

## Лабораторна робота 3

### ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ТА РИЗИКУ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ КЛАСИЧНИХ КРИТЕРІЇВ

**Мета роботи** – засвоїти методику розв’язання задач прийняття рішень із використанням класичних критеріїв прийняття рішень; набути навичок застосування класичних критеріїв на практиці.

#### I. Теоретичні відомості з теми

##### 1. Матриця рішень та оціночні функції

Припустимо, що потрібно вибрати найкращу з  $m$  альтернатив у випадку, коли остаточний результат кожної альтернативи  $E_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) буде визначатися конкретним станом навколишнього середовища («природи»)  $F_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ).

Під результатом рішення  $e_{ij} = e(E_i ; F_j)$  тут можна розуміти оцінку, що відповідає варіанту  $E_i$  і умовам  $F_j$  та що характеризує прибуток, корисність або надійність. Ми будемо називати такий результат **корисністю рішення**.

Дані, необхідні для ухвалення рішення в умовах невизначеності, зазвичай задаються у формі матриці, рядки якої відповідають можливим діям, а стовпці – можливим станам системи, тобто множина (матриця) рішень  $\|e_{ij}\|$  має вигляд:

	$F_1$	$F_2$	...	$F_n$
$E_1$	$e_{11}$	$e_{12}$	...	$e_{1n}$
$E_2$	$e_{21}$	$e_{22}$	...	$e_{2n}$
...	.....	.....	.....	.....
$E_m$	$e_{m1}$	$e_{m2}$	...	$e_{mn}$

Щоб прийти до однозначного й по можливості найвигіднішого варіанту рішення необхідно ввести **оціночну (цільову) функцію**. При цьому матриця рішень  $\|e_{ij}\|$  зводиться до одного стовпця виду

$E_1$	$e_{1r}$
$E_2$	$e_{2r}$
$E_3$	$e_{3r}$
...	...
$E_i$	$e_{ir}$
...	...
$E_m$	$e_{mr}$

Кожному варіанту  $E_i$  приписується деякий результат  $e_{ir}$ , що характеризує, у цілому, всі наслідки цього рішення. Такий результат ми будемо надалі позначати тим же символом  $e_{ir}$ . Виникає, однак, проблема, який вкласти зміст у результат  $e_{ir}$ .

Якщо, наприклад, наслідки кожного з альтернативних рішень характеризувати комбінацією з його найбільшого й найменшого результатів, то можна прийняти

$$e_{ir} = \min_j e_{ij} + \max_j e_{ij}. \quad (1)$$

Найкращий у цьому змісті результат має вигляд

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left( \min_j e_{ij} + \max_j e_{ij} \right). \quad (2)$$

Формуючи в такий спосіб бажаний результат, особа, що приймає рішення (ЛПР), виходить із *компромісу між оптимістичним та песимістичним підходами*.

**Оптимістична позиція:**

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left( \max_j e_{ij} \right). \quad (3)$$

З матриці результатів рішень  $e_{ij}$  обирається варіант (рядок), що містить в якості можливого наслідку найбільший із всіх можливих результатів. ОПР стає на точку зору азартного гравця й робить ставку на те, що випаде найвигідніший випадок.

**Позиція нейтралітету:**

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e_{ij} \right). \quad (4)$$

ОПР виходить з того, що всі відхилення результату рішення від «середнього» випадку, що зустрічаються, припустимі, та приймає рішення, оптимальне з цього погляду.

**Песимістична позиція:**

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left( \min_j e_{ij} \right). \quad (5)$$

ОПР виходить з того, що треба орієнтуватися на найменш сприятливий випадок і приписує кожному з альтернативних варіантів найгірший з можливих результатів. Після цього він обирає самий вигідний варіант, тобто очікує найкращого результату в найгіршому випадку. Для кожного іншого зовнішнього стану результат може бути тільки рівним цьому або кращим.

**Позиція відносного песимізму:**

$$\min_i e_{ir} = \min_i \max_j \left( \max_i e_{ij} - e_{ij} \right). \quad (6)$$

Для кожного варіанта рішення ОПР оцінює втрати в результаті в порівнянні з певним по кожному варіанту найкращим результатом, а потім із сукупності найгірших результатів обирає найкращий відповідно до представленої оціночної функції.

## 2. Класичні критерії прийняття рішень

### Мінімаксний критерій

При

$$Z_{\text{MM}} = \max_i e_{ir}, \quad (7)$$

$$e_{ir} = \min_j e_{ij} \quad (8)$$

справедливо співвідношення

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \mid E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \min_j e_{ij} \right\}, \quad (9)$$

де  $Z_{\text{MM}}$  – оціночна функція ММ-критерія.

Правило вибору рішення відповідно до ММ-критерію:

Матриця рішень  $\|e_{ij}\|$  доповнюється ще одним стовпцем з найменших результатів  $e_{ir}$  кожного рядку. Обирати належить ті варіанти  $E_{i0}$ , у рядках яких стоять найбільші значення  $e_{ir}$  цього стовпця.

### Критерій Байсса–Лапласа

Нехай  $q_j$  – ймовірність появи зовнішнього стану  $F_j$ ; тоді для ВЛ-критерія

$$Z_{\text{BL}} = \max_i e_{ir}, \quad (10)$$

$$e_{ir} = \sum_{j=1}^n e_{ij} q_j, \quad (11)$$

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \mid E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \sum_{j=1}^n e_{ij} q_j \wedge \sum_{j=1}^n q_j = 1 \right\}. \quad (12)$$

Правило вибору рішення:

Матриця рішень  $\|e_{ij}\|$  доповнюється ще одним стовпцем, що включає математичне очікування значень кожного з рядків. Обираються ті варіанти  $E_{i0}$ , в рядках яких стоїть найбільше значення  $e_{ir}$  цього стовпця.

