Лабораторна робота 4

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ТА РИЗИКУ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ РОЗШИРЕНИХ КРИТЕРІЇВ

Мета роботи – засвоїти методику розв'язання задач прийняття рішень із використанням розширених критеріїв прийняття рішень; набути навичок застосування розширених критеріїв на практиці.

I. Теоретичні відомості з теми

1. Матриця рішень та оціночні функції

Припустимо, що потрібно вибрати найкращу з m альтернатив у випадку, коли остаточний результат кожної альтернативи E_i ($i = \overline{1,m}$) буде визначатися конкретним станом навколишнього середовища («природи») F_j ($j = \overline{1,n}$).

Під результатом рішення $e_{ij} = e(E_i\ ;\ F_j)$ розуміється оцінка, яка відповідає варіанту E_i і умовам F_j та яка характеризує прибуток, корисність або надійність. Ми будемо називати такий результат ***корисністю рішення***.

Дані, необхідні для ухвалення рішення в умовах невизначеності, зазвичай задаються у формі матриці, рядки якої відповідають можливим діям, а стовпці – можливим станам системи, тобто множина (матриця) рішень $\|e_{ij}\|$ має вигляд:

	F_1	F_2	. . .	F_n
E_1	e_{11}	e_{12}	. . .	e_{1n}
E_2	e_{21}	e_{22}	. . .	e_{2n}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
E_m	e_{m1}	e_{m2}	. . .	e_{mn}

Щоб прийти до однозначного й по можливості найвигіднішому варіанту рішення необхідно ввести ***оціночну (цільову) функцію***. При цьому матриця рішень $\|e_{ij}\|$ зводиться до одного стовпця виду

E_1	e_{1r}
E_2	e_{2r}
E_3	e_{3r}
…	…
E_i	e_{ir}
…	…
E_m	e_{mr}

Кожному варіанту E_i приписується деякий результат e_{ir}, що характеризує, у цілому, всі наслідки цього рішення. Такий результат позначається тим самим символом e_{ir}.

На основі оціночних функцій й класичних критеріїв прийняття рішень будуються похідні й розширені (складені) критерії прийняття рішень.

2. Розширені (складені) критерії прийняття рішень

BL (ММ) – критерій

Вихідним для побудови BL(ММ)-критерію є BL-критерій.

Внаслідок того, що розподіл ймовірностей $q=\left(q_1,\ldots,q_n\right)$ встановлюється емпірично та тому є відомим не точно, отже, відбувається, з одного боку, ослаблення критерію, а з іншого, напроти, за допомогою заданих границь для ризику й за допомогою ММ-критерію забезпечується відповідна свобода дій.

Визначення оптимального варіанту за BL(ММ)-критерієм включає наступні етапи:

1 етап. Зафіксуємо опорне значення, що задається ММ-критерієм:

$$Z_{\text{ММ}}=\max_i \min_j e_{ij}=e_{i_0 j_0},$$

де i_0 и j_0 – індекси, які є оптимальними для варіантів рішень та, відповідно, станів, що розглядаються за ММ-критерієм.

2 етап. Визначення першої індексної множини *I₁.*

2.1 Для цього визначається $\varepsilon_i:=e_{i_0 j_0}-\min_j e_{ij}$ для всіх $i\in\{1,\ldots m\}$.

2.2 За допомогою деякого заданого або обраного рівня допустимого ризику $\varepsilon_{\text{доп}}>0$ визначимо деяку множину згоди, що є підмножиною множини індексів $\{1,\ldots,m\}$:

$$I_1:=\left\{i\ \mid\ i\in\{1,\ldots,m\}\wedge e_{i_0 j_0}-\min_j e_{ij}\le\varepsilon_{\text{доп}}\right\}. \tag{10}$$

Величина $\varepsilon_i:=e_{i_0 j_0}-\min_j e_{ij}$ для всіх $i\in I_1$ характеризує найбільші можливі втрати в порівнянні зі значенням $e_{i_0 j_0}$, що задається ММ-критерієм. З іншого боку, в результаті такого зниження відкриваються й можливості для збільшення виграшу в порівнянні з тим, що забезпечується ММ-критерієм.

