Лабораторна робота 2

Тема. Обробка якісних даних із застосуванням методів безпосереднього ранжування та парних порівнянь.

Мета роботи – засвоїти алгоритм побудови ранжируваного ряду, набути навичок використання методів безпосереднього ранжування та парних порівнянь до визначення найбільш (найменш) суттєвих досліджуваних факторів; засвоїти використання коефіцієнту конкордації до виявлення ступені довіри до ітогового ранжування.

I. Теоретичні та практичні відомості з теми

Під ***ранжуванням*** розуміється процес визначення ***рангів***, під якими, в свою чергу, розуміються відносні кількісні оцінки ступенів відмінностей за якісними ознаками.

Процедура ранжування ряду полягає в наступному. Експерту пред'являється набір альтернатив (факторів), які підлягають оцінюванню, і пропонується впорядкувати їх за уподобаннями та приписати їм числа натурального ряду – ранги. Найкраща альтернатива (фактор) отримує ранг, що дорівнює 1, наступна за нею альтернатива (фактор) – ранг, що дорівнює 2 і т.д. В такій постановці формалізуємо процес ранжування (тобто розташування факторів у порядку їх суттєвості) факторів x_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

Способи побудови ранжируваного ряду:

1) на перше місце ставиться найсуттєвіший фактор, слідом за ним менш суттєвий фактор, але найважливіший з решти, і т.д.

   Отриманий таким чином ранжируваний ряд має вигляд

$$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}, \tag{1}$$

   де:

   i_1 – номер найсуттєвішого фактора,

   i_2 – номер менш суттєвого фактора,

   $\ldots$,

   i_n – номер найбільш несуттєвого фактора в цьому ряді.

2) кожному фактору x_i ставиться у відповідність деяке число – його ранг k_i, тобто номер фактора в ранжируваному ряді (1):

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_n. \end{matrix} \tag{2}$$

Очевидно, що перший ранг ($k_i = 1$) має фактор x_i, який найбільш впливає на реалізацію мети на об'єкті дослідження. Другий і наступні ранги (до $k_i = 2$ і т.д.) ставляться у порядку спадання їх суттєвості (важливості).

Задача побудови рангового ряду (1) або еквівалентна до неї задача визначення рангів (2) вирішується експертами та зводиться до організації експертного опитування й обробки результатів цього опитування з тим, щоб отримати шукані ранги та оцінити їх достовірність, тобто визначити узгодженість суджень експертів.

Експертне оцінювання за методом безпосереднього ранжування

Нехай N експертів ранжують n факторів $x_1, \ldots, x_n$.

Кожному фактору кожен експерт присвоює ранг – число від 1 до n. Так, i-му фактору (x_i, $i = \overline{1,n}$) j-й експерт (E_j, $j = \overline{1,N}$) присвоює ранг k_{ij}.

В результаті складається ***матриця*** $K = (k_{ij})$ ***рангових суджень експертів*** виду

$$\begin{array}{c} \\ E_1 \\ E_2 \\ \ldots \\ E_N \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} k_{11} & k_{21} & \ldots & k_{n1} \\ k_{12} & k_{22} & \ldots & k_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{1N} & k_{2N} & \ldots & k_{nN} \end{array} \right\| \end{array}, \qquad (3)$$

де k_{ij} – ранг i-го фактору ($i = \overline{1,n}$), визначений j-м експертом ($j = \overline{1,N}$); номери рядків відповідають номерам експертів, а номери стовпців – номерам факторів. Це означає, що j-й рядок являє собою думку j-го експерта про усі фактори, а i-й стовпець – думка усіх експертів з приводу i-го фактора.

При призначенні рангів експертами потрібно дотримуватися наступних умов:

1) сума рангів, призначених всім факторам кожним експертом, має бути однаковою:
$$\sum_{i=1}^{n} k_{ij} = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad j = 1, 2, \ldots, N;$$
2) якщо експерт якісь з q факторів вважає еквівалентними (однаковими за важливістю), то він надає їм один й той самий ранг, який дорівнює середньому арифметичному з q цілих рангів, таких, які б були отримані за умови, що експерту вдалося їх проранжувати.

