в двох ящиках була різна кількість кульок (оскільки неможливо, щоб кількість кульок відрізнялась тільки в одному ящику). 4) 3 букв розрізної абетки складено слово «заборгованість». Скільки «слів» можна отримати, якщо переставити букви в цьому слові.
20.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути з колоди 2 карти різних мастей, одна з яких – туз (враховуючи порядок)? 2) Скількома способами дівчинка Яна може розкласти 12 різних ляльок по трьох ящиках, якщо кожен ящик може вмістити всі ляльки? 3) 3 лабораторії, в якій працює 25 чоловік, 5 співробітників повинні поїхати у відрядження. Скільки може бути різних складів цієї групи, якщо начальник лабораторії, його замісник і головний інженер одночасно їхати не можуть? 4) 3 букв розрізної абетки складено слово «колористика». Скільки «слів» можна отримати, якщо переставити букви в цьому слові?
21.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути з колоди 4 карти різних мастей так, щоб серед них була одна вісімка та одна дама будь-яких мастей (порядок карт не має значення)? 2) Скільки можна побудувати різних прямокутних паралелепіпедів, довжини ребер яких виражаються натуральними числами від 1 до 10? 3) Скільки екзаменаційних комісій, що складаються з 7 членів, можна скласти з 10 викладачів?

	4) Скільки різних восьмицифрових чисел можна написати, користуючись тільки трьома цифрами 3, 5, 7 при умові, що цифра 5 в кожному числі зустрічається рівно два рази?
22.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна викласти колоду, якщо спочатку повинні йти дами (порядок дам не має значення)? 2) 3 цифр 1, 2, 3, 4, 5 складено всі можливі п'ятицифрові числа (повторення цифр дозволяється). Скільки серед них чисел, в яких: 3 – перша цифра, 2 – друга? 3) Скільки наборів з 7 тістечок можна скласти, якщо у продажу є 4 сорти тістечок? 4) Маємо 15 різних книг одного автора, 12 – другого й 6 – третього. Яким числом способів можна вибрати одну книгу.
23.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути з колоди 5 карт так, щоб серед них було 3 вісімки (порядок карт не має значення)? 2) Для поздоровлення дівчат, яких у класі 13, зі святом, хлопці вирішили купити 13 різних книг з 25, які запропонувало видавництво «Казка». Скільки є різних способів отримання подарунків дівчатами? 3) Скількома способами можна розділити 6 різних цукерок між трьома дітьми? 4) Скільки чисел, менших мільйона, можна написати за допомогою цифр: 8, 9?
24.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути з колоди 5 карт, щоб серед них було не менше, ніж 3 вісімки (порядок карт не має значення)? 2) Скільки наборів з 7 тістечок можна скласти, якщо у продажу є 4 сорти тістечок? 3) В поштовому відділенні продаються листівки 10 сортів. Скількома способами можна купити в ньому 12 листівок? 4) Скільки чисел, менших мільйона, можна написати за допомогою цифр 7, 8, 9?
25.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути 5 карт так, щоб серед них були дами, але не більше, ніж 3 (порядок карт не має значення)? 2) Скількома способами можна розкласти 28 різних предметів по чотирьох ящиках, так, щоб в кожному ящику опинилося по 7 предметів? 3) Є три куриці, чотири качки й два гуся. Скількома способами можна вибрати з них декілька птиць так, щоб серед вибраних опинилися й кури, й качки, й гуси? 4) 3 букв розрізної абетки складено слово «фотокамера». Скільки «слів» можна отримати, якщо переставити букви в цьому слові?
26.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами з колоди можна витягнути 4 карти різних мастей (порядок карт не враховувати)? 2) Скількома способами можна розділити 6 різних цукерок між трьома дітьми?

