Лабораторна робота 2

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ НА ОСНОВІ БІНАРНИХ ВІДНОШЕНЬ

Мета роботи – ознайомитись з апаратом бінарних відношень та його використанням при прийнятті рішень; вивчити методи прийняття рішень на основі заданих відношень переваги, функцій вибору та функцій корисності; набути навичок застосування цих методів на практиці.

Короткі теоретичні відомості та

Відношенням R на множині Ω називається підмножина множини $\Omega\times\Omega$, тобто $R\subset\Omega\times\Omega$.

Задавання підмножини R в множині $\Omega\times\Omega$ визначає які пари знаходяться у відношенні R. Відношення R на множині Ω позначається таким чином: (R,Ω).

Якщо елементи x та y множини Ω знаходяться у відношенні R , то це записується таким чином: $x\,R\,y$ або $(x, y)\in R$.

Способи задавання відношень:

1) перелічуванням усіх пар $(x, y)\in\Omega\times\Omega$, які включено у відношення R.

Приклад 1. $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, $R_1=\{(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_2,a_3)(a_2,a_4)(a_3,a_2)(a_3,a_4\}$;

2) матрицею відношення R.

Нехай Ω складається з n елементів, R – відношення на Ω. Занумеруємо елементи множини Ω цілими числами від 1 до n. Для того, щоб задати відношення побудуємо квадратну таблицю розміром $n\times n$. Її i-ий рядок відповідає елементу x_i множини Ω, j-й стовпчик – елементу x_j з Ω. На перерізі i-го рядка та j-го стовпчика ставимо 1, якщо виконується $x_i\,R\,x_j$, і нуль в інших випадках, тобто

$$a_{ij}(R)=\begin{cases}1, & x_i\,R\,x_j,\\ 0, & \text{в інших випадках,}\end{cases}$$

Приклад 2. Нехай $X=\{1,2,\ldots,5\}$, R відношення “більше” на множині X. Тоді задання матрицею відношення R має вигляд:

$$R=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0\end{pmatrix};$$

3) графом відношення R.

Для того, щоб задати відношення графом поставимо у взаємно однозначну відповідність елементам скінченної множини Ω, на якій визначено відношення, вершини графа $x_1,...,x_n$ (за будь-якою нумерацією).

Проведемо дугу від x_i, до x_j, тоді й тільки тоді, коли виконується $x_i\, R\, x_j$ (якщо $i = j$ дуга (x_i, x_j) перетворюється у петлю при вершині x_i).

Якщо задано будь-який орієнтований граф G з n вершинами, та вибрана нумерація на множині Ω, то таким чином на Ω задане деяке відношення $R = R(G)$, таке, що $x_i\, R\, x_j$ виконується тоді і тільки тоді, коли в графі G є дуга (x_i, x_j). Отже, граф є геометричним зображенням відношення.

Приклад 3. Задаємо відношення з прикладу 2 графом.

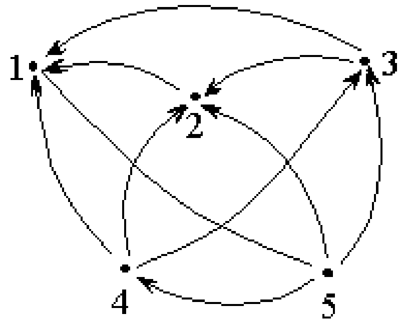


Рис. 1. Задавання відношення “більше” на множині $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ за допомогою графа

Для багатьох альтернатив граф може мати складний вигляд. У такому випадку кращими будуть ті альтернативи, з яких дуги тільки виходять. Тобто, на графі, зображеному на рис. 1, кращою є альтернатива 5.

Зображення переваг у вигляді графів дає змогу наочно оцінювати переваги альтернатив за сукупністю критеріїв.

Верхнім розрізом $R^+(x)$ відношення (R,Ω) в елементі x називається множина елементів $y \in \Omega$ таких, що $(x, y) \in R$

$$R^+(x) = \{y \in \Omega | (x, y) \in R\}. \quad (1)$$

Тобто верхній розріз (множина R^+) це множина всіх таких елементів y, з якими фіксований елемент x знаходиться у відношенні R $(x\, R\, y)$.

Нижнім розрізом $R^-(x)$ відношення (R,Ω) в елементі x називається множина елементів $y \in \Omega$ таких, що $(y, x) \in R$

$$R^-(x) = \{y \in \Omega | (y, x) \in R\}. \quad (2)$$

Тобто нижній розріз (множина R^-) – це множина всіх таких елементів y, які перебувають у відношенні R з фіксованим елементом x $(y\, R\, x)$.

Відношення R задане, якщо для кожного $x \in \Omega$ задано множину $R^+(x)$ або для кожного $x \in \Omega$ задано множину $R^-(x)$.

Приклад 4. Нехай $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 10\}$, відношення R – «буде дільником», тобто $x\ R\ y$, якщо y – дільник x. Задамо це відношення розрізами.

За допомогою верхніх розрізів:

$R^+(1) = \{1\}$, $R^+(6) = \{1;2;3;6\}$

$R^+(2) = \{1;2\}$, $R^+(7) = \{1;7\}$,

$R^+(3) = \{1;3\}$, $R^+(8) = \{1;2;4;8\}$,

$R^+(4) = \{1;2;4\}$, $R^+(9) = \{1;3;9\}$,

$R^+(5) = \{1;5\}$, $R^+(10) = \{1;2;5;10\}$.

Або за допомогою нижніх розрізів: відношення R – «буде дільником», тобто $y\ R\ x$, якщо x – дільник y

$R^-(1) = \{1;2,...,10\}$, $R^-(6) = \{6\}$,

$R^-(2) = \{2;4,...,10\}$, $R^-(7) = \{7\}$,

$R^-(3) = \{3;6;9\}$, $R^-(8) = \{8\}$,

$R^-(4) = \{4;8\}$, $R^-(9) = \{9\}$,

$R^-(5) = \{5;10\}$, $R^-(10) = \{10\}$.