3 етап. Визначення другої індексної множини *I₂.*

$$I_2:=\left\{i\middle|i\in\{1,\ldots,m\}\wedge\max_j e_{ij}-\max_j e_{i_0 j}\ge e_{i_0 j_0}-\min_j e_{ij}=\varepsilon_i\right\}. \tag{11}$$

Величина $\max_j e_{i_0 j}$ це максимальне число, яке зафіксоване в тому рядку, де визначено опорне значення за ММ-критерієм.

4 етап. Визначення оптимального варіанту за BL(MM)-критерієм.

Для цього на множині-перетинання $I_1 \cap I_2$ ми обираємо тільки такі варіанти рішень, для яких, з одного боку, у певних станах можуть мати місце втрати в порівнянні зі станом, що задається MM-критерієм, але в інших станах мається хоча б такий самий приріст виграшу.

Отже, оптимальними в смислі BL(MM)-критерію будуть рішення з множини

$$\mathrm{E}_0 := \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_{i \in I_1 \cap I_2} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j \right\}. \qquad (12)$$

Правило вибору для цього критерію формулюється наступним чином:

Матриця рішень $\left\| e_{ij} \right\|$ доповнюється ще трьома стовпцями. У першому з них записуються математичні очікування кожного з рядків, у другому – різниці поміж опорним значенням $e_{i_0 j_0} = Z_{\mathrm{MM}}$ та найменшим значенням $\min\limits_j e_{ij}$ відповідного рядка. В третьому стовпці містяться різниці між найбільшим значенням $\max\limits_j e_{ij}$ кожного рядка й найбільшим значенням $\max\limits_j e_{i_0 j}$ того рядка, у якому знаходиться значення $e_{i_0 j_0}$. Обираються ті варіанти E_{i_0}, рядки яких дають найбільше математичне очікування.
А саме, відповідне значення $e_{i_0 j_0} - \min\limits_j e_{ij}$ з другого стовпця має бути меншим або рівним деякому заздалегідь заданому рівню ризику $\varepsilon_{\text{доп}}$. Значення ж з третього стовпця має бути більшим за значення з другого стовпця.

BL(S)-критерій

Розглянемо комбінацію критерію Байєса-Лапласа з критерієм Севіджа, що називається BL(S)-критерієм.

За опорну величину приймемо

$$Z_{\mathrm{S}} = \min_i \max_j a_{ij} = a_{i_0 j_0},$$

де $a_{ij} = \max\limits_i e_{ij} - e_{ij}$.

Через $\varepsilon_{\text{доп}} > 0$ знову визначимо припустиму границю ризику.

Тоді

$$I_1 := \left\{ i \;\middle|\; i \in \{1,\ldots,m\} \;\wedge\; \max_j a_{ij} - a_{i_0 j_0} \le \varepsilon_{\text{доп}} \right\},$$

$$\max_j a_{ij} - a_{i_0 j_0} = \varepsilon_i,$$

$$I_2 := \left\{ i \middle| i \in \{1,\ldots,m\} \wedge \min_j a_{i_0 j} - \min_j a_{ij} \geq \varepsilon_i \right\},$$

де $\varepsilon_{\text{доп}} > 0$ – припустима границя ризику. Для E_0 маємо:

$$\mathrm{E}_0 := \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \min_{i \in I_1 \cap I_2} \sum_j a_{ij} q_j \right\}.$$

<u>Критерій добутків</u>

Цей критерій орієнтований на величини виграшів, тобто на додатні значення e_{ij}. У випадку, коли серед величин e_{ij} зустрічаються й від'ємні значення, можна перейти до строго додатних значень за допомогою перетворення $e_{ij} + a$ при підходячим чином підібраному $a > 0$. Так, наприклад, для обрання константи a можна застосувати наступний вираз: $a = \left| \min\limits_{i,j} e_{ij} \right| + 1$.

Визначимо оціночну функцію:

$$Z_{\mathrm{P}} = \max_i e_{ir}, \tag{13}$$

$$e_{ir} = \prod_j e_{ij}. \tag{14}$$

Тоді

$$\mathrm{E}_0 := \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \prod_j e_{ij} \wedge e_{ij} > 0 \right\}. \tag{15}$$

Правило вибору:

> Матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється новим стовпцем, що містить добуток всіх результатів кожного рядку. Обираються ті варіанти E_{i0}, у рядках яких знаходяться найбільші значення цього стовпця.