	3) У художньому гуртку навчаються 12 чоловік, у драмгуртку – 11, у вокальному гуртку – 15 і у фотогуртку – 9 чоловік. Скількома способами можна утворити групу з чотирьох художників, трьох акторів, п'яти співаків і одного фотографа? 4) Скількома способами можна переставити букви в слові «волонтер», аби дві букви «о» не йшли поряд?
27.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами з колоди можна витягнути 4 карти однієї масті, враховуючи їх порядок? 2) Скількома способами можна розкласти 28 різних предметів по чотирьох ящиках, так, щоб в кожному ящику опинилося по 7 предметів? 3) В бабусі було 3 мандарини, 2 лимони та 3 апельсини. Кожен день вона давала дитині по одному фрукту. Скількома способами вона могла це зробити? 4) 3 букв розрізної абетки складено слово «конус». Скільки «слів» можна отримати, якщо переставити букви в цьому слові.
28.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути з колоди 5 карт так, щоб 3 з них були однієї масті (порядок карт не має значення)? 2) Чемпіонат України з футболу проводиться серед 16 команд. Будемо говорити, що можливі наслідки чемпіонату не відрізняються у головному, якщо в результаті однакові команди гратимуть у єврокубках (5 команд) і перейдуть у першу лігу (2 команди). Скільки всього є можливих наслідків чемпіонату, які не відрізняються у головному? 3) Скількома способами можна з 7 осіб вибрати комісію, яка складається з 3 осіб? 4) Скільки є п'ятизначних чисел, у яких кожна наступна цифра більше попередньої?
29.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути 36 карт, враховуючи їх порядок? 2) Є п'ять видів конвертів і чотири види марок. Скількома способами можна вибрати конверт з маркою для відправлення листа? 3) Скількома способами з чотирьох груп по 24, 21, 23 і 25 студентів відповідно можна вибрати одного представника? 4) Скільки є п'ятизначних чисел, які діляться на 5?
30.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути з колоди 6 карт так, щоб 3 з них були шістки (порядок карт не має значення)? 2) У класі вивчають 10 дисциплін. У четвер 6 уроків, причому всі уроки різні. Скількома способами можна скласти розклад на четвер? 3) Скількома способами можна скласти триколірний смугастий прапор, якщо є 6 кольорів? 4) Скільки є п'ятизначних чисел, у яких кожна наступна цифра менша попередньої?
31.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути з колоди 2 карти так, щоб вони були різної масті (порядок карт не має

	значення)? 2) Скількома способами з 10 студентів можна вибрати делегацію, яка складається з трьох студентів? 3) На книжній полиці стоять 12 книг. Скількома способами можна вибрати з них 5 книг так, щоб ніякі дві з них не стояли поруч? 4) Скільки шестизначних чисел можна скласти з цифр числа 1233145254?
32.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна викласти карти на стіл, якщо карти повинні йти за зростанням: спочатку двійки, трійки,..., туз? 2) Скількома способами читач може вибрати 3 книги з 6? 3) Є 10 подружніх пар. Вони розбиваються на 5 груп по 4 людини для прогулянки на човнах. Скількома способами можна розбити їх так, щоб у кожному човні були двоє чоловіків і двоє жінок? 4) Скількома способами можна розсадити 5 чоловік за столом?
33.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути з колоди 15 карт, враховуючи їх порядок? 2) Скількома способами можна розселити 8 студентів у трьох кімнатах: одномісній, трьохмісній й кімнаті на чотири місця? 3) Є 10 подружніх пар. Вони розбиваються на 5 груп по 4 людини для прогулянки на човнах. У скількох випадках при цьому даний чоловік буде в одному човні зі своєю дружиною? 4) Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з чотирьох карток з цифрами 0, 5, 7, 9?
34.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна розкласти 15 обраних (без врахування порядку) карт? 2) Є 10 подружніх пар. Вони розбиваються на 5 груп по 4 людини для прогулянки на човнах. У скількох випадках дані двоє чоловіків будуть в одному човні зі своїми дружинами? 3) Скількома способами можна вибрати 6 однакових або різних тістечок у кондитерській, де є 11 різних сортів тістечок? 4) Скільки різних буквосполучень можна отримати перестановкою карток з наступними буквами: Д, З, В, І, Н, О, Ч, О, К?
35.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути з колоди 7 карт так, щоб серед них було 2 шістки (порядок карт не має значення)? 2) Скількома способами 4 чорні кулі, 5 білих і 7 синіх можуть бути розкладені у 6 різних пакетів? 3) В студентській групі 23 чоловіки. Скількома способами можна вибрати старосту й його заступника? 4) 3 букв розрізної абетки складено слово «університет». Скільки «слів» можна отримати, якщо переставити букви в цьому слові.
36.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути з колоди 3 карти бубнової масті (порядок карт не має значення)? 2) Студентська група складається з 23 чоловік, серед яких 10 хлопців