### Критерій Севіджа

За допомогою позначень

$$a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij}, \quad (13)$$

$$e_{ir} = \max_j a_{ij} = \max_j \left( \max_i e_{ij} - e_{ij} \right) \quad (14)$$

формується оціночна функція

$$Z_S = \min_i e_{ir} = \min_i \left[ \max_j \left( \max_i e_{ij} - e_{ij} \right) \right] \quad (15)$$

та будується множина оптимальних варіантів рішення

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \mid E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \min_i e_{ir} \right\}. \quad (16)$$

Відповідне до S-критерію правило вибору:

Кожний елемент матриці рішень  $\|e_{ij}\|$  віднімається з найбільшого результату  $\max_i e_{ij}$  відповідного стовпця. Різниці  $a_{ij}$  утворюють матрицю залишків  $\|a_{ij}\|$ . Ця матриця поповнюється стовпцем найбільших різниць  $e_{ir}$ . Обираються ті варіанти  $E_{i0}$ , в рядках яких стоїть найменше для цього стовпця значення.

## II. Практична частина

Розглянемо приклад із застосування класичних критеріїв прийняття рішень.

**Приклад:** При роботі ЕОМ необхідно періодично припиняти обробку інформації й перевіряти ЕОМ на наявність у ній вірусів. Припинення в обробці інформації приводять до певних економічних витрат. У випадку ж якщо вірус є вчасно виявленим не буде, можливою є втрата деякої частини інформації, що приведе до ще більших збитків.

Варіанти рішення є наступними:

- $E_1$  – повна перевірка;
- $E_2$  – мінімальна перевірка;
- $E_3$  – відмова від перевірки.

ЕОМ може перебувати в наступних станах:

- $F_1$  – вірус є відсутнім;
- $F_2$  – вірус є, але він не встиг ушкодити інформацію;
- $F_3$  – є файли, які потребують відновлення.

Результати, що включають витрати на пошук вірусу та його ліквідацію, а також витрати, пов'язані з відновленням інформації, мають вигляд, наведений у табл. 1.

Таблиця 1

	$F_1$	$F_2$	$F_3$	ММ-критерій		Критерій BL	
				$e_{ir} = \min_j e_{ij}$	$\max_i e_{ir}$	$e_{ir} = \sum_j e_{ij} q_j$	$\max_i e_{ir}$
$E_1$	-20.0	-22.0	-25.0	-25.0	<u>-25.0</u>	-22.33	
$E_2$	-14.0	-23.0	-31.0	-31.0		-22.67	
$E_3$	0	-24.0	-40.0	-40.0		-21.33	<u>-21.33</u>

Згідно **ММ-критерію** (див. табл. 1) слід проводити повну перевірку.

За **критерієм Байєса-Лапласа**, у припущенні, що всі стани машини є рівновірогідними, тобто

$$P(F_j) = q_j = \frac{1}{3},$$

рекомендується відмовитися від перевірки (див. табл. 1).

Матриця залишків  $A = (a_{ij})$ , де  $a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij}$ , для цього прикладу та їх оцінка (у тисячах) згідно **критерію Севіджа** має вигляд:

	$F_1$	$F_2$	$F_3$	Критерій Севіджа	
				$e_{ir} = \max_j a_{ij}$	$\min_j e_{ir}$
$E_1$	+20.0	0	0	+20.0	
$E_2$	+14.0	+1.0	+6.0	+14.0	<u>+14.0</u>
$E_3$	0	+2.0	+15.0	+15.0	

Даний приклад спеціально є підібраним таким чином, щоб кожний з критеріїв пропонував нове рішення. Невизначеність стану, у якому перевірка застає ЕОМ, перетворюється в неясність, якому критерію віддавати перевагу.

Оскільки різні критерії є пов'язаними з різними умовами, у яких приймається рішення, краще за все для порівняльної оцінки рекомендацій тих або інших критеріїв, отримати додаткову інформацію про саму ситуацію. Зокрема, якщо прийняте рішення відноситься до сотень машин з однаковими параметрами, то рекомендується застосовувати критерій Байєса-Лапласа. Якщо ж число машин є не великим, то краще користуватися критеріями мінімакса або Севіджа.

### III. Хід виконання роботи

Виконання роботи складається з **наступних етапів**:

**1 етап:** За досліджуваною проблемою складається матриця рішень  $\|e_{ij}\|$  виду

	$F_1$	$F_2$	...	$F_n$
$E_1$	$e_{11}$	$e_{12}$	...	$e_{1n}$
$E_2$	$e_{21}$	$e_{22}$	...	$e_{2n}$
...	.....	.....	.....	.....
$E_m$	$e_{m1}$	$e_{m2}$	...	$e_{mn}$

**2 етап:** В залежності від обраного критерію прийняття рішення кожному варіанту  $E_i$  приписується деякий результат  $e_{ir}$ , що характеризує наслідки цього рішення. При цьому матриця рішень  $\|e_{ij}\|$  зводиться до одного стовпця виду

---

$E_1$	$e_{1r}$
$E_2$	$e_{2r}$
$E_3$	$e_{3r}$
...	...
$E_i$	$e_{ir}$
...	...
$E_m$	$e_{mr}$

---

**Примітка:** Попередньо матриця рішень  $\|e_{ij}\|$ , якщо цього вимагає застосування обраного критерію, має бути приведена до певного виду (наприклад, з додатними, від'ємними і т.д. елементами).

**3 етап:** В залежності від обраного критерію прийняття рішення за використанням відповідного правила вибору обирається оптимальний варіант рішення  $E_0$ .