II. Практична частина

Розглянемо приклад із застосування розширених (складених) критеріїв прийняття рішень.

Приклад: При роботі ЕОМ необхідно періодично припиняти обробку інформації й перевіряти ЕОМ на наявність у ній вірусів. Припинення в обробці інформації приводять до певних економічних витрат. У випадку ж якщо вірус є вчасно виявленим не буде, можливою є втрата деякої частини інформації, що приведе до ще більших збитків.

Варіанти рішення є наступними:

E_1 – повна перевірка;
E_2 – мінімальна перевірка;
E_3 – відмова від перевірки.

ЕОМ може перебувати в наступних станах:

F_1 – вірус є відсутнім;

F_2 – вірус є, але він не встиг ушкодити інформацію;

F_3 – є файли, які потребують відновлення.

Результати, що включають витрати на пошук вірусу та його ліквідацію, а також витрати, пов’язані з відновленням інформації, мають вигляд, наведений у табл. 1.

Таблиця 1

	F_1	F_2	F_3	*MM*-критерій		Критерій *BL*	
				$e_{ir} = \min\limits_j e_{ij}$	$\max\limits_i e_{ir}$	$e_{ir} = \sum\limits_j e_{ij} q_j$	$\max\limits_i e_{ir}$
E_1	-20.0	-22.0	-25.0	-25.0	$\underline{\underline{-25.0}}$	-22.33	
E_2	-14.0	-23.0	-31.0	-31.0		-22.67	
E_3	0	-24.0	-40.0	-40.0		-21.33	$\underline{\underline{-21.33}}$

Нагадаємо результати використання класичних критеріїв прийняття рішень. Вони нам знадобляться згодом.

Так, згідно до ***ММ-критерію*** (див. табл. 1) слід проводити повну перевірку.

За ***критерієм Байєса-Лапласа***, у припущенні, що всі стани машини є рівновірогідними, тобто

$$P(F_j) = q_j = \frac{1}{3},$$

рекомендується відмовитися від перевірки (див. табл. 1).

Використаємо розширені критерії прийняття рішень.

У таблиці, наведеній нижче, рішення вибирається відповідно до ***BL(MM)-критерію*** при $q_1 = q_2 = q_3 = 1/3$ (дані в 10^3).

$\lVert e_{ij} \rVert$			$\min\limits_j e_{ij}$	$\max\limits_i (\min\limits_j e_{ij})$	$\varepsilon_i = e_{i_0 j_0} - \min\limits_j e_{ij}$	$\max\limits_j e_{ij} - \max\limits_j e_{i_0 j}$	$\sum\limits_j e_{ij} q_j$
-20.0	-22.0	-25.0	-25.0	$-25.0 = e_{i_0 j_0}$	0	-20.0-(-20.0)=0	-23.33
-14.0	-23.0	-31.0	-31.0		+6.0	-14.0-(-20.0)=+6.0	-22.67
0	-24.0	-40.0	-40.0		+15.0	0-(-20.0)=+20.0	-21.33

В якості $\varepsilon_{доп} > 0$ можна обрати довільне додатне число.

Якщо обрати $\varepsilon_{доп} = 6 \times 10^3$, то індексна множина $I_1 := \left\{ i \mid i \in \{1, \ldots, m\} \wedge e_{i_0 j_0} - \min\limits_j e_{ij} \le \varepsilon_{\text{доп}} \right\}$ буде включати два перших варіанти рішень за умови виконання нерівності $e_{i_0 j_0} - \min\limits_j e_{ij} \le \varepsilon_{\text{доп}}$, тобто $I_1 = \{1, 2\}$ при $\varepsilon_{доп} = 6 \times 10^3$. Щоб побудувати індексну множину

