Лабораторна робота 6

ФОРМАЛІЗАЦІЯ КОНФЛІКТНИХ СИТУАЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕОРІЇ ІГОР.ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ Й ВИЗНАЧЕННЯ ТЕОРІЇ ІГОР. КЛАСИФІКАЦІЯ ІГОР. МАТРИЧНІ ІГРИ. ГРА ДВОХ ОСІБ З НУЛЬОВОЮ СУМОЮ ВИГРАШУ. РОЗВ'ЯЗОК МАТРИЧНИХ ІГОР У ЧИСТИХ СТРАТЕГІЯХ

Мета роботи – набути навичок пошуку раціональних рішень в умовах невизначеності викликаної конфліктом інтересів.

І. Теоретичні відомості з теми

Конфліктною ситуацією називається ситуація, у якій стикаються інтереси двох чи більше сторін, що мають суперечливі цілі, причому виграш кожної зі сторін залежить від того, як поводитимуться інші.

Математична (формалізована) модель конфліктної ситуації називається **грою**.

Будь-яка гра містить у собі **три елементи**: учасників гри – гравців, правила гри, оцінку результатів дій гравців:

$$\Gamma = < I,\ \{x\},\ \{H\} > = < \text{гравці, стратегії, виграші} >.$$

Найпростішим випадком, докладно розробленим у теорії ігор, є кінцева парна гра з нульовою сумою (**антагоністична гра двох осіб або двох коаліцій**), яка формалізується наступним чином.

Нехай у грі беруть участь два гравці A та B з протилежними інтересами та для якої характерним є наступне: виграш одного гравця дорівнює програшу іншого.

У розпорядженні гравця A є лише m можливих ходів $i = 1,2,...,m$ (m можливих стратегій $A_1, A_2,..., A_m$); у розпорядженні гравця B (супротивника) є n можливих ходів $j = 1,2,...,n$ (n можливих стратегій $B_1, B_2,..., B_n$). Натуральні числа m та n ніяким чином не пов'язані.

Можливі такі ходи (стратегії) гравців A та B називаються **чистими стратегіями**.

Обидва гравці роблять одночасно по одному ходу, після чого партія вважається закінченою.

Отже, парна гра складається із **двох ходів**:

1. гравець A робить хід i та обирає одну зі своїх можливих чистих стратегій A_i $(i = \overline{1,m})$;
2. гравець B робить хід j та обирає свою чисту стратегію із B_j $(j = \overline{1,n})$ при повному незнанні обраної стратегії гравцем A.

Введемо наступні позначення: $\varphi_1(A_i, B_j)$ – виграш гравця *A*;
$\varphi_2(A_i, B_j)$– виграш гравця *B*.

Виграші повинні задовольняти умові:

$$\varphi_1(A_i, B_j) + \varphi_2(A_i, B_j) = 0. \qquad (1)$$

Якщо позначимо, що

$$\varphi_1(A_i, B_j) = \varphi(A_i, B_j),$$

то, отже,

$$\varphi_2(A_i, B_j) = -\varphi(A_i, B_j).$$

Оскільки виграш гравця *A* дорівнює виграшу гравця *B* зі зворотним знаком, ми можемо цікавитися тільки виграшем $\varphi(A_i, B_j)$ гравця *A*. Природно, *A* прагне максимізувати, а *B* – мінімізувати $\varphi(A_i, B_j)$.

Якщо гравець *A* обирає деяку стратегію A_i , то це само по собі не може впливати на значення функції $\varphi(A_i, B_j)$, тобто вплив A_i на величину значення $\varphi(A_i, B_j)$ є невизначеним. Визначити j можна тільки після вибору своєї стратегії B_j гравцем *B*.

Наслідки ігри $m \times n$ повністю визначаються матрицею (**платіжною матрицею** або **матрицею гри**)

$$A = (a_{ij})_{m \times n},$$

де $a_{ij} = \varphi(A_i, B_j)$.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}_{2 \times 4}$.