Наприклад, якщо для трьох факторів x_1, x_2, x_3 *з різною важливістю* ($x_1 \succ x_2 \succ x_3$) *встановлено відповідні ранги* 1; 2; 3, *то, у випадку, якщо визначено, що* x_1, x_2 *є еквівалентними* ($x_1 \sim x_2$) *та мають більшу важливість (є більш переважними) за* x_3, *то ранжируваний ряд* *матиме вигляд* $x_1 \sim x_2 \succ x_3$, *а ранги будуть наступними:* 1,5; 1,5; 3.

Якщо

$x_3 \sim x_1 \succ x_2$	
1 2 3	ранги при умові врахування суто переважності
1,5 1,5 3	ранги при умові врахування еквівалентності

то, відповідно, ранги будуть наступними: 1,5; 1,5; 3, *а в матрицю рангів записується наступна послідовність рангів:* 1,5; 3; 1,5 – *<u>значення рангів заносяться відповідно розташуванню факторів</u>* x_1, x_2, x_3 *у матриці*.

Для остаточного визначення шуканих рангів слід обчислити середні ранги кожного i-го фактора:

$$\bar{k}_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} k_{ij}, \quad i = \overline{1,n},$$

де на перше місце ставиться фактор з мінімальним середнім рангом

$$\bar{k}_l = \min_{i=1,\ldots,n} \{\bar{k}_i\},$$

тобто фактор x_l, на друге місце – фактор, що має мінімальний з решти ранг тощо.

Отримані ранги дозволяють побудувати ранжируваний ряд факторів, який і буде відповідати усередненій оцінці колективу з N експертів. В такому випадку буде отримане ***ітогове (результуюче) ранжування***.

Визначення узгодженості суджень експертів

<u>Узгодженість суджень експертів</u> визначається за допомогою *коефіцієнта конкордації* (*критерію узгодженості*) $0 \le W \le 1$:

$$W = \frac{D(\bar{k})}{D_{\max}} = \frac{12}{n(n^2-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{k}_i - \frac{n+1}{2}\right)^2,$$

де:

$$D(\bar{k}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{k}_i - M(\bar{k})\right)^2;$$

$$M(\bar{k}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{n+1}{2};$$

$$D_{\max} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(i - \frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

Коефіцієнт конкордації може набувати значень від 0 до 1: $0 \le W \le 1$.

При $W = 0$ судження експертів повністю розходяться.

При $W = 1$ судження експертів висловлюються одноголосно (повністю співпадають), що на практиці являє собою неможливий випадок.

Якщо значення коефіцієнта конкордації є невеликим ($0 \le W < 0{,}75$ – для технічних об’єктів; $0 \le W < 0{,}5$ – для економічних об’єктів; $0 \le W < 0{,}4$ – для екологічних й соціальних об’єктів), то це означає, що ступінь довіри є достатньо низькою, а узгодженість думок експертів – досить слабкою.

Розглянемо практичне використання методу безпосереднього ранжування.

<u>Приклад 1.</u> Нехай маємо судження трьох експертів ($N = 3$), представлених відповідними ранжируваними рядами виду:

– ряд 1-го експерту E_1: $x_1 \succ x_2 \succ x_3$;
– ряд 2-го експерту E_2: $x_2 \succ x_1 \succ x_3$;
– ряд 3-го експерту E_3: $x_3 \succ x_1 \succ x_2$.

Необхідно за наданими експертами рядами ранжування побудувати матрицю рангових суджень експертів, за якою визначити ітогове ранжування та ступінь узгодженості думок експертів. Зробити відповідні висновки.

Розв’язання:

1. Побудуємо матрицю рангових суджень експертів.

Для цього поставимо у відповідність кожному i-му фактору ранг, який відповідає рангу у ранжируваному ряді, наданими відповідними експертами.

Вважаючи, що ранг i-го фактору відповідає номеру цього (i-го) фактору у ранжируваному ряді, наданим відповідним j-м експертом, та враховуючи відношення переважності (та/або еквівалентності) факторів вихідних ранжируваних рядів, отримаємо матрицю рангових суджень $K = (k_{ij})$ з відповідними рангами k_{ij}.

Так, за рядом $x_1 \succ x_2 \succ x_3$ 1-го експерту E_1 маємо наступні ранги: $1;2;3$; за рядом $x_2 \succ x_1 \succ x_3$ 2-го експерту E_2 – ранги $2;1;3$; за рядом $x_3 \succ x_1 \succ x_2$ 3-го експерту E_3 – ранги $2;3;1$.