$I_2 := \left\{ i \middle| i \in \{1,\ldots,m\} \wedge \max_j e_{ij} - \max_j e_{i_0 j} \geq e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij} = \varepsilon_i \right\}$, за елементами передостаннього стовпця таблиці, обираємо ті варіанти, які є більшими або дорівнюють знайденим ε_i. В даному випадку $I_2 = \{1, 2, 3\}$. Оптимальний варіант за BL(MM)-критерієм знаходиться при використанні BL-критерію на перетині першого та другого індексних множин, тобто на $I_1 \cap I_2$, яким в даному випадку буде множина $I_1 \cap I_2 = \{1, 2\}$. З урахуванням цього BL-критерій обирає оптимальний варіант тільки з двох перших варіантів: $\max_{i \in I_1 \cap I_2} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j = \max_{i \in I_1 \cap I_2} (-23.33; -22.67) = -22.67$. Отже, оптимальний варіант рішення за BL(MM)-критерієм буде: $E_0 = E_2$ (мінімальна перевірка).

Якщо ж обрати $\varepsilon_{доп} = 15 \times 10^3$, то індексна множина I_1 буде включати всі варіанти рішень, тобто $I_1 = \{1, 2, 3\}$. В такому випадку $I_2 = \{1, 2, 3\}$. Перетин $I_1 \cap I_2 = \{1, 2, 3\}$, а, отже оптимальним варіантом рішення за BL(MM)-критерієм буде: $E_0 = E_3$ (відмова від перевірки).

Зауважимо, що варіант E_3 (відмова від перевірки) приймається цим критерієм тільки тоді, коли ризик наближається до $\varepsilon_{доп} = 15 \times 10^3$. У противному випадку оптимальним виявляється варіант E_2.

У багатьох технічних і господарських задачах припустимий ризик буває набагато нижчим, становлячи звичайно тільки незначний відсоток від загальних витрат. У подібних випадках буває особливо корисним, якщо неточне значення розподілу ймовірностей оказує не дуже сильний вплив.

Якщо при цьому виявляється неможливим установити припустимий ризик $\varepsilon_{доп}$ заздалегідь, не залежно від прийнятого рішення, то допомогти може обчислення очікуваного ризику $\varepsilon_{доп}$.

Тоді стає можливим подумати, чи є виправданим подібний ризик. Таке дослідження звичайно дається легше.

Результати ***застосування критерію добутків*** при $a = 41 \cdot 10^3$ та $a = 200 \cdot 10^3$ мають вигляд:

	$\left\| e_{ij} + a \right\|$			$e_{ir} = \prod_j e_{ij}$	$\max_i e_{ir}$
a=41	+21	+19	+16	6384	6384
	+27	+18	+10	4860	
	+41	+17	+1	697	
a=200	+180	+178	+175	5607	
	+186	+177	+169	5563	
	+200	+176	+160	5632	5632

Умова $e_{ij} > 0$ для даної матриці є не виконуваною. Тому до елементів матриці додається (за зовнішнім бажанням) спочатку $a = 41 \cdot 10^3$, а потім $a = 200 \cdot 10^3$. Для $a = 41 \cdot 10^3$ оптимальним виявляється варіант E_1, а для $a = 200 \cdot 10^3$ – варіант E_3. Отже, залежність оптимального варіанта від *a* є очевидною.

III. Хід виконання роботи

Виконання роботи складається **з наступних етапів**:

1 етап: За досліджуваною проблемою складається матриця рішень $\|e_{ij}\|$ виду

	F_1	F_2	. . .	F_n
E_1	e_{11}	e_{12}	. . .	e_{1n}
E_2	e_{21}	e_{22}	. . .	e_{2n}
. . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
E_m	e_{m1}	e_{m2}	. . .	e_{mn}

2 етап: В залежності від обраного критерію прийняття рішення кожному варіанту E_i приписується деякий результат e_{ir}, що характеризує наслідки цього рішення. При цьому матриця рішень $\|e_{ij}\|$ зводиться до одного стовпця виду

E_1	e_{1r}
E_2	e_{2r}
E_3	e_{3r}
…	…
E_i	e_{ir}
…	…
E_m	e_{mr}

Примітка: Попередньо матриця рішень $\|e_{ij}\|$, якщо цього вимагає застосування обраного критерію, має бути приведена до певного виду (наприклад, з додатними, від'ємними і т.д. елементами).

3 етап: В залежності від обраного критерію прийняття рішення за використанням відповідного правила вибору обирається оптимальний варіант рішення E_0.