Матриця гри – це таблиця, у яку зведені правила гри в такий спосіб:

а) кількість рядків у матриці *A* відповідає кількості стратегій гравця *A*, а кількість стовпців – кількості стратегій гравця *B*;

б) номер рядка матриці *A* відповідає номеру стратегії A_i гравця *A*, а номер стовпця – номеру застосовуваної стратегії B_j гравця *B*;

в) на перетині рядка A_i й стовпця B_j перебуває елемент a_{ij} , тобто виграш гравця *A* (відповідний до застосовуваних стратегій) або програш гравця *B*. Таким чином, елементи a_{ij} матриці *A* є платою гравця *B* гравцю *A* у випадку вибору гравцем *A* стратегії A_i (*i*-го рядка), а гравцем *B* – стратегії B_j (*j*-го стовпця). Кількість таких ситуацій дорівнюватиме $(m \times n)$.

Елементи a_{ij} матриці *A* можуть бути додатними, від'ємними або рівними нулю:

– якщо елемент a_{ij} матриці є додатним ($a_{ij} > 0$), то це означає, що гравець *B* в певній ситуації повинен сплатити гравцю *A* суму, яка дорівнює значенню цього елемента a_{ij};

– якщо елемент a_{ij} – від'ємний ($a_{ij} < 0$), то це означає, що гравець *A* сплачує гравцю *B* суму, яка дорівнює абсолютному значенню цього елемента a_{ij};

– якщо елемент $a_{ij} = 0$, то це означає, що ніякої виплати не проводиться.

Отже, в грі двох осіб з нульовою сумою один гравець виграє стільки ж, скільки програє інший (всі виплати проводяться з «кишень» супротивників). Це і пояснює назву – гра з нульовою сумою.

При складанні моделі гри платіжну матрицю зручно попередньо подати у табличній формі виду:

	B_1	B_2	$\dots$	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}

Після побудови матриці гри необхідно обрати оптимальну (ефективну) стратегію, тобто вирішити гру, для чого, в першу чергу, потрібно ознайомитися з принципами, на які спираються гравці *A* та *B* при виборі своїх стратегій A_i $(i = \overline{1,m})$ та B_j $(j = \overline{1,n})$.

Такиим чином, з метою формалізації конфліктної ситуації та подання її у вигляді математичної моделі задач теорії ігор, тобто гри, здійснюються наступні етапи:

1. визначення гравців (учасників гри) та всіх можливих дії кожного гравця.
2. складання платіжної функції кожного гравця (якщо вона є уявною в аналітичному вигляді).
3. обчислення виграшів кожного гравця в залежності від одночасних дій гравця та його противника.
4. заповнення платіжної матриці гри.

Принципи вибору стратегій гравцями *A* и *B*. Розв'язання матричних ігор у чистих стратегіях

Нехай гравець *A* обирає деяку стратегію A_i.

Тоді в найгіршому випадку (коли його вибір стане відомий супротивникові) він одержить виграш, що дорівнює

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}.$$

Передбачаючи таку можливість, гравець *A* повинен обрати таку стратегію A_{i0}, щоб максимізувати свій мінімальний виграш, тобто

$$\alpha = \alpha_{i0} = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}. \qquad (2)$$

Величина α гарантує виграш гравця *A* та називається **нижньою ціною гри**, яка показує, який мінімальний виграш може гарантувати собі гравець *A*, застосовуючи свої стратегії при будь-яких діях гравця *B*.

Стратегія A_{i0} , що забезпечує одержання α називається **максимінною стратегією**, ідея якої полягає в тому, що гравець *A* не розраховує на можливі помилки гравця *B* та одержує **гарантований виграш** α .

Гравець *B*, обираючи стратегію виходить із наступного принципу: при виборі деякої стратегії B_j його програш не перевищить максимального зі значень елементів *j*-го стовпця матриці, тобто

$$\beta_j = \max_i a_{ij} .$$

Розглядаючи всі значення β_j, гравець *B* обирає таке значення β_{j0}, при якому його максимальний програш буде мінімальним, тобто

$$\beta = \beta_{j0} = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij} . \qquad (3)$$

Величина β називається **верхньою ціною гри**, яка показує, який максимальний виграш за рахунок своїх стратегій може гарантувати собі гравець *A*.

Відповідна до виграшу β стратегія B_{j0} називається **мінімаксною стратегією.**

Ситуація (i, j), яка відповідає парі стратегій (A_i, B_j) та якій поставлено у відповідність число a_{ij}, визначає результат вибору кожним гравцем своєї стратегії.

