Лабораторна робота 4

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ТА РИЗИКУ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ПОХІДНИХ КРИТЕРІЇВ

Мета роботи – засвоїти методику розв'язання задач прийняття рішень із використанням похідних критеріїв прийняття рішень; набути навичок застосування похідних критеріїв на практиці.

I. Теоретичні відомості з теми

1. Матриця рішень та оціночні функції

Припустимо, що потрібно вибрати найкращу з m альтернатив у випадку, коли остаточний результат кожної альтернативи E_i ($i = \overline{1,m}$) буде визначатися конкретним станом навколишнього середовища («природи») F_j ($j = \overline{1,n}$).

Під результатом рішення $e_{ij} = e(E_i\ ;\ F_j)$ розуміється оцінка, яка відповідає варіанту E_i і умовам F_j та яка характеризує прибуток, корисність або надійність. Ми будемо називати такий результат ***корисністю рішення***.

Дані, необхідні для ухвалення рішення в умовах невизначеності, зазвичай задаються у формі матриці, рядки якої відповідають можливим діям, а стовпці – можливим станам системи, тобто множина (матриця) рішень $\left\| e_{ij} \right\|$ має вигляд:

	F_1	F_2	...	F_n
E_1	e_{11}	e_{12}	...	e_{1n}
E_2	e_{21}	e_{22}	...	e_{2n}
...	...	...	...	...
E_m	e_{m1}	e_{m2}	...	e_{mn}

Щоб прийти до однозначного й по можливості найвигіднішому варіанту рішення необхідно ввести ***оціночну (цільову) функцію***. При цьому матриця рішень $\left\| e_{ij} \right\|$ зводиться до одного стовпця виду

E_1	e_{1r}
E_2	e_{2r}
E_3	e_{3r}
…	…
E_i	e_{ir}
…	…
E_m	e_{mr}

Кожному варіанту E_i приписується деякий результат e_{ir}, що характеризує, у цілому, всі наслідки цього рішення. Такий результат позначається тим самим символом e_{ir}.

На основі оціночних функцій й класичних критеріїв прийняття рішень будуються похідні критерії прийняття рішень.

2. Похідні критерії прийняття рішень

Критерій Гурвиця

$$Z_{\mathrm{HW}} = \max_i e_{ir}, \qquad (1)$$

$$e_{ir} = c \min_j e_{ij} + (1-c) \max_j e_{ij}. \qquad (2)$$

Тоді

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ Ei_0 \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \left[c \min_j e_{ij} + (1-c) \max_j e_{ij} \right] \wedge 0 \le c \le 1 \right\}, \qquad (3)$$

де c – ваговий множник.

Правило вибору згідно HW-критерію:

> Матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється стовпцем, що містить середні зважені найменшого й найбільшого результатів для кожного рядка (2). Обираються ті варіанти E_{i0}, у рядках яких стоять найбільші елементи e_{ir} цього стовпця.

Для $c = 1$ HW-критерій перетворюється на ММ-критерій.
Для $c = 0$ він перетворюється на критерій азартного гравця.

Критерій Ходжа–Лемана

Оціночна функція визначається рівністю

$$Z_{\mathrm{HL}} = \max_i e_{ir}, \qquad (4)$$

$$e_{ir} = \nu \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-\nu) \min_j e_{ij}, \quad 0 \le \nu \le 1, \qquad (5)$$

а множина HL-оптимальних рішень записується у вигляді

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \left[\nu \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-\nu) \min_j e_{ij} \right] \wedge 0 \le \nu \le 1 \right\}. \qquad (6)$$

Правило вибору, що відповідає HL-критерію:

> Матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється стовпцем, складеним з середніх зважених (з постійними вагами) математичного очікування та найменшого результату кожного рядка (5). Обираються ті варіанти рішень E_{i0}, у рядках яких стоїть найбільше значення цього стовпця.

Для $\nu = 1$ HL-критерій перетворюється на BL-критерій.
Для $\nu = 0$ перетворюється на ММ-критерій.

Критерій Гермейєра

Цей критерій є орієнтованим на величини втрат, тобто на від'ємні значення усіх e_{ij}, тобто $e_{ij} < 0$.

У випадку, коли серед величин e_{ij} зустрічаються й додатні значення, можна перейти до строго від'ємних значень за допомогою перетворення $e_{ij} - a$ при підходячим чином підібраному $a > 0$. Так, наприклад, для обрання константи a можна застосувати наступний вираз: $a = \left| \max_{i,j} e_{ij} \right| + 1$.

В якості оціночної функції критерію Гермейєра виступає

$$Z_{\mathrm{G}} = \max_i e_{ir}, \qquad (7)$$

$$e_{ir} = \min_j e_{ij} q_j. \qquad (8)$$

За Критерієм Гермейєра

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \min_j e_{ij} q_j \wedge e_{ij} < 0 \right\}. \qquad (9)$$

Правило вибору згідно критерію Гермейєра (G):

Матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється ще одним стовпцем, що містить у кожному рядку найменший добуток наявного у неї результату на ймовірність відповідного стану F_j. Обираються ті варіанти E_{i0}, у рядках яких знаходиться найбільше значення e_{ir} цього стовпця.

У випадку рівномірного розподілу $q_j = 1/n$, $j = 1,...,n$, G-критерій стає ідентичним до ММ-критерію.

II. Практична частина

Розглянемо приклад із застосування похідних критеріїв прийняття рішень.

Приклад: При роботі ЕОМ необхідно періодично припиняти обробку інформації й перевіряти ЕОМ на наявність у ній вірусів. Припинення в обробці інформації приводять до певних економічних витрат. У випадку ж якщо вірус є вчасно виявленим не буде, можливою є втрата деякої частини інформації, що приведе до ще більших збитків.