Отже, матриця суджень представляється матрицею виду

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} & \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right\| \end{array}.$$

2. Визначимо середні ранги за співвідношенням

$$\bar{k}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} k_{ij}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Маємо:

$$\bar{k}_1 = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} k_{1j} = \frac{1}{3}\left(k_{11}+k_{12}+k_{13}\right) = \frac{1}{3}\left(1+2+2\right) = \frac{5}{3},$$

$$\bar{k}_2 = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} k_{2j} = \frac{1}{3}\left(k_{21}+k_{22}+k_{23}\right) = \frac{1}{3}\left(2+1+3\right) = \frac{6}{3} = 2,$$

$$\bar{k}_3 = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} k_{3j} = \frac{1}{3}\left(k_{31}+k_{32}+k_{33}\right) = \frac{1}{3}\left(3+3+1\right) = \frac{7}{3},$$

3. Отримання ітогового ранжируваного ряду.

Розраховані середні ранги $\bar{k}_1 = 5/3$, $\bar{k}_2 = 2$, $\bar{k}_3 = 7/3$ дають можливість побудувати ітоговий ранжируваний ряд. Для цього визначимо з трьох середніх рангів $\bar{k}_1 = 5/3$, $\bar{k}_2 = 2$, $\bar{k}_3 = 7/3$ мінімальний ранг за співвідношенням $\bar{k}_l = \min\limits_{i=1,\ldots,n} \{\bar{k}_i\}$:

$$\bar{k}_1 = \min\left\{\frac{5}{3},\frac{6}{3},\frac{7}{3}\right\} = \frac{5}{3}.$$

Далі, фактор, що відповідає мінімальному середньому рангу $\bar{k}_1 = \frac{5}{3}$, поставимо на перше місце в ранжируваному ряді.

На друге місце поставиться фактор, значення середнього рангу якого буде мінімальним з решти двох, тобто

$$\bar{k}_2 = \min\left\{\frac{6}{3},\frac{7}{3}\right\} = \frac{6}{3}.$$

На останнє місце поставимо фактор, значення середнього рангу якого залишилося, тобто $\bar{k}_3 = \frac{7}{3}$.

Отже, отримуємо ітоговий ранжируваний ряд виду $x_1 \succ x_2 \succ x_3$.

4. Перевіримо узгодженість суджень експертів.

Визначимо узгодженість суджень експертів за коефіцієнтом конкордації:

$$W = \frac{D(\bar{k})}{D_{\max}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{k}_i - \frac{n+1}{2}\right)^2}{\frac{n^2-1}{12}} = \frac{\frac{1}{3}\left(\left(\bar{k}_1-2\right)^2+\left(\bar{k}_2-2\right)^2+\left(\bar{k}_3-2\right)^2\right)}{\frac{8}{12}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left(\left(\frac{5}{3}-\frac{6}{3}\right)^2+\left(2-2\right)^2+\left(\frac{7}{3}-\frac{6}{3}\right)^2\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{27}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11.$$

Оскільки $0 \le W = 0{,}1 \le 0{,}4$, то можна зробити висновок, що судження експертів виявились дуже погано узгодженими. Тим не менш, ітогове ранжування виявилось правильним. Це вийшло за рахунок усереднення суджень експертів, котре виключило їх індивідуальні особливості, а разом з ними і помилки.

Розглянемо ще один приклад.

<u>Приклад 2.</u> За завданням керівництва підприємства аналізувалися вісім проектів, запропонованих для включення до плану стратегічного розвитку підприємства. Вони позначені: *A, B, C, D, E, F, G, H*. Усі проекти було направлено 12 експертам, включеним до експертної групи, організованої за рішенням правління підприємства. У наведеній нижче табл. 1 представлено ранги восьми проектів, які їм було присвоєно кожним з 12 експертів.