Якщо гравці *A* та *B* прийняли відповідно стратегії A_{i0} й B_{j0}, то говорять, що вони використовують **принцип міні-максу (принцип гарантованого результату)**:

> *поступай таким чином, щоб при найгіршій для тебе поведінці супротивника одержати максимальний виграш.*

У випадку, коли $\alpha = \beta$, ми маємо справу із **сідловою точкою** або **точкою рівноваги**.

Сідлова точка – це такий елемент $a_{i_0 j_0}$ матриці *A*, який одночасно є мінімальним у рядку й максимальним у стовпці.

Стратегії (i_0, j_0), які є відповідними до сідлової точки $a_{i_0 j_0}$, називаються **оптимальними чистими стратегіями**.

Ознака наявності сідлової точки й урівноваженої пари стратегій (пари стратегій A_{i_0}, B_{j0}, що володіють властивістю рівноваги) – це рівність нижньої й верхньої ціни гри

$$V = \alpha = \beta .$$

Значення $V = \alpha = \beta$ називається **чистою ціною гри**.

Ціна гри V й набір стратегій (i_0, j_0) утворюють **розв'язок гри в чистих стратегіях**, тобто набір

$$\{(i_0, j_0), V\}.$$

<u>*Твердження 1*</u>: Ситуація (i_0, j_0) в матричній $m \times n$ - грі є **рівноважною (сідловою точкою)**, якщо для будь-якого $i = 1, \ldots, m$ й кожного $j = 1, \ldots, n$ виконується нерівність

$$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}.$$

У грі може існувати не одна сідлова точка, наприклад

$$(i_0, j_0),\ (i_{10}, j_{10}),\ (i_{20}, j_{20}).$$

Зокрема, наприклад, матриця $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ -2 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ має 4 сідлові точки, що дорівнюють 2 та розташовані в першому рядку й першому стовпці, у першому рядку й четвертому стовпці, у другому рядку й першому стовпці, у другому рядку й четвертому стовпці матриці, відповідно.

Дійсно, визначаючи нижню та верхню ціни гри, маємо:

$$\begin{array}{cccc} & & \min\limits_j a_{ij} & \\ & & \| & \\ A = & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ -2 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \left.\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{matrix}\right\} & \alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 2 \\ \max\limits_i a_{ij} = & \underbrace{\begin{matrix} 2 & 7 & 6 & 2 \end{matrix}} & & \\ & \beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 2 & & \end{array}$$

Даний приклад показує, що матриця може мати кілька (більше однієї) сідлових точок.

Проте, якщо матриця має кілька сідлових точок, всі їх значення є рівними.

Так, у матриці, всі елементи якої дорівнюють один одному, всі елементи є сідловими точками. Максимальна кількість сідлових точок у такій грі дорівнює $(m \times n)$, $m -$ кількість рядків, $n -$ кількість стовпців матриці.

<u>*Твердження 2*</u>: У випадку існування сідлової точки платіжної матриці говорять, що гра має розв'язок у чистих стратегіях.

Вірним є й <u>*зворотне твердження*</u>: гра має розв'язок у чистих стратегіях тоді й тільки тоді, коли платіжна матриця гри має сідлову точку.

<u>Теорема 1:</u> У матричній грі нижня ціна гри α не перевершує верхньої ціни гри β, тобто $\alpha \le \beta$.

II. Практична частина

В якості прикладу формалізації гри розглянемо ситуацію з контролем пожежною інспекцією виконання бізнесом всіх норм протипожежної безпеки, прописаних в нормативних актах пожежної інспекції.

Протиборчі сторони: бізнес та держава в особі пожежної інспекції.

Бізнес може забезпечити виконання всіх норм протипожежної безпеки, прописаних в нормативних актах пожежної інспекції (наявність встановленої системи пожежогасіння, працюючих вогнегасників, запасних виходів, плану евакуації, використання безпечних матеріалів, палива і т.д.). Однак, іноді, щоб збільшити свій дохід, бізнес може не повністю виконати вимоги пожежної безпеки (наприклад, не встановити систему пожежогасіння через її дорожнечу), що призводить до конфлікту з пожежною інспекцією, яка накладає штрафи на бізнес та зобов'язує його їх сплачувати аж до закриття бізнесу.