Варіанти рішення є наступними:

E_1 – повна перевірка;
E_2 – мінімальна перевірка;
E_3 – відмова від перевірки.

ЕОМ може перебувати в наступних станах:

F_1 – вірус є відсутнім;

F_2 – вірус є, але він не встиг ушкодити інформацію;

F_3 – є файли, які потребують відновлення.

Результати, що включають витрати на пошук вірусу та його ліквідацію, а також витрати, пов'язані з відновленням інформації, мають вигляд, наведений у табл. 1.

Таблиця 1

	F_1	F_2	F_3	*ММ*-критерій		Критерій *BL*	
				$e_{ir} = \min\limits_j e_{ij}$	$\max\limits_i e_{ir}$	$e_{ir} = \sum\limits_j e_{ij} q_j$	$\max\limits_i e_{ir}$
E_1	-20.0	-22.0	-25.0	-25.0	-25.0	-22.33	
E_2	-14.0	-23.0	-31.0	-31.0		-22.67	
E_3	0	-24.0	-40.0	-40.0		-21.33	-21.33

Нагадаємо результати використання класичних критеріїв прийняття рішень. Вони нам знадобляться згодом.

Так, згідно до ***ММ-критерію*** (див. табл. 1) слід проводити повну перевірку.

За ***критерієм Байєса-Лапласа***, у припущенні, що всі стани машини є рівновірогідними, тобто

$$P(F_j) = q_j = \frac{1}{3},$$

рекомендується відмовитися від перевірки (див. табл. 1).

Використаємо похідні критерії прийняття рішень.

Побудова оптимального рішення для матриці рішень про перевірки за ***критерієм Гурвиця*** має вигляд (при $C = 0{,}5$, в 10^3):

$\Vert e_{ij} \Vert$			$C \min\limits_j e_{ij}$	$(1-C)\max\limits_j e_{ij}$	$e_{ir} = C\min\limits_j e_{ij} + (1-C)\max\limits_j e_{ij}$	$\max\limits_i e_{ir}$
-20.0	-22.0	-25.0	-12.5	-10.0	-22.5	
-14.0	-23.0	-31.0	-15.5	-7.0	-22.5	
0	-24.0	-40.0	-20.0	0	-20.0	-20.0

У даному прикладі у рішення є поворотна точка щодо вагового множника C: до $C = 0{,}57$ у якості оптимального обирається E_3, а при великих значеннях – E_1.

Застосування ***критерію Ходжа-Лемана*** ($q_j = 1/3$, $\nu = 0{,}5$, в 10^3):

$\sum\limits_j e_{ij} q_j$	$\min\limits_j e_{ij}$	$\nu \sum\limits_j e_{ij} q_j$	$(1-\nu)\min\limits_j e_{ij}$	$e_{ir} = \nu \sum\limits_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-\nu)\min\limits_j e_{ij}$	$\max\limits_i e_{ir}$
-22.33	-25.0	-11.17	-12.5	-23.67	-23.67
-22.67	-31.0	-11.34	-15.5	-26.84	
-21.33	-40.0	-10.67	-20.0	-30.76	

Критерій Ходжа-Лемана рекомендує варіант E_1 (повна перевірка) – так само як і *MM*-Критерій. Зміна рекомендованого варіанта відбувається тільки при $\nu = 0{,}94$. Тому рівномірний розподіл станів розглянутої машини має розпізнаватися з дуже високою ймовірністю, щоб його можна було обрати за більшим математичним очікуванням. При цьому число реалізацій рішення завжди залишається довільним.

Критерій Гермейєра при $q_j = 1/3$, $j = \overline{1,3}$, дає наступний результат (в 10^3):

$\Vert e_{ij} \Vert$			$\Vert e_{ij} q_j \Vert$			$e_{ir} = \min\limits_j e_{ij} q_j$	$\max\limits_i e_{ir}$
-20.0	-22.0	-25.0	-6.67	-7.33	-8.33	-8.33	-8.33
-14.0	-23.0	-31.0	-4.67	-7.67	-10.33	-10.33	
0	-24.0	-40.0	0	-8.0	-13.33	-13.33	

У якості оптимального обирається варіант E_1. Порівняння варіантів за допомогою величин e_{ir} показує, що спосіб дії критерію Гермейєра є навіть більш гнучким, ніж у *MM*-критерії.

III. Хід виконання роботи

Виконання роботи складається **з наступних етапів**:

1 етап: За досліджуваною проблемою складається матриця рішень $\Vert e_{ij} \Vert$ виду

$$\begin{array}{c|cccc} & F_1 & F_2 & \dots & F_n \\ \hline E_1 & e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ E_2 & e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_m & e_{m1} & e_{m2} & \dots & e_{mn} \end{array}$$

2 етап: В залежності від обраного критерію прийняття рішення кожному варіанту E_i приписується деякий результат e_{ir}, що характеризує наслідки цього рішення. При цьому матриця рішень $\Vert e_{ij} \Vert$ зводиться до одного стовпця виду

$$\begin{array}{cc} \hline E_1 & e_{1r} \\ E_2 & e_{2r} \\ E_3 & e_{3r} \\ \dots & \dots \\ E_i & e_{ir} \\ \dots & \dots \\ E_m & e_{mr} \\ \hline \end{array}$$

Примітка: Попередньо матриця рішень $\Vert e_{ij} \Vert$, якщо цього вимагає застосування обраного критерію, має бути приведена до певного виду (наприклад, з додатними, від'ємними і т.д. елементами).

<u>3 етап:</u> В залежності від обраного критерію прийняття рішення за використанням відповідного правила вибору обирається оптимальний варіант рішення E_0.