	й 13 дівчат. Скількома способами можна вибрати двох чоловік одного пола? 3) В урні 6 білих і 23 чорні кульки. З урни навмання виймають 4 кульки. Скількома способами можна отримати серед них 3 білих або 3 чорних кульки? 4) Скільки тризначних чисел можна записати цифрами 0, 1, 2, 3, 4, якщо кожен з цих цифр можна використовувати не більше одного разу?
37.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути з колоди 3 карти однієї масті (порядок карт не має значення)? 2) Скількома способами можна роздати 18 різних предметів 5 людям так, щоб четверо отримали по 4 предмети, а п'ятий 2 предмети? 3) В урні 6 білих і 23 чорні кульки. З урни навмання виймають 4 кульки. Скількома способами можна отримати серед них хоча б одну білу кульку. 4) Скільки існує чотирицифрових пін-кодів?
38.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна викласти усю колоду на стіл? 2) В студентській столовій продають сосиски в тісті, ватрушки й пончики. Скількома способами можна купити п'ять пірижків? 3) В урні 6 білих і 23 чорні кульки. З урни навмання виймають 4 кульки. Скількома способами можна отримати серед них 2 білих і 2 чорних кульок. 4) 3 цифр 1, 2, 3, 4, 5 складають всі можливі числа, кожне з яких складається не більше ніж з 3 цифр. Скільки таких чисел можна утворити, якщо повторення цифр не дозволяється?
39.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути з колоди 5 карт так, щоб хоча б 3 з них були однієї масті (порядок карт не має значення)? 2) Підприємство може дати роботу по одній спеціальності 4 жінкам, по іншій – 6 чоловікам, по третій – 3 робітникам незалежно від пола. Скількома способами можна заповнити вакантні місця, якщо є 14 претендентів: 6 жінок та 8 чоловіків? 3) В урні 6 білих і 23 чорні кульки. З урни навмання виймають 4 кульки. Скількома способами можна отримати серед них не більше ніж 3 білі кульки. 4) 3 цифр 1, 2, 3, 4, 5 складають всі можливі числа, кожне з яких складається не більше ніж з 3 цифр. Скільки таких чисел можна утворити, якщо дозволяється повторення цифр?
40.	1) Є колода з 52 карт. Скількома способами можна витягнути з колоди 6 карт так, щоб 2 з них були тузи, 2 – шістки, 2 – дами (порядок карт не має значення)? 2) Групу з 20 студентів треба розділити на 3 бригади, причому в першу бригаду повинні входити 3 чоловіки, в другу – 5 й в третю – 12. Скількома способами це можна зробити? 3) В урні 7 білих і 24 чорні кульки. З урни навмання виймають 5

	кульок. Скількома способами можна отримати серед них 4 білих або 4 чорних кульок. 4) У пасажирському поїзді 9 вагонів. Скількома способами можна розсадити в поїзді 4 людей при умові, що вони повинні їхати в різних вагонах?
--	---

6. Задано поліном: $(ax^b + cy^d)^e$ за допомогою бінома Ньютона. Визначити у розкладанні бінома Ньютона коефіцієнт C , який відповідає елементу $Cx^{f+h}y^{g-h}$ (табл. 6.8).

n	$(ax^b + cy^d)^e$	$Cx^{f+h}y^{g-h}$	n	$(ax^b + cy^d)^e$	$Cx^{f+h}y^{g-h}$
1.	$(5x^3 + 4y^7)^{12}$	$Cx^{21}y^{35}$	2.	$(4x^5 + 8y^4)^{16}$	$Cx^{45}y^{28}$
3.	$(2x^3 + 2y^5)^{18}$	$Cx^{27}y^{45}$	4.	$(11x^4 + 8y^3)^{19}$	Cxy
5.	$(5x^5 + 2y^4)^{13}$	$Cx^{50}y^{12}$	6.	$(10x^3 + 2y^2)^{13}$	$Cx^{21}y^{12}$
7.	$(3x^2 + y^2)^{16}$	$Cx^{12}y^{20}$	8.	$(12x^2 - 2y^4)^{15}$	$Cx^{21}y^{35}$
9.	$(4x + 10y^4)^{14}$	$Cx^{10}y^{16}$	10.	$(8x^4 - y^3)^{14}$	$Cx^{36}y^{15}$
11.	$(8x^2 + 4y^3)^{12}$	$Cx^{10}y^{21}$	12.	$(3x^3 - y^2)^{12}$	$Cx^{27}y^6$
13.	$(2x^3 + 5y^3)^{11}$	$Cx^{30}y^3$	14.	$(2x^4 - 8y^2)^{11}$	Cx^8y^{18}
15.	$(8x^3 + y^2)^{10}$	$Cx^{18}y^8$	16.	$(8x^5 - 2y^3)^{16}$	$Cx^{55}y^{15}$
17.	$(4x^4 + 8y^2)^{18}$	$Cx^{40}y^{16}$	18.	$(5x^2 - 2y^2)^{15}$	$Cx^{16}y^{14}$
19.	$(2x^2 + 11y^5)^{14}$	Cx^8y^{50}	20.	$(2x^2 + 4y^4)^{18}$	$Cx^{24}y^{24}$

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте правило суми.
2. Сформулюйте правило добутку.
3. Дайте означення переміщень.
4. Чому дорівнює число переміщень?
5. Дайте означення розміщень.
6. Чому дорівнює число розміщень?
7. Дайте означення сполучень.
8. Чому дорівнює число сполучень?
9. Відмінність поняття вибірки від поняття підмножини.
10. Що таке комбінаторика?
11. Що таке Біном Ньютона?