Держава в особі пожежної інспекції, щоб підвищити свій дохід, може проконтролювати виконання бізнесом всіх норм протипожежної безпеки і стягнути з бізнесу накладений штраф, якщо норми виконані в частковому обсязі. А також, щоб зменшити загальні витрати на забезпечення діяльності інспекції, держава може не проводити контроль, дохід (від здійснення контролю) її в такому випадку не зміниться.

Ця ситуація являє собою антагоністичну парну гру – матричну гру з нульовою сумою, оскільки виграш держави – це сума віддана бізнесом (його програш).

Пункт 1 алгоритму формалізації ігрової ситуації полягає у розписуванні всіх можливих дій кожного гравця.

Бізнес – гравець A – у цій ситуації може мати дві стратегії A_i, $i = 1,2$:

A_1. забезпечити виконання всіх норм протипожежної безпеки, прописаних в нормативних актах пожежної інспекції;

A_2. може не повністю (частково) виконати вимоги пожежної безпеки.

Пожежна інспекція – гравець B – може мати дві стратегії B_j, $j = 1,2$:

B_1. проконтролювати виконання всіх норм протипожежної безпеки і стягнути з бізнесу накладений штраф, якщо норми виконані в частковому обсязі;

B_2. не проводити контроль, дохід (від здійснення контролю) її в такому випадку не зміниться.

Пункт 2 алгоритму формалізації ігрової ситуації полягає у складанні виграш-функції кожного гравця. У даному випадку виграш функції гравців не описуються аналітичним виразом (оскільки виражаються якісно). Щоб можна було отримати такий запис, потрібно надати кількісні оцінки для отримуваних виграшів (програшів) гравця *A*, отже, потрібно визначити, якою величиною вимірюється штраф за часткове виконання вимог та витрати на повне й часткове виконання вимог для бізнесу.

Нехай, витрати бізнесу на повне виконання всіх вимог становлять 200 у.о., на часткове виконання – 30 у.о. Штраф за часткове виконання вимог виплачується бізнесом в розмірі 1000 у.о.

Позначимо :

$\varphi_1(A_i, B_j)$ – виграш гравця *A*;

$\varphi_2(A_i, B_j)$– виграш гравця *B*.

Оскільки виграші гравців *A* та *B* повинні задовольняти умові

$$\varphi_1(A_i, B_j) + \varphi_2(A_i, B_j) = 0, \qquad (1)$$

то, позначивши, що $\varphi_1(A_i, B_j) = \varphi(A_i, B_j)$, отримаємо $\varphi_2(A_i, B_j) = -\varphi(A_i, B_j)$.

В такий спосіб отримано виграш-функції кожного гравця.

Пункт 3 та 4 алгоритму формалізації ігрової ситуації поєднуємо. Обчислюємо виграші кожного гравця залежно від їх дій. Оскільки у нас гра з нульовою матрицею, достатньо вирахувати виграші тільки гравця *A*.

За гравця *A* приймемо бізнес.

Тоді можливі наступні ситуації:

– якщо гравець *A* застосовує свою стратегію A_1, а гравець *B* застосовує свою стратегію B_1, то виграш $\varphi_1(A_1, B_1) = -200$ (гравець *A* має тільки витрати на виконання всіх вимог пожежної безпеки не залежно від здійснюваного контролю з боку пожежної інспекції);
– якщо гравець *A* застосовує свою стратегію A_1, а гравець *B* застосовує свою стратегію B_2, то виграш $\varphi_1(A_1, B_2) = -200$ (гравець *A* має тільки витрати на виконання всіх вимог пожежної безпеки не залежно від здійснюваного контролю з боку пожежної інспекції);
– якщо гравець *A* застосовує свою стратегію A_2, а гравець *B* застосовує свою стратегію B_1, то виграш $\varphi_1(A_2, B_1) = -(30 + 1000) = -1030$ (оскільки контроль проводиться, гравець *A* має витрати на часткове виконання вимог пожежної безпеки + штраф за часткове виконання вимог);

– якщо гравець A застосовує свою стратегію A_2, а гравець B застосовує свою стратегію B_2, то виграш $\varphi_1(A_2, B_2) = -30$ (оскільки контроль не проводиться, гравець A має тільки витрати на часткове виконання вимог пожежної безпеки).