Розглянемо **відношення спеціального виду**, та описані вище способи їх задавання.

Відношення називається ***порожнім*** (позначається $\varnothing$), якщо воно не виконується для жодної пари $(x, y) \subset \Omega\times\Omega$.

Для порожнього відношення справедливо:

1. Матриця A ($\varnothing$) така, що $a_{i,j}$ ($\varnothing$) = 0, для всіх i, j;
2. Граф $G(\varnothing)$ не має дуг;
3. $R^+(x) = R^-(x) = \varnothing$ для всякого $x \in \Omega$.

Відношення називається ***повним*** (позначається U), якщо воно виконується для всіх пар $(x, y) \subset \Omega\times\Omega$. Для повного відношення вірно:

1. Матриця A (U) така, що $a_{i,j}$ (U) = 1, для всіх i, j;
2. Граф $G(U)$ такий, що дуги з'єднують аби-яку пару вершин;
3. Розрізи $R^+(x) = R^-(x) = \Omega$ для всіх $x \in \Omega$.

Відношення називається ***діагональним*** або відношенням рівності (позначається E), якщо воно виконується для всіх пар $(x, y) \subset \Omega\times\Omega$, які складаються із співпадаючих елементів: $x\ E\ y$, якщо x та y це один і той самий елемент множини Ω.

Для діагонального відношення E мають місце твердження:

1. Матриця A (E) така, що

$$a_{i,j}(E) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } & i = j, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

2. Граф $G(E)$ такий, що наявні тільки петлі у вершинах;

3. Розрізи $R^+(x) = R^-(x) = x$ для всіх $x \in \Omega$.

Відношення називається ***антидіагональним*** (позначається $\overline{E}$), якщо воно виконується для всіх пар $(x, y) \subset \Omega\times\Omega$, які складаються з не співпадаючих елементів. Для відношення $\overline{E}$ справедливо:

1. Матриця A (E) така, що

$$a_{i,j}\left(\overline{E}\right)=\begin{cases}1, \text{якщо} & i \neq j,\\ 0, \text{в інших випадках.}\end{cases}$$

2. Граф $G(\overline{E})$ такий, що наявні всі дуги (x_i, x_j) якщо $i \neq j$, (відсутні тільки петлі при вершинах).

3. Розрізи $R^+(x) = R^-(x) = \Omega \setminus \{x\}$ для всіх $x \in \Omega$.

Операції над відношеннями.

Відношення R_1 *включено* у відношення R_2 (записується $R_1 \le R_2$), якщо множина пар, для яких виконується відношення R_1 включена у множину пар, для яких виконується R_2.

Будемо говорити, що відношення R_1 *строго включено* у R_2 $(R_1 < R_2)$, якщо $R_1 \le R_2$ й $R_1 \neq R_2$. Рівність відношень реалізується так само як і рівність множин.

Для матричного задавання відношень буде вірним таке правило: якщо $R_1 \le R_2$, то $a_{ij}(R_1) \le a_{ij}(R_2),\ i, j = \overline{1,n}$.

Приклад 5. R_1 – відношення «$\le$» на множині дійсних чисел, R_2 – відношення «$<$» на множині дійсних чисел. Тоді $R_1 \le R_2$.

Відношення $\overline{R}$ називається *доповненням* відношення R, тоді і тільки тоді, коли воно виконується лише для тих пар елементів, для яких не виконується відношення R.

Очевидно, що

$$\overline{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{\Omega}^2 \setminus \boldsymbol{R}. \tag{3}$$

Тому у матричному запису $a_{ij}\left(\overline{R}\right) = 1 - a_{ij}(R),\ i, j = \overline{1,n}$.

У графі $G\left(\overline{R}\right)$ присутні ті й тільки ті дуги, які відсутні у графі $G(R)$.

Для розрізів відношення $\overline{R}$ справедливо: $\overline{R}^+(x) = \Omega \setminus R^+(x),\ \overline{R}^-(x) = \Omega \setminus R^-(x)$.

Приклад 6. Нехай R – відношення «$\ge$» на множині дійсних чисел, тоді $\overline{\mathrm{R}}$ – відношення «$<$» на множині дійсних чисел.

Перерізом відношення R_1 та R_2 (записується $R_1 \cap R_2$) називається відношення, яке визначено перерізом відповідних підмножин з Ω^2.

В матричному записі це означає, що

$$a_{ij}(R_1 \cap R_2) = min\{a_{ij}(R_1), a_{ij}(R_2)\},\ i, j = \overline{1,n}.$$

Об'єднанням відношень R_1 та R_2 (позначається $R_1 \cup R_2$) називається відношення, що визначено об'єднанням відповідних підмножин з Ω^2.

В матричному записі це можна записати, як

$$a_{ij}(R_1 \cup R_2) = max\{a_{ij}(R_1), a_{ij}(R_2)\}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Зворотним до відношення R називається відношення R^{-1}, яке визначається такою умовою:

$$x\,R^{-1}y \;\Leftrightarrow\; y\,R\;x. \tag{4}$$

Для матриць відношень R та R^{-1} буде мати місце $a_{ij}\left(R^{-1}\right) = a_{ji}(R)$.

Приклад 7 Нехай R – відношення «$\geq$» на множині дійсних чисел. Тоді R^{-1} – відношення «$\leq$» на множині дійсних чисел.

Приклад 8. Нехай відношення R на множині $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ задано матрицею:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Побудувати відповідні йому зворотне відношення та доповнення.