Таблиця 1 – Ранги 8 проектів за рівнем привабливості
для включення до плану стратегічного розвитку підприємства

№ експерта	**Досліджувані проекти**							
	A	***B***	***C***	***D***	***E***	***F***	***G***	***H***
1	5	3	1	2	8	4	6	7
2	5	4	3	1	8	2	6	7
3	1	7	5	4	8	2	3	6
4	6	4	2,5	2,5	8	1	7	5
5	8	2	4	6	3	5	1	7
6	5	6	4	3	2	1	7	8
7	6	1	2	3	5	4	8	7
8	5	1	3	2	7	4	6	8
9	6	1	3	2	5	4	7	8
10	5	3	2	1	8	4	6	7
11	7	1	3	2	6	4	5	8
12	1	6	5	3	8	4	2	7

За табл. 1 ранги присвоювалися відповідно до уявлень експертів про доцільність включення проектів у стратегічний план підприємства. Так, експерт надавав ранг 1 найкращому проекту, який обов'язково треба реалізувати; ранг 2 отримував від експерта другий за привабливістю проект, ... , нарешті, ранг 8 – найбільш сумнівний проект, який реалізовувати варто лише в останню чергу.

Зауваження: Експерт №4 вважає, що проекти *C* та *D* є рівноцінними, але поступаються лише одному проекту – проекту *F*. Тому проекти *C* й *D* мали б стояти на другому і третьому місцях та отримати бали 2 й 3. Оскільки вони є рівноцінними, то отримують середній бал (2+3)/2 = 5/2 = 2,5.

Аналізуючи результати роботи експертів, представлені в табл. 1, члени аналітичного підрозділу робочої групи, які аналізували відповіді експертів за завданням правління підприємства, змушені констатувати, що повної згоди між експертами немає, тому дані, наведені в табл. 1, слід піддати ретельнішому математичному аналізу, а, отже, для отримання групового судження потрібне застосування методу безпосереднього ранжування.

Для цього підраховано суму рангів, присвоєних проектам (див. табл. 2). Потім ця сума була розділена на кількість експертів, в результаті розрахований середній ранг.

За отриманими середніми рангами надалі будується ітогове ранжування, виходячи з принципу – чим меншим є середній ранг, тим кращим є проект.

Так, найменший середній ранг, що дорівнює 2,625, у проекту *D*, – отже, у підсумковому ранжуванні він отримує ранг 1. Наступна за величиною сума, що дорівнює 3,125, у проекту *C*, – і він отримує підсумковий ранг 2.

Проекти *B* та *F* мають однакові суми (які дорівнюють 3,25), отже, з точки зору експертів вони є рівноцінними (при аналізованому способі зведення разом суджень експертів), а тому вони мають стояти на 3 й 4 місцях та отримують середній бал (3 +4) /2 = 3,5. Подальші результати розрахунків наведено у табл. 2.

Таблиця 2

Результати розрахунків для рангів, наведених в табл. 1

Обчислювальний показник	**Досліджувані проекти**							
	A	***B***	***C***	***D***	***E***	***F***	***G***	***H***
Сума рангів, $\sum_{j=1}^{N} k_{ij}$	60	39	37,5	31,5	76	39	64	85
Середнє рангів, $\bar{k}_i$	5	3,25	3,125	2,625	6,333	3,25	5,333	7,083
Ітоговий ранг	5	3,5	2	1	7	3,5	6	8

Отже, ітогове ранжування має вигляд

$$D \succ C \succ B \sim F \succ A \succ G \succ E \succ H .$$

Найбільш привабливим проектом, таким чином, є проект *D*, найменш привабливим проектом визначено проект *H*. Оскільки проекти *B* та *F* отримали однакову суму балів, то це означає, що вони є еквівалентними.

Надалі оцінюється узгодженість суджень експертів за використанням коефіцієнту конкордації (виконати самостійно).

Розглянемо методологію методу парних порівнянь.

Згідно з методом **парних порівнянь** усі фактори порівнюються між собою послідовно, причому кожна наступна оцінка не зв’язана з попередньою.

Нехай *N* експертів ранжирують *n* факторів $x_1, \ldots, x_n$ та отримують ранжирувані ряди.

<u>Наприклад</u>, якщо є 3 експерти E_j $(j = 1,2,3)$ *, яким необхідно проранжирувати 3 фактори* x_i $(i = 1,2,3)$*, то отримані ранжирувані ряди можуть мати наступний вигляд:*

– ряд 1-го експерту E_1*:* $x_1 \succ x_2 \succ x_3$*;*

– *ряд 2-го експерту* $E_2: \; x_2 \succ x_1 \succ x_3$;

– *ряд 3-го експерту* $E_3: \; x_3 \succ x_1 \succ x_2$.