В результаті отримуємо наступну платіжну матрицю гри у вигляді

	B_1	B_2
A_1	-200	-200
A_2	$-(30+1000)$	-30

або

$$A = \begin{pmatrix} -200 & -200 \\ -1030 & -30 \end{pmatrix}.$$

Оскільки гравцем A (виграші розташовується по рядках таблиці) у прикладі виступає бізнес, усі значення у матриці наведені зі знаком мінус. Це свідчить, що бізнес віддає, а держава отримує.

Отже, платіжна матриця для гравця A отримана.

Розглянемо ще один приклад. **Гра «пошук».**

Ця гра двох гравців А та В полягає в тому, що гравець А ховається, а гравець В шукає його.

В розпорядженні гравця А є тільки два притулки (схованки), кожний з яких він може використати за власним бажанням.

Якщо використовується перший притулок, то будемо говорити, що гравець А вибрав стратегію A_1. Коли вибрано другий притулок, то це означає, що вибрана стратегія A_2. Аналогічно гравець В може шукати гравця А в першому або другому притулках, вибираючи відповідно стратегію B_1 та B_2.

Умови гри: якщо гравець В знаходить гравця А , тоді останній платить йому 1 грн., якщо В не знаходить А, то В сам повинен заплатити гравцю А 1 грн..

Побудуємо платіжну матрицю для цієї гри. Оскільки в обох гравців є тільки по дві стратегії, то це є гра типу 2×2, для якої платіжна матриця має такий вигляд

$$A = \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо ще один ***приклад*** з формалізації конфліктної ситуації.

Нехай два гравці А і В грають у гру, засновану на підкиданні монети.

Гравці одночасно і незалежно один від одного обирають герб (Г) або решку (Р). Якщо результати двох підкидань монети збігаються (тобто ГГ або РР), то гравець А отримує один долар від гравця В. Інакше гравець А платить один долар гравцеві В.

Для кожного з гравців можливі 2 варіанти результатів: випадання герба або решки, отже матриця платежів має розмірність 2×2.

	$B_г$	$B_р$
$A_г$		
$A_р$		

Якщо результати двох підкидань (тобто підкидань монети гравцями А і В) збігаються, то платіж в 1 долар отримує гравець А.

Будемо будувати матрицю гри, з точки зору гравця А, тобто його виграші оцінювати як позитивний, а програші - як негативний (з точки зору В все буде навпаки і ми цілком могли б побудувати матриці платежів, орієнтуючись на його точку зору).

	$B_г$	$B_р$
$A_г$	1	
$A_р$		1

Якщо результати підкидання різняться, то долар отримує В, значить платіж А дорівнює -1 долар. У грі з нульовою сумою виграш гравця В рівносильний програшу гравця А і дорівнює тому - $f(A_i, B_j)$.

	$B_г$	$B_р$
$A_г$	1	−1
$A_р$	−1	1

Т.ч., ми побудували матрицю гри, що описує задану ситуацію. Передбачається, що матриця гри обом гравцям відома.

Результат гри залежить від поведінки обох гравців, яке ґрунтується на виборі визначених стратегій гри, тобто таких варіантів, при яких платіж даному гравцю буде найбільшим.

Однак, в теорії ігор гравець не може просто прагнути до максимуму, він змушений рахуватися з діями суперника. Істотно, що жоден з партнерів не знає, яку стратегію застосує його противник.

Отже, має місце ситуація повної невизначеності, при якій теорія ймовірності також не може допомогти гравцям у виборі рішення.

Розглянемо декілька прикладів аналізу та розв’язання матричної гри з нульовою сумою в чистих стратегіях.