Розв'язування

Згідно означення 2.5. Для доповнення відношення *R* маємо:

$$\overline{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зворотне відношення будуємо за означенням 2.8:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Добутком (або *композицією* відношень R_1 та R_2 (позначається $R_1 \cdot R_2$) називається відношення, яке визначається за правилом:

$x\,(R_1 \cdot R_2)\,y$, якщо існує елемент $z \in \Omega$, такий що $x\,R_1\,z$ та $z\,R_2\,y$.

Приклад 9. R_1 – відношення «менше», R_2 – відношення «більше», R_1 та R_2 подані на Ω. Пара чисел $(x, y) \subset R_1 \cdot R_2$, якщо існує *z* такий, що $x < z$ та $z > y$, тобто $R_1 \cdot R_2$ – це повне відношення на Ω (таке, яким пов'язані усі елементи множини Ω).

Приклад 10. Нехай на множині $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ подано два відношення R_1 та R_2.

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначити їх композицію.

Розв'язування

Згідно означення 2.9 $x\left(R_1 \cdot R_2\right)y$, якщо існує $z \in \Omega$, такий що $x\, R_1\, z$ та $z\, R_2\, y$. У матричному записі це означає, що

$$a_{ij}\left(R_1 \cdot R_2\right) = \max_{k=\overline{1,n}} min\left\{a_{ik}\left(R_1\right), a_{kj}\left(R_2\right)\right\},$$

де *n* порядок матриці.

Тобто композиція відношень обчислюється як максимінний добуток відповідних їм матриць.

Тоді маємо:

$$R_1 \cdot R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Відношення $\left(R_1, \Omega_1\right)$ називається *звуженням* відношення $\left(R, \Omega\right)$ на множину Ω, якщо $\Omega_1 \subseteq \Omega$ та $R_1 = R \cap \Omega_1 \times \Omega_1$. Звуження відношення $\left(R, \Omega\right)$ на множину Ω_1 називають також відношенням R на множині Ω_1.

Приклад 11. Відношення « >» на множині натуральних чисел є звуженням відношення « >» на множині дійсних чисел.

Приклад 12. (≤) – розширення відношень (<) і (=), бо (<) ⊂ (≤) і (=) ⊂ (≤).

Властивості відношень.

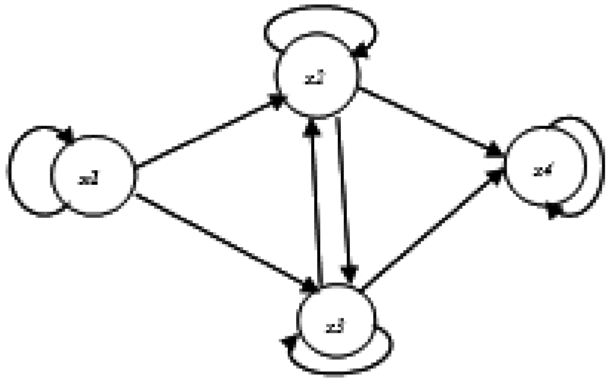
Відношення *R* є *рефлексивним*, якщо $x\, R\, x$ для будь-якого $x \in \Omega$.

В матриці рефлексивного відношення на головній діагоналі знаходяться одиниці, тобто матриця така, що $a_{i,j} = 1$, якщо $i = j$.

Граф рефлексивного відношення обов'язково має петлі у вершинах.

$A_{[4\times4]} =$

	x1	x2	x3	x4
x1	1	1	1	0
x2	0	1	1	1
x3	0	1	1	1
x4	0	0	0	1



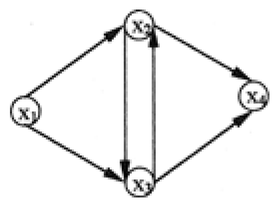
Відношення R є *антирефлексивним*, якщо $x\,R\,y$ означає $x \neq y$, для $\forall x \in \Omega$.

В матриці антирефлексивного відношення на головній діагоналі знаходяться нулі, тобто $a_{i,j} = 0$, якщо $i = j$.

Граф рефлексивного відношення не має петель у вершинах.

$A_{[4\times4]} =$

	x1	x2	x3	x4
x1	0	1	1	0
x2	0	0	1	1
x3	0	1	0	1
x4	0	0	0	0



Відношення R є *симетричним*, якщо $R \leq R^{-1}$ $\left(x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x\right)$.

Матриця симетричного відношення симетрична, тобто $a_{i,j} = a_{ji}$, для всіх i, j.

У графі всі дуги парні.

Відношення R є *асиметричним*, якщо $R \bigcap R^{-1} = \varnothing$ (тобто з двох виразів $x\,R\,y$ та $y\,R\,x$ хоча б один не вірний).

У матриці симетричного відношення $a_{ij} \wedge a_{ji} = 0$ для всіх i, j. Тобто з двох симетричних елементів a_{ij} і a_{ji} хоча б один обов'язково дорівнює 0.

Зауважимо, що антирефлексивність є обов'язковою умовою асиметричності.

Відношення R називається *антисиметричним*, якщо $x\,R\,y$ та $y\,R\,x$ можуть бути вірні одночасно тоді і тільки тоді, коли $x = y$.

Для матриці антисиметричного відношення справедливо $a_{ij} \wedge a_{ji} = 0$, якщо $i \neq j$.

Відношення R є *транзитивним*, якщо $R^2 \leq R$ (якщо з $x\,R\,z$ та $z\,R\,y$ випливає $x\,R\,y$).