Необхідно визначити ітогове ранжування, яке буде узагальнювати судження всіх експертів.

Для цього здійснюються наступні **етапи реалізації методу парних порівнянь**:

1 етап: ***Складання матриці парних порівнянь для кожного експерта.***

На цьому етапі здійснюється полегшення процедури порівняння наявних факторів, для чого звичайно використовується спеціальна матриця (таблиця) парних порівнянь (табл. 1), в якій фактори (параметри, ознаки, напрями розвитку) розміщуються за горизонталями та за вертикалями (у верхньому рядку та в лівому крайньому стовпці).

Таблиця 1

Фактори	x_1	x_2	…	x_l	…	x_n
x_1	$x_1 : x_1$	$x_1 : x_2$	…	$x_1 : x_l$	…	$x_1 : x_n$
x_2	$x_2 : x_1$	$x_2 : x_2$	…	$x_2 : x_l$	…	$x_2 : x_n$
…	…	…	…	…	…	…
x_i	$x_i : x_1$	$x_i : x_2$	…	$x_i : x_l$	…	$x_i : x_n$
…	…	…	…	…	…	…
x_n	$x_n : x_1$	$x_n : x_2$	…	$x_n : x_l$	…	$x_n : x_n$

За даною таблицею при використанні методу парних порівнянь попарно порівнюються фактори x_i з x_l з метою визначення у кожній парі найбільш важливого (значущого) фактору. В результаті таких попарних порівнянь факторів x_i з x_l заповнюється наступна таблиця (матриця), у комірки якої вписуються результати (оцінки) q_{il} здійснених порівнянь.

При цьому ранжування в такій постановці відбувається за правилом: якщо фактор i (у рядку) є більш значущим, ніж фактор l (у стовпці), то елементу q_{il} (у комірці il) приписується «+1», в противному випадку – ставиться «–1». У комірках головної діагоналі (q_{il} , $i = l$) проставляються «0», оскільки порівнювальні елементи на головній діагоналі є еквівалентними самі до себе.

Отже, досліднику пропонується попарно проранжирувати фактори, що формально означає, що кожній парі факторів x_i та x_l поставлено у відповідність число

$$q_{il} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_i \succ x_l \; ; \\ 0, & \text{якщо } x_i \sim x_l \; ; \\ -1, & \text{якщо } x_i \prec x_l \; . \end{cases}$$

При цьому $q_{il} = -q_{li}$.

Таким чином, судження кожного *j*-го експерту представляється у вигляді матриці парних порівнянь виду

$$Q^j = \left\| q_{il}^j \right\|, \quad i,l = 1,2,\ldots,n; \quad j = 1,2,\ldots,N,$$

де: q_{il}^j визначає оцінки q_{il}, отримані за судженням j-го експерта;

кількість матриць Q^j відповідає кількості експертів, тобто N.

2 етап: ***Визначення матриці середніх парних порівнянь.***

На даному етапі отримані на попередньому етапі матриці $Q^j = \left\| q_{il}^j \right\|$ для усереднення суджень експертів зводяться до однієї загальної матриці – матриці середніх парних порівнянь розмірності $n \times n$ виду

$$\overline{Q} = \left\| \overline{q}_{il} \right\|,$$

де $\overline{q}_{il}$ – середнє парне порівняння *i*-го фактора з *l*-м, отримане від усіх *N* експертів:

$$\overline{q}_{il} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} q_{il}^j, \quad i,l = 1,2,\ldots,n.$$

3 етап: ***Визначення середніх рангів за кожним i-м фактором.***

На даному етапі для остаточного визначення шуканих рангів обчислюються середні ранги за кожним *i*-м фактором

$$\overline{q}_i = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} \overline{q}_{il}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Такі середні ранги $\overline{q}_i$ виступають в якості *показників узагальненого судження щодо важливості факторів*: чим більшою є сума *i*-го рядка, тим більш важливе значення має *i*-й фактор.

4 етап: ***Визначення ітогового ранжування факторів.***

На даному етапі за обчисленими середніми рангами $\overline{q}_i$ будується ранжируваний ряд, в якому на перше місце ставиться фактор з максимальним середнім рангом

$$\overline{q}_v = \max_{i=1,\ldots,n} \left\{ \overline{q}_i \right\},$$

тобто фактор x_v (цей фактор є найсуттєвішим), на друге місце ставиться фактор, який має максимальний з решти середній ранг, і т.д.