<u>Приклад 1:</u> Визначити нижню й верхню ціну гри із платіжною матрицею

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$\alpha_i=\min_j a_{ij}$$

$$\begin{array}{rc|l} & A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} 2 \\ 3=\alpha=\max\limits_i \alpha_i \\ 1 \end{array} \\ \hline \beta_j=\max\limits_i a_{ij} & 4 \quad 5 \quad 6 \quad 5 & \end{array}$$

Тоді нижня ціна гри визначається у вигляді

$$\alpha=\max_i \alpha_i=\max_i \{2 \quad 3 \quad 1\}=3,$$

верхня ціна гри визначається у вигляді

$$\beta=\min_j \beta_j=\min_j \{4 \quad 5 \quad 6 \quad 5\}=4.$$

Отже, $\alpha=3<\beta=4$.

Щоб визначити $(i,j)-$ ситуацію, потрібно визначити номер рядка та номер стовпця, які відповідають нижній та верхній цінам гри $(i=2,\ j=1)$.

Тоді $(2,1)-$ ситуація.

<u>Відповідь</u>: оскільки $\alpha<\beta$, то розв'язку гри в чистих стратегіях не існує.

<u>Приклад 2:</u> Визначити нижню й верхню ціну гри із платіжною матрицею

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$\alpha_i=\min_j a_{ij}$$

$$\begin{array}{c|l} A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} 0 \\ 2 \\ -1 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

$$\beta_i=\max_i a_{ij}=3 \quad 2 \quad 4 \quad 5$$

$$\beta=\min_j \beta_j=\min_j \{3 \quad 2 \quad 4 \quad 5\}=2.$$

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \{\, 0 \quad 2 \quad -1 \,\} = 2.$$

$$\alpha = \beta = 2.$$

Отже, $\alpha = \beta = 2$. $\qquad (i = 2,\, j = 2) \Rightarrow (2{,}2) -$ ситуація.

<u>Відповідь</u>: $\{(i_0, j_0), V\} = \{(2{,}2), 2\}$ – розв'язок гри в чистих стратегіях.

<u>Приклад 3:</u> Знайти розв'язок гри в чистих стратегіях для гри з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$\begin{array}{rcc} & & \min\limits_j a_{ij} \\ & & \| \\ A \;=\; & \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \left.\begin{matrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right\} \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 2 \\ \max\limits_i a_{ij} = & \underbrace{\begin{matrix} 2 & \quad 5 & \quad 4 \end{matrix}}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 2} & \end{array}$$

Сідловою точкою є пара $(i_0 = 3;\, j_0 = 1)$, при якій $V = \alpha = \beta = 2$.

Помітимо, що хоча виграш у ситуації (3,3) також дорівнює 2, вона не є сідловою точкою, оскільки цей виграш не є максимальним серед виграшів третього стовпця.

<u>Відповідь</u>: $\{(i_0, j_0), V\} = \{(3{,}1), 2\}$ – розв'язок гри в чистих стратегіях.

<u>Приклад 4:</u> Знайти розв'язок гри в чистих стратегіях (якщо існує) для гри з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 40 & 20 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$\begin{array}{rccc} & & \min\limits_j a_{ij} & \\ A = & \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 40 & 20 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \\ \to \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 10 \\ 20 \end{matrix}\right\} & \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 20 \\ \max\limits_i a_{ij} & \begin{matrix} \downarrow & \quad \downarrow \end{matrix} & & \\ & \underbrace{\begin{matrix} 40 & 30 \end{matrix}}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 30} & & \end{array}$$

З аналізу матриці виграшів видно, що $\alpha < \beta$, тобто дана матриця не має сідлової точки.

<u>Відповідь</u>: оскільки $\alpha < \beta$, то розв'язку гри в чистих стратегіях не існує.

Приклад 5: Фірма виготовляє промислове устаткування. Експертами виробничого відділу фірми розглядаються три конструкторські варіанти устаткування: *А*-1, *А*-2, *А*-3. Для спрощення допустимо, що за технічними характеристиками ці три типи є майже ідентичними, однак залежно від зовнішнього вигляду та зручності використання кожен тип може мати три модифікації: *М*-1, *М*-2, *М*-3 залежно від закупленої технології виробництва. Собівартість виготовлення устаткування наведена в табл. 8.1.

Таблиця 8.1 – Собівартість виготовлення устаткування, тис. у. о.