Умова $R^2 \leq R$ дає зручний спосіб перевірки транзитивності відношення. Якщо відношення задано матрицею для цього необхідно обчислити матрицю відношення R^2 (тобто піднести в квадрат матрицю вихідного відношення) і перевірити умову. Якщо $a_{ij}\left(R^2\right) \leq a_{ij}\left(R\right)$ для всіх i, j – відношення транзитивне. Якщо ж умову $a_{ij}\left(R^2\right) \leq a_{ij}\left(R\right)$порушено хоча б для однієї пари індексів i, j – відношення не буде транзитивним.

Відношення R є *ациклічним*, якщо $R \bigcap R^{-1} = \varnothing$, тобто з $x\,R\,z_1$, $z_1\,R\,z_2$, ... , $z_{k-1}\,R\,y$ випливає, що $x \neq y$.

Це означає, що граф такого відношення не містить циклів.

Відношення R називається *від'ємно транзитивним*, якщо його доповнення $\overline{R}$ транзитивне.

Відношення R називається *сильно транзитивним*, якщо воно водночас транзитивне та від'ємно транзитивне.

Приклад 13. Визначити властивості даного відношення

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язування

Дане відношення є рефлексивним, воно не є симетричним, асиметричним та антисиметричним.

Для перевірки транзитивності даного відношення знайдемо добуток даного відношення на себе.

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Оскільки $R^2 \not\subset R$, дане відношення не є транзитивним.

Відношення еквівалентності, порядку, домінування та переваги.

Відношення R є відношенням *еквівалентності* (*еквівалентністю*), якщо воно рефлексивне, симетричне та транзитивне. Позначимо його R_e , або символом ~.

Задавання еквівалентності на множині тісно пов'язане з розбиттям множини на її підмножини, що не перетинаються.

Нехай задане розбиття множини Ω. Тобто на множині Ω задані такі її підмножини Ω_1, Ω_2,… Ω_N, що $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i$, причому $\Omega_i \bigcap \Omega_j = \varnothing$, для $i \neq j,\quad i, j, = 1,2,\ldots N$.

Введемо на множині Ω відношення R таким чином: $x\,R\,y$ тоді і тільки тоді, коли існує множина Ω_i, така, що $x \in \Omega_i$ і $y \in \Omega_i$.

Таким чином, задавання еквівалентності на деякій множині Ω рівносильне задаванню розбиття цієї множини на класи еквівалентних між собою елементів. І навпаки, всіляке розбиття множини Ω визначає на цій множині відповідну йому еквівалентність.

Відношенням *нестрогого порядку* «≤» (*нестрогим порядком* називається відношення, яке має властивості рефлективності, антисиметричності та транзитивності.

Відношенням *строгого порядку* «<» (*строгим порядком* є відношення, яке має властивості антирефлективності, асиметричності та транзитивності.

Нехай задано відношення «≤» – нестрогий порядок на множині Ω. Йому можна поставити у відповідність строгий порядок «<», який визначається таким чином: $x < y$ тоді і тільки тоді коли $x \le y$ та $x \ne y$. І навпаки, нехай «<» – відношення строгого порядку на множині Ω. Йому можна поставити у відповідність відношення «≤» таким чином: $x \le y$ тоді і тільки тоді, коли $x < y$ або $x = y$. Тобто за нестрогим порядком ми можемо визначити відповідний йому строгий порядок і навпаки.

Якщо на деякій множині задане відношення порядку (для всіх, або деяких пар його елементів), то кажуть, що на множині заданий *частковий порядок.*

Частковий порядок, заданий на множині Ω називається лінійним порядком, якщо для будь яких елементів $x \in \Omega,\ y \in \Omega$ має місце одна з трьох умов $x < y, x = y$ або $x > y$ (тобто ми можемо порівняти будь які два елементи з Ω).

Відношенням *домінування* називається відношення, що має властивості антирефлексивності і асиметричності.

Будемо говорити, що x домінує y, якщо x в якому-небудь сенсі краще за y.

Таким чином, відношення строгого порядку є особливим випадком відношення домінування, при якому вимагається ще й транзитивність. У загальному випадку при домінуванні як транзитивність так і ацикліність можуть не мати місця.

Два елементи можна порівняти за відношенням R, якщо $x\ R\ y$ або $y\ R\ x$. В інших випадках елементи незрівняні.

У випадку повного відношення R на множині Ω, всілякі два елементи цієї множини можна порівняти.

Розглянемо приклади порядків, які можна задати на m-мірному просторі E_m.

1. $a \ge b$ тоді і тільки тоді коли $a_i \ge b_i$ для всіх $i = 1,2,\ldots m$;
2. $a \ge b$ тоді і тільки тоді коли $a_i \ge b_i$ для всіх $i = 1,2,\ldots m$, і $a \ne b$;
3. $a > b$ тоді і тільки тоді коли $a_i > b_i$ для всіх $i = 1,2,\ldots m$;
4. $a \overline{>} b$ тоді і тільки тоді коли $a = b$ або $a_i > b_i$ хоч би для одного $i \in \{1,2,\ldots m\}$;
5. $a = b$ тоді і тільки тоді коли $a_i = b_i$ для всіх $i = 1,2,\ldots m$.

Відношення 1 є частковим порядком, воно рефлексивне, антисиметричне та транзитивне).

Відношення 2 і 3 строгі часткові порядки. Вони антирефлексивні, асиметричні, транзитивні.

Відношення 4 є рефлексивним, але воно не буде не симетричним не транзитивним.

Для опису переваги використовують такі бінарні відношення, дані на множині альтернатив Ω:

a) **відношення строгої переваги R^S,**
b) **відношення байдужості R^I,**
c) **відношення нестрогої переваги.**

Відношення строгої переваги R^S означає, що один об'єкт (строго) переважає інший (краще).

Відношення байдужості R^I означає, що об'єкти однакові за перевагами, і якщо обмежити вибір цими двома об'єктами, все одно який з них вибирати.