Отримані ранги дозволяють побудувати ранжируваний ряд факторів, який і буде відповідати усередненій оцінці колективу з *N* експертів. В такому випадку буде отримане ***ітогове (результуюче) ранжування***.

Визначення узгодженості суджень експертів

З метою оцінки ступеня довіри ОПР отримуваному ітоговому ранжуванню визначимо ***узгодженість суджень експертів***, яка встановлюється за коефіцієнтом конкордації $0 \le W \le 1$, який визначається виразом

$$W = \frac{D(\bar{q})}{D_{\max}} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,l=1}^{n} (\bar{q}_{il})^2 ,$$

де

$$D(\bar{q}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,l=1}^{n} (\bar{q}_{il})^2 ; \qquad D_{\max} = 1 .$$

При $W = 1$ судження експертів є повністю узгодженими, а при $W = 0$ вони суперечать один одному. Якщо значення коефіцієнта конкордації є невеликим ($0 \le W < 0{,}75$ – для технічних об'єктів; $0 \le W < 0{,}5$ – для економічних об'єктів; $0 \le W < 0{,}4$ – для екологічних й соціальних об'єктів), то це означає, що ступінь довіри є достатньо низькою, а узгодженість думок експертів – досить слабкою.

Розглянемо приклад з використання методу парних порівнянь.

<u>Приклад 3.</u> Нехай маємо судження трьох експертів ($N = 3$), представлених відповідними ранжируваними рядами факторів x_i $(i = 1, 2, 3)$:

– ряд 1-го експерту E_1: $x_1 \succ x_2 \succ x_3$;
– ряд 2-го експерту E_2: $x_2 \succ x_1 \succ x_3$;
– ряд 3-го експерту E_3: $x_3 \succ x_1 \succ x_2$.

Необхідно з використанням методу парних порівнянь визначити ітогове ранжування, яке буде узагальнювати судження всіх експертів. Оцінити ступінь узгодженості думок експертів.

Розв'язання:

1. Побудуємо для кожного експерта матриці парних порівнянь виду

$$Q^j = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_i \\ \cdots \\ x_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_l & \cdots & x_n \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccc} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1l} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2l} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{i1} & q_{i2} & \cdots & q_{il} & \cdots & q_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nl} & \cdots & q_{nn} \end{array} \right\| \end{array}, \quad i,l = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,N} .$$

Використовуючи ранжируваний ряд 1-го експерту проводимо попарне порівняння кожного фактору x_i (елементи рядку) з кожним фактором x_l (елементи стовпця). В залежності від того, який фактор x_i переважатиме (не переважатиме, буде еквівалентним) фактор x_l, у матриці порівнянь Q^1 для цього експерту на перетині відповідних рядків з відповідними стовпцями проставимо числове значення q_{il} за наступним правилом:

$$q_{il} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_i \succ x_l \text{ ;} \\ 0, & \text{якщо } x_i \sim x_l \text{ ;} \\ -1, & \text{якщо } x_i \prec x_l \text{ .} \end{cases} \qquad q_{il} = -q_{li} .$$

Так, порівнюючи x_1 (з 1 рядку) з x_1 (з 1 стовпця) маємо, що $x_1 \sim x_1$, а, отже, $q_{11} = 0$. Далі, порівнюючи x_1 (з 1 рядку) з x_2 (з 2 стовпця) маємо (з ранжируваного ряду E_1), що $x_1 \succ x_2$, а, отже, $q_{12} = 1$. Аналогічно, порівнюючи x_1 (з 1 рядку) з x_3 (з 3 стовпця) маємо (з ранжируваного ряду E_1), що $x_1 \succ x_3$, а, отже, $q_{13} = 1$. Отже, таким чином, заповнено 1 рядок матриці Q^1. Далі, діючи аналогічним чином, заповнюємо 2 й 3 рядки матриці. В результаті, для 1-го експерта отримуємо

$$Q^1 = \| q_{il}^1 \| = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right\| \end{array},$$

верхній індекс в q_{il}^1 означає, що елементи q_{il} відносяться саме до матриці Q^1.