Тип устаткування	Модифікація		
	М-1	М-2	М-3
А-1	10	6	5
А-2	8	7	9
А-3	7	5	8

Конфліктна ситуація виникає в зв'язку з необхідністю вибрати той тип устаткування та його модифікації, який буде затверджений економічним відділом фірми. З погляду виробництва найкращим є найдорожчий варіант, оскільки він дає змогу виробляти дорожчу та конкурентоспроможнішу продукцію, тоді як з погляду економічного відділу фірми найкращим є найдешевший варіант, який потребує найменшого відволікання коштів.

Завдання експертів полягає в тому, щоб запропонувати на розгляд фінансовому відділу такий тип устаткування, який забезпечить якщо не кращий, то в усякому разі не гірший варіант співвідношення вартості та зовнішнього вигляду.

Розв'язання

Складемо платіжну матрицю гри. За табл.1 вона буде мати вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 8 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Якщо виробничий відділ (згідно табл. 1) запропонує виготовлення устаткування типу А-1, то економічний відділ настоюватиме на придбанні технології, що дає модифікацію М-3, оскільки цей варіант найдешевший. Якщо зупинитись на устаткуванні виду А-2, то скоріш за все затверджено буде М-2, і нарешті для типу А-3 – також М-2.

Очевидно, що з усіх можливих варіантів розвитку подій експертам виробничого відділу необхідно настоювати на варіанті впровадження у виробництво устаткування типу А-2, оскільки це дає найбільше значення за реалізації найгірших умов – 7 тис. ум. од.

Наведені міркування ілюструють максимінну стратегію, отже (згідно до матриці A):

$$\min_{i=1} a_{ij} = \min\{10;6;5\} = 5,$$

$$\min_{i=2} a_{ij} = \min\{8;7;9\} = 7,$$

$$\min_{i=3} a_{ij} = \min\{7;5;8\} = 5.$$

Отже, $\alpha = \max_j \min_i a_{ij} = \max\{5;7;5\} = 7$ – нижня ціна гри.

Якщо учасник відхилиться від своєї оптимальної (максимінної) стратегії і вибере першу чи третю, то зможе отримати виграш, що дорівнює лише 5.

Розглянемо тепер ситуацію з погляду спеціалістів економічного відділу. Виходячи з витрат на виробництво устаткування, вибір технології, що дає змогу виготовляти модифікацію М-1, може призвести до найбільших витрат у тому разі, коли вдасться затвердити випуск устаткування типу А-1. Для технології виготовлення устаткування з модифікацією М-2 найбільші можливі витрати становлять 7 тис. ум. од. – для устаткування А-2, а з модифікацією М-3 – також для А-2. Для економістів найкращим є вибір технології, що забезпечує виготовлення устаткування модифікації другого виду, оскільки за найгірших для них умов вона дає найменші витрати – 7 тис. ум. од.

Останні міркування відповідають мінімаксній стратегії, отже (згідно до матриці A):

$$\max_{j=1} a_{ij} = \max\{10;8;7\} = 10,$$

$$\max_{j=2} a_{ij} = \max\{6;7;5\} = 7,$$

$$\max_{j=3} a_{ij} = \max\{5;9;8\} = 9.$$

Отже, $\beta = \min_i \max_j a_{ij} = \min\{10;7;9\} = 7$ – верхня ціна гри.

Аналогічні обчислення можна простежити, використовуючи безпосередній аналіз матриці А:

$$\begin{array}{ccc} & & \min\limits_j a_{ij} \\ & & \| \\ A = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 8 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 8 \end{pmatrix} & & \left.\begin{matrix} 5 \\ 7 \\ 5 \end{matrix}\right\} \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 7 \\ \max\limits_i a_{ij} = \underbrace{\begin{matrix} 10 & 7 & 9 \end{matrix}}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 7} & & \end{array}$$

В даному випадку $\alpha = \beta = 7$, а, отже, маємо сідлову точку $(i_0, j_0) = (2{,}2)$ з ціною гри $V = 7$. Можемо записати остаточну <u>відповідь</u>: $\{(i_0, j_0), V\} = \{(2{,}2), 7\}$ – розв'язок гри в чистих стратегіях

Якщо гравець відхилиться від своєї оптимальної (мінімаксної) стратегії, то це призведе до більших втрат. Якщо буде обрано першу стратегію, то можливий програш дорівнюватиме 10, а якщо буде обрано третю стратегію, то можливий програш становитиме 9.