Відношення нестрогої переваги означає що один об'єкт не менш переважний, ніж інший (не гірше)

Припустимо, що за допомогою ОПР або експертів визначене відношення нестрогої переваги *R* на множині припустимих альтернатив *X*.

Це означає, що відносно будь-якої пари $(x, y) \subset X \times X$, відомо:

1) « x не гірше y », тобто $x \geq y$ (інакше $(x, y) \in R$);

2) « y не гірше x », тобто $y \geq x$ (або $(y, x) \in R$) ;

3) « x та y не порівняні між собою» ($(x, y) \notin R$ та $(y, x) \notin R$).

Ця інформація дозволяє звузити клас раціональних виборів, включивши до нього лише ті альтернативи, які не домінуються жодною іншою альтернативою множини *X*.

Щоб пояснити це поняття, визначимо відповідні відношенню переваги *R* відношення строгої переваги R^S та відношення однаковості (байдужості) *I*.

Будемо казати, що альтернатива *x* строго краще альтернативи *y* (строго переважає альтернативу *y*), якщо одночасно $x \geq y$ та $y \neq x$, тобто

$$(x, y) \in R \text{ і } (y, x) \notin R .$$

Сукупність усіх таких пар назвемо відношенням **строгої перева**ги R^S на множині *X*.

Це відношення повинно задовольняти таким властивостям:

1) антирефлексивність,

2) асиметричність.

Для більш компактного запису відношення R^S використаємо визначення відношення R^{-1}, зворотного до *R*, а саме $(x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R$.

Тоді відношення строгої переваги може бути записано в такому вигляді:

$$R^S = R \setminus R^{-1}.$$

Відношення однаковості що відповідає відношенню переваги *R* визначається таким чином. Пара $(x, y) \in R^I$ тоді і лише тоді, коли або не вірне ні $x \geq y$ ні $y \geq x$ або одночасно $x \geq y$ та $y \geq x$. Інакше кажучи, $(x, y) \in R^I$ коли інформація, яку ми маємо недостатня для того, щоб зробити обґрунтований вибір між альтернативами *x* та *y*.

Відношення R^I може бути записано у такій формі:

$$R^I = \left((X \times X) \setminus \left(R \bigcup R^{-1}\right)\right) \cup \left(R \bigcap R^{-1}\right).$$

Чим більше інформації про реальну ситуацію або процес, тим вужче відношення однаковості.

Приклад 14. Нехай на множині $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ подане відношення нестрогої переваги *R:*

$$R=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\\1&0&1&1\end{pmatrix}.$$

Побудувати відповідні йому відношення еквівалентності, строгої переваги, однаковості.

Розв'язування

Згідно означення $R^e=R\bigcap R^{-1}$, побудуємо спочатку відношення R^{-1}:

$$R^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix},$$

і знайдемо $R^e=R\bigcap R^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$.

Як видно з цієї матриці, елементи x_1,x_4 еквівалентні.

Тепер згідно означенню знайдемо R^S.

$$R^S=R\setminus R^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Це означає, що елемент x_1 строго переважніший за x_2, елемент x_2 переважніший за x_4, а елемент x_3 за x_2 і x_4 за x_3 відповідно.

Відношення $R^I=\left((X\times X)\setminus\left(R\bigcup R^{-1}\right)\right)\bigcup\left(R\bigcap R^{-1}\right)$.

$$R^I=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Це відношення означає, що серед елементів $\{x_1, x_3\}$, $\{x_1, x_4\}$, $\{x_3, x_4\}$ можна обирати абиякий. Інформації щоб здійснити вибір між елементами кожної пари недостатньо.

Якщо $(x, y) \in R^S$, то будемо казати, що альтернатива *x* домінує альтернативу *y* $(x > y)$.

Альтернативу $x \in X$ назвемо недомінуємою на множині *X* за відношенням *R*, якщо $(y, x) \notin R^S$, для $\forall y \in X$. Тобто якщо *x* – альтернатива, що не домінується, то в множині *X* не має жодної альтернативи, яка домінувала би *x*. (У наведеному вище прикладі недомінуємою є альтернатива x_1).

Якщо деякі альтернативи у певному сенсі є недомінованими, то їх вибір у задачах прийняття рішень доречно вважати раціональним у межах поданої інформації.

Таким чином, інформація у формі відношення переваги дозволяє звузити клас раціональних виборів на множині *X* до множини альтернатив, що не домінуються, тобто до множини виду:

$$X^{н.д.} = \left\{ x \middle| x \in X,\ (\mathrm{y}, \mathrm{x}) \in R \setminus R^{-1}, \forall \mathrm{x} \in \mathrm{X} \right\}.$$

Поняття R-оптимальності, найкращого, найгіршого, максимального та мінімального елементів.

Приведені вище відомості були пов'язані з формалізацією попарного порівняння альтернатив, яка необхідна для виділення найкращого елемента (або декількох кращих) з всієї множини альтернатив *X*. Для того ж щоб виділити «кращий» елемент необхідно формалізувати поняття «кращий». Використаємо для цього апарат бінарних відношень.

З обиранням за даним відношенням *R* кращого елемента тісно пов'язане поняття найкращого та найгіршого елементів.

Елемент x^* з множини *X* будемо називати *найкращим* за відношенням *R*, якщо для $\forall x \in X$ виконується $x^* \; R \; x$.

Елемент $x_* \in X$ будемо називати *найгіршим* за відношенням *R*, якщо $\forall x \in X$ має місце $x \, \mathrm{R} \, \mathrm{x}_*$.

Легко бачити, що найкращій та найгірший елементи існують не завжди. Наприклад, їх не буде коли відношення не є повним. Розглянемо приклад.

Приклад 15. Нехай відношення *R* подано на множині $B = \{a, b, c\}$ таким чином $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c)\}$.