Аналогічно, для 2-го та 3-го експертів маємо:

$$Q^2 = \| q_{il}^2 \| = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccc} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right\| \end{array}, \qquad Q^3 = \| q_{il}^3 \| = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right\| \end{array}.$$

2. Побудуємо матрицю $\overline{Q} = \| \overline{q}_{il} \|$ середніх парних порівнянь $\overline{q}_{il} = \dfrac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} q_{il}^j$, які являють собою середнє арифметичне відповідних (з однаковими індексами) елементів матриць Q^j, $j = \overline{1, N}$.

Для даного прикладу, елементи 1 рядка матриці $\overline{Q}$ визначаються наступним чином:

$$\overline{q}_{11} = \frac{1}{3}\left(q_{11}^1 + q_{11}^2 + q_{11}^3\right) = \frac{1}{3}(0 + 0 + 0) = 0,$$

$$\overline{q}_{12} = \frac{1}{3}\left(q_{12}^1 + q_{12}^2 + q_{12}^3\right) = \frac{1}{3}(1 + (-1) + 1) = \frac{1}{3},$$

$$\overline{q}_{13} = \frac{1}{3}\left(q_{13}^1 + q_{13}^2 + q_{13}^3\right) = \frac{1}{3}(1 + 1 + (-1)) = \frac{1}{3}.$$

Діючи аналогічно, отримаємо матрицю середніх парних порівнянь

$$\overline{Q} = \begin{Vmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

3. Визначимо середні ранги за кожним i-м фактором за співвідношенням

$$\overline{q}_i = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\overline{q}_{il}, \quad i = 1,\dots,n.$$

Маємо:

$$\overline{q}_1 = \frac{1}{3}\left(\overline{q}_{11} + \overline{q}_{12} + \overline{q}_{13}\right) = \frac{1}{3}\left(0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9},$$

$$\overline{q}_2 = \frac{1}{3}\left(\overline{q}_{21} + \overline{q}_{22} + \overline{q}_{23}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3}\right) = 0,$$

$$\overline{q}_3 = \frac{1}{3}\left(\overline{q}_{31} + \overline{q}_{32} + \overline{q}_{33}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 0\right) = -\frac{2}{9}.$$

4. Визначимо ітоговий ряд ранжування.

Розраховані середні ранги $\overline{q}_1 = 2/9$, $\overline{q}_2 = 0$, $\overline{q}_3 = -2/9$ дають можливість побудувати ітоговий ранжируваний ряд. Для цього визначимо з трьох середніх рангів $\overline{q}_1 = 2/9$, $\overline{q}_2 = 0$, $\overline{q}_3 = -2/9$ максимальний ранг за співвідношенням $\overline{q}_v = \max\limits_{i=1,\dots,n}\left\{\overline{q}_i\right\}$:

$$\overline{q}_1 = \max\left\{\frac{2}{9}, 0, -\frac{2}{9}\right\} = \frac{2}{9}.$$

Далі, фактор, що відповідає максимальному середньому рангу $\overline{q}_1 = 2/9$, поставимо на перше місце в ранжируваному ряді.

На друге місце поставиться фактор, значення середнього рангу якого буде максимальним з решти двох, тобто $\overline{q}_2 = \max\left\{0, -\frac{2}{9}\right\} = 0$.

На останнє місце поставимо фактор, значення середнього рангу якого залишилося, тобто $\overline{q}_3 = -2/9$.

Отже, отримуємо ітоговий ранжируваний ряд: $x_1 \succ x_2 \succ x_3$.

5. Визначимо узгодженість суджень експертів.

Обчислимо коефіцієнт конкордації:

$$W = \frac{D(\bar{q})}{D_{\max}} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,l=1}^{n} \left(\bar{q}_{il}\right)^2 = \frac{1}{3(3-1)} \sum_{i,l=1}^{3} \left(\bar{q}_{il}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(0^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 0^2 \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{9} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11.$$

Оскільки $0 \le W = 0{,}1 \le 0{,}4$, то можна зробити висновок, що судження експертів виявились дуже погано узгодженими. Тим не менш, ітогове ранжування виявилось правильним. Це вийшло за рахунок усереднення суджень експертів, котре виключило їх індивідуальні особливості, а разом з ними і помилки.