Зобразимо це відношення за допомогою графа (див. рис.3)

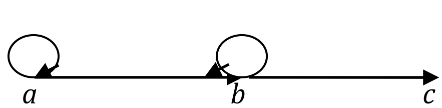


Рис. 3. Граф відношення R (до прикладу 14)

Легко бачити, що це відношення не має найкращих та найгірших елементів, бо елементи a та c незрівняні. Уведемо поняття максимального елемента.

Елемент x^0 називається *максимальним* за відношенням R^S на множині X, якщо для $\forall x \in X$ має місце або x^0 R^S x, $\forall y \in X$ або x^0 незрівняний з X.

Тобто не існує елемента (альтернативи) $x \in X$, який би був кращим за альтернативу x^0.

Елемент x_0 називається *мінімальним* відносно R на множині X, якщо для $\forall x \in X$ або $x\,R^S x_0$ або x незрівняний з x_0. Тобто не існує елемента $x \in X$ який би був гіршим за x_0, немає жодного елемента x, який би домінувався елементом x_0.

У наведеному вище прикладі максимальним елементом буде елемент a, мінімальним – елемент c.

Множина мінімальних за R елементів множини X позначається $min_R X$.

Зауважимо, що якщо найкращі елементи існують, то вони будуть і максимальними, але не навпаки.

Отже, якщо треба обрати найкращу в деякому сенсі альтернативу, то природнім буде її вибір із множини максимальних (недомінуємих) альтернатив.

Приклад 16. Нехай відношення R подано графом G (рис. 4). Знайти найкращі, найгірші, максимальні та мінімальні за R^S елементи.

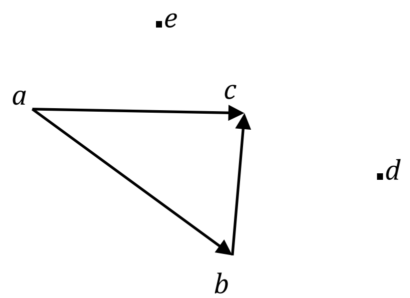


Рис. 4. Граф відношення R (до прикладу 16)

Розв'язування

Найкращих елементів не має; найгірших елементів також не має. Максимальними за R^S є елементи a, d, e. Мінімальними за R^S елементами будуть c, d, e.

Позначимо множину максимальних за R об'єктів множини X як $max_R X$. Ця множина *внутрішньо стійка* в тому сенсі, що якщо $a, b \in max_R X$, то не може бути ні $a\,R b$ ні $b\,R\,a$.

Множина називається *зовнішньо стійкою*, якщо для кожного елемента $a \in X$, який не є максимальним, знайдеться переважніший за нього елемент серед максимальних. Тобто буде $a^0 R\,a$ для деякого $a^0 \in max_R X$.

Внутрішнє та зовнішнє стійка множина $max_R X$ називається ***ядром*** відношення R в X. Поняття стійкості має велике значення, бо якщо множина $max_R X$ зовнішньо стійка, то оптимальний елемент повинен бути вибраний саме з цієї множини. Якщо ж множина $max_R X$ не є зовнішнє стійкою, то для обмеження вибору цією множиною нема підстав.

У випадку коли потрібно вибрати не один, а декілька кращих елементів, або впорядкувати всі об'єкти за перевагою, поняття максимального елемента і ядра втрачають своє значення.

Приклад 17. Нехай $B = \{a,b,c\}$ відношення $R = \{(a,c)\}$. Тут $\max_R B = \{a,b\}$. Однак, якщо потрібно вибрати два кращих об'єкта, то відкидати c не можна: якщо особа, що приймає рішення повідомить, що c переважніше, ніж b, то шуканими будуть елементи a та c.

Числова функція φ, яка визначена на множині X називається *зростаючою* (*не спадною*) за відношенням R, якщо з $a\,R\,b$ випливає $\varphi(a) > \varphi(b)$ (відповідно $\varphi(a) \geq \varphi(b)$) для всіх $a, b \in X$.

Має місце така лема.

Лема. Нехай $B \subseteq A$ і $a^0 \in B$ надає не спадній за відношенням R на B функції Ψ найбільше на B значення. Для того щоб об'єкт a^0 був максимальним за відношенням R на B достатньо виконування однієї з наступних умов:

1. Ψ зростає за R на B.
2. $a^0 \in B$ – єдина точка максимуму Ψ на B.

Характерною особливістю «мови» бінарних відношень є припущення про те, що результат порівняння за перевагою двох елементів не залежить від складу всієї множини. Однак в ряді випадків така залежність має місце і для її врахування необхідна більш багата «мова» опису переваг, основана на використанні функцій вибору та функцій корисності.

Функції корисності.

Для порівняння різних альтернатив і вибору найкращої з них також можна використовувати деяку кількісну міру властивостей, за значеннями якої можна порівняти альтернативи між собою і вибрати найкращу. Така міра носить назву *функція корисності*. Правила (процедури) прийняття рішень на її основі використовують теорію корисності, розроблену Дж. Фон Нейманом і О. Моргенштерном . Її математична основа – система аксіом, в яких стверджується, що існує деяка міра цінності, що дозволяє упорядкувати альтернативи (результати рішень) і яка називається функцією корисності, або *корисністю* результатів.

Практичне застосування теорії корисності ґрунтується на таких аксіомах.

1. Результат (альтернатива) x_i є кращою за альтернативу x_j (записується $x_i > x_j$), тоді і тільки тоді, коли $u(x_i) = f(x_i) > u(x_j)$, де $u(x_i)$ і $u(x_j)$ корисності альтернативи x_i і x_j відповідно.

2. Транзитивність: якщо $x_i > x_j$, а $x_j > x_k$, то $x_i > x_k$, і $u(x_i) > u(x_k)$.

3. Лінійність: якщо x_1, x_2 деякі альтернативи, то властивість адитивності функції $u(x_1, x_2)$ записується як $u(x_1, x_2) = u(x_1) + u(x_2)$.

Аналогічно, якщо є n результатів $x_1, x_2, \ldots\ x_n$, які досягаються одночасно, то

$$U(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} u_s(x).$$

Визначимо в термінах функції корисності (цільовій функції) $f(x)$ такі відношення на множині альтернатив X: відношення слабої (нестрогої) переваги – «не гірше», яке позначається знаком ≥, відношення рівноцінності, що позначаєтьсязнаком ~, і відношення строгої переваги, що позначається знаком >.

Для двох альтернатив x_1, x_2 говоритимемо, що

$x_1 \geq x_2$, тоді і лише тоді, коли $f(x_1) \geq f(x_2)$;

$x_1 \sim x_2$, тоді і лише тоді, коли $f(x_1) = f(x_2)$;

$x_1 > x_2$, тоді і лише тоді, коли $f(x_1) > f(x_2)$.

Знаки ≥ і < при порівнянні значень цільових функція для різних альтернатив беруться залежно від того, чи вважається кращою альтернатива при більшому або меншому значенні цільової функції.

Розглянемо випадок, коли деякі критерії є якісними.

Застосовується методика, яка заснована на алгоритмі, що запропонований Р. Акофом і Р. Черчменом.

Припускатимемо, що наявні n альтернатив $x_1, x_2, \ldots\ x_n$. Методика визначення корисності складається з наступних етапів:

1. Упорядковують всі альтернативи за зменшенням переваги. Нехай x_1 – альтернатива, що має найбільшу перевагу, а x_n – альтернатива, перевага якої найменша.

2. Складають таблицю можливих комбінацій результатів, що досягаються одночасно, і тоді встановлюють їх перевагу щодо окремих результатів $x_1, x_2, \ldots$ x_n (табл. 2).

Таблиця 2.

1	x_1 або $x_2 + x_3 + \ldots + x_n$	$n + 1$	x_2 або $x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1}$
2	x_1 або $x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1}$	$n + 2$	x_2 або $x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-2}$
3	x_1 або $x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-2}$	$n + 3$	x_2 або $x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-3}$
…	. . .	…	…
n	x_2 або $x_3 + x_4 + \ldots + x_n$	N	x_{n-2} або $x_{n-1} + x_n$

Цю інформацію про перевагу результатів отримують від експертів.

3. Приписують початкові оцінки корисності окремих результатів $u_0(x_1)$, $u_0(x_2)$, ... , $u_0(x_n)$. Потім початкові оцінки підставляють в останнє співвідношення табл. 2.2. Якщо воно задовольняється, то оцінки не змінюють.

В протилежному випадку, проводять корекцію корисності так, щоб задовольнялося дане співвідношення.

Після цього переходять до наступного співвідношення. Процес корекції продовжується до тих пір, поки не утворюється система оцінок $u^*(x_1), u^*(x_2), \dots u^*(x_n)$, яка задовольнятиме всім вказаним в таблиці співвідношенням. Корекцію слід проводити так, щоб по можливості змінювати оцінки для мінімальної кількості результатів.

Приклад 18. Нехай експерт упорядковує п'ять результатів $x_1, x_2, \dots x_5$, приписавши їм такі оцінки: $u_0(x_1) = 7$; $u_0(x_2) = 4$; $u_0(x_3) = 2$; $u_0(x_4) = 1{,}5$; $u_0(x_5) = 1$.

Розглянувши можливі варіанти вибору, він висловив такі думки щодо цінності тих або інших комбінацій варіантів:

1) $x_1 < x_2 + x_3 + x_4 + x_5$;
2) $x_1 < x_2 + x_3 + x_4$;
3) $x_1 < x_2 + x_3 + x_5$;
4) $x_1 > x_2 + x_3$;
5) $x_2 < x_3 + x_4 + x_5$;
6) $x_2 > x_3 + x_4$;
7) $x_3 > x_4 + x_5$.

Потрібно провести оцінку корисності результатів так, щоб задовольнити всім нерівностям.

Підставляємо початкові оцінки в нерівність 7:

$$u_0(x_3) = 2 < u_0(x_4) + u_0(x_5) = 2{,}5.$$

Отже, нерівність 7 не задовольняється.

Змінюємо корисність результату x_3: $u_1(x_3) = 3$ і перевіряємо нерівність 6

$$u_0(x_2) = 4 < u_1(x_3) + u_0(x_4) = 4{,}5.$$

Ця нерівність також не задовольняється.

Застосовуємо $u_1(x_2) = 5$.

Перевіряємо нерівність 5:

$$u_0(x_2) = 5 < u_1(x_3) + u_0(x_4) + u_0(x_5) = 5{,}5$$

При цьому нерівність 5 задовольняється.

Перевіряємо нерівність 4:

$u_0(x_1) = 7 > u_1(x_2) + u_1(x_3) = 8$.

Нерівність 4 не виконується.

Тому приймемо $u_1(x_1) = 8{,}5$.

Перевіряємо нерівність 3:

$u_0(x_1) = 8{,}5 < u_1(x_2) + u_1(x_3) + u_0(x_5) = 9$.

Нерівність 3 задовольняються.

Перевіряємо нерівність 2:

$u_0(x_1) = 8{,}5 < u_1(x_2) + u_1(x_3) + u_0(x_4) = 9{,}5$.

Нерівність 2 задовольняються.

Перевіряємо нерівність 1:

$u_0(x_1) = 8{,}5 < u_1(x_2) + u_1(x_3) + u_0(x_4) + u_0(x_5) = 10{,}5$.

Нерівність 1 задовольняються.

Перевіряємо ще раз нерівність 6 і 7 при змінених значеннях корисності альтернатив:

$$5 > 3 + 1{,}5,$$

і

$$3 > 1{,}5 + 1.$$

Обидві нерівності виконуються.

Випишемо остаточні оцінки корисності результатів:

$$u_1(x_1) = 8{,}5;\ u_1(x_2) = 5;\ u_1(x_3) = 3;\ u_1(x_4) = 1{,}5;\ u_1(x_5) = 1.$$

Таку методику визначення корисності можна застосовувати, коли кількість результатів n обмежена, а саме $n < 6$ або 7.

У випадках, коли $n > 7$, запропонований модифікований спосіб корекції оцінок.

Побудова функції вибору.

Позначимо $C(X)$ множину альтернатив, яку виділено ОПР з множини X, і встановимо зв'язки між множинами $C(X)$ при різних множинах X. Вибір здійснює одна ОПР.

Нехай Ω – множина всіх груп ВУЗу, X – довільна підмножина Ω. (Наприклад, множина груп III-го курсу, множина груп факультету і т. п.) Нехай $C(X)$ – найкраща група з множини груп X. Незалежно від того, хто приймає рішення (обирає найкращу групу) природно вважати, що найкраща група ВУЗу буде найкращою групою свого курсу, свого факультету тощо.

Математично це можна записати так: якщо $X' \subseteq X$ і $x \in C(X) \cap X'$, то $x \in C(X')$.

Тобто всілякий вибір у конкретній ситуації можна вважати логічно обґрунтованим при відомих виборах в інших ситуаціях, які пов'язані з даною, оскільки множини $C(X)$ виявляються залежними при різних X. Для формалізації взаємної залежності використовують поняття функції вибору.

Функцією вибору $C(X)$ називається відображення, яке ставить у відповідність кожній множині $X \subset \Omega$ її підмножину $C(X) \subset X$.

$C(X)$ будемо інтерпретувати як найбільш переважні альтернативи з X.

В визначенні ніяких апріорних обмежень на функції вибору не накладається, зокрема не виключена можливість пустого вибору, тобто ситуації коли $C(X) = \varnothing$.

Ця ситуація називається *відмовою від вибору*.

Прикладом, коли виникає відмова від вибору може бути ситуація, коли покупець уходить з магазину нічого не купивши.

В окремому випадку, коли подане відношення R на множині альтернатив, функцію вибору можна визначити такою рівністю:

$$C(X) = max_R X .$$

Приклад. Нехай на множині $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ подане відношення переваги *R*:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Побудувати відповідну йому функцію вибору.

Розв'язування

Побудуємо відповідне даному відношенню відношення строгої переваги $R^S = R \setminus R^{-1}$.

$$R^s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер задамо функцію вибору за правилом $C(X) = max_R X$. Для цього розглянемо всі можливі підмножини множини $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ і визначимо максимальні елементи за звуженням відношення *R* на відповідні підмножини.

$C(\{x_1\}) = max_R \{x_1\} = x_1,$

$C(\{x_2\}) = max_R \{x_2\} = x_2,$

$C(\{x_3\}) = max_R \{x_3\} = x_3,$

$C(\{x_4\}) = max_R \{x_4\} = x_4,$

$C(\{x_1, x_2\}) = max_R \{x_1, x_2\} = x_1,$

$C(\{x_1, x_3\}) = max_R \{x_1, x_3\} = \{x_1, x_3\},$

$C(\{x_1, x_4\}) = max_R \{x_1, x_4\} = \{x_1, x_4\},$

$C(\{x_2, x_3\}) = max_R \{x_2, x_3\} = \{x_3\},$

$C(\{x_2, x_4\}) = max_R \{x_2, x_4\} = \{x_2, x_4\},$

$C(\{x_3, x_4\}) = max_R \{x_3, x_4\} = \{x_4\},$

$C(\{x_1, x_2, x_3\}) = max_R \{x_1, x_2, x_3\} = \{x_1, x_3\},$

$C(\{x_1, x_2, x_4\}) = max_R \{x_1, x_2, x_4\} = \{x_1, x_4\},$

$C(\{x_1, x_3, x_4\}) = max_R \{x_1, x_3, x_4\} = \{x_1, x_4\},$

$C(\{x_2, x_3, x_4\}) = max_R \{x_2, x_3, x_4\} = \{x_4\},$

$C(X) = C(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}) = max_R \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{x_1, x_4\}.$

Існують й інші способи задавання функцій вибору.

За відношенням переваги ми можемо побудувати функцію вибору, але не для всякої функції вибору існує відповідне відношення переваги.

Приклад. Функція вибору дана таким чином:

$$C(\{x_1\}) = x_1, \qquad C(\{x_2\}) = x_2, \qquad C(\{x_3\}) = x_3,$$
$$C(\{x_1, x_2\}) = x_1, \qquad C(\{x_1, x_3\}) = \{x_1, x_3\},$$
$$C(\{x_2, x_3\}) = \{x_2\}, \qquad C(\{x_1, x_2, x_3\}) = \{x_1, x_3\}.$$

Вочевидь дві останні умови суперечать одна одній, тому відношення побудувати не можливо.

Приклад. Функція вибору дана таким чином:

$$C(\{x_1\}) = x_1, \qquad C(\{x_2\}) = x_2, \qquad C(\{x_3\}) = x_3,$$
$$C(\{x_1, x_2\}) = x_1, \qquad C(\{x_1, x_3\}) == \{x_1, x_3\},$$
$$C(\{x_2, x_3\}) = \{x_3\}, \qquad C(\{x_1, x_2, x_3\}) = \{x_1, x_3\}.$$

Відповідним даній функції буде відношення строгої переваги

$$R^s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$