Лабораторна робота 7

ГРА ДВОХ ОСІБ З НУЛЬОВОЮ СУМОЮ ВИГРАШУ. РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТРИЧНОЇ ГРИ (2×2) В ЗМІШАНИХ СТРАТЕГІЯХ. ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ МАТРИЧНИХ ІГОР

Мета роботи – засвоїти алгоритми розв’язання матричних ігор у змішаних стратегіях, використовуючи властивості розв'язків матричних ігор.

I. Теоретичні відомості з теми

Розв'язання матричної гри в змішаних стратегіях

Дослідження в матричних іграх починається зі знаходження її сідлової точки в чистих стратегіях. Якщо матрична гра має сідлову точку в чистих стратегіях, тобто

$$\alpha = \beta,$$

то знаходженням цієї сідлової точки закінчується дослідження гри, оскільки, як відомо, у випадку існування сідлової точки платіжної матриці, *гра має розв'язок у чистих стратегіях*.

Якщо ж у грі немає сідлової точки в чистих стратегіях, тобто

$$\alpha < \beta,$$

то *гра має розв'язок у змішаних стратегіях*.

Змішаною стратегією першого гравця називається вектор

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_m),$$

де: $p_i \geq 0, i = \overline{1,m}, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$

Змішаною стратегією другого гравця називається вектор

$$q = (q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

де: $q_j \geq 0, j = \overline{1,n}, \quad \sum_{j=1}^{n} q_i = 1.$

Вектор p є вектором ймовірності застосування $i-$ї стратегії першим гравцем. Аналогічно, **вектор** q є вектором ймовірності застосування $j-$ї стратегії другим гравцем.

Оскільки гравці обирають свої чисті стратегії випадково й незалежно один від одного, то <u>*гра має випадковий характер*</u>. Тому випадковою стає й величина виграшу (програшу).

У цьому випадку **середня величина виграшу гравця *A*** виражається у вигляді математичного очікування його виграшів та є функцією від двох змішаних стратегій, яку ми будемо визначати в такий спосіб:

$$f(p,q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,p_i q_j\ ,$$

де $f(p,q)-$ це **платіжна функція гри** з матрицею $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$.

Стратегії $p^*=\left(p_1^*,p_2^*,\dots,p_m^*\right)$, $q^*=\left(q_1^*,q_2^*,\dots,q_n^*\right)$ є **оптимальними**, якщо для довільних стратегій p $\left(\forall p=(p_1,p_2,\dots,p_m)\right)$ та q $\left(\forall q=(q_1,q_2,\dots,q_n)\right)$ виконується умова:

$$f\left(p,q^*\right)\le f\left(p^*,q^*\right)\le f\left(p^*,q\right).$$

Це означає, що використання у грі оптимальних змішаних стратегій забезпечує:

- гравцю *A* виграш, не менший, ніж той, що він отримає при використанні ним будь-якої іншої стратегії p;
- гравцю *B* програш, не більший, ніж той, що він отримає при використанні ним будь-якої іншої стратегії q.

Сукупність оптимальних стратегій та ціни гри становить **розв'язок гри**.

Значення платіжної функції при оптимальних стратегіях визначає ціну гри, яка подається у вигляді

$$V=f\left(p^*,q^*\right).$$

Тоді фактично розв'язком гри в змішаних стратегіях є набір (трійка):

$$\left(p^*,q^*,V\right).$$

Справедливою є наступна ***основна теорема теорії матричних ігор***.

<u>Теорема 2 (фон Неймана):</u> У змішаних стратегіях будь-яка кінцева матрична гра має розв'язок.

<u>Теорема 3:</u> (Критерій оптимальності змішаних стратегій):

Для того, щоб змішані стратегії $p^*=\left(p_1^*,p_2^*,\dots,p_m^*\right)$ й $q^*=\left(q_1^*,q_2^*,\dots,q_n^*\right)$ були оптимальними для гравців *A* та *B* у грі з матрицею $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ й виграшем V, необхідно й достатньо виконання наступних нерівностей:

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\,p_i^*\ge V\ ,\qquad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}q_j^*\le V\ .$$

<u>Зауваження до Теореми 3:</u> На підставі теореми 3 можна зробити висновок: якщо гравець *A* ухвалює оптимальну змішану стратегію p^*, а гравець *B* – будь-яку чисту стратегію B_j, то виграш гравця *A* буде не меншим ціни гри V.

Аналогічне твердження справедливе й для другого гравця: якщо гравець *B* ухвалює оптимальну змішану стратегію q^*, а гравець *A* – будь-яку чисту стратегію A_i, то виграш гравця *B* буде не більшим ціни гри V.

Чисті стратегії, що входять до оптимальної змішаної стратегії будь-якого гравця з ймовірностями, відмінними від нуля, називаються **активними стратегіями**.

Для активних стратегій справедливою є наступна теорема 4.

<u>Теорема 4 (про активні стратегії)</u>: Якщо один з гравців дотримується своєї оптимальної змішаної стратегії, то його виграш залишається незмінним та рівним ціні гри не залежно від того, яку стратегію приймає інший гравець, якщо тільки той (другий гравець) не виходить за межі своїх активних стратегій.

<u>Теорема 5 (про афінні перетворення)</u>: Оптимальні змішані стратегії p^* й q^* відповідно гравців *A* та *B* у матричній грі з матрицею $(a_{ij})_{m\times n}$ з ціною гри V будуть оптимальними й у матричній грі з матрицею $(ba_{ij}+c)_{m\times n}$ з ціною гри $V' = bV + c$, де $b > 0$.

На підставі теореми 5 платіжну матрицю, що містить від'ємні числа, можна перетворити в матрицю з додатними числами.

Розглянемо це на наступному прикладі.

<u>Приклад:</u> Дана матриця гри

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо ціну гри для матриці *A*:

$$\begin{array}{rc|c} & & \min \\ A = & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} -1 \\ -3 \end{matrix} \\ \hline \max & \begin{matrix} -1 & \quad 1 \end{matrix} & \end{array}$$

$$\text{Тоді} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha = \max\limits_i \alpha_i = -1 \\ \beta = \min\limits_j \beta_j = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad V = \alpha = \beta = -1.$$

Нехай $c = 4, b = 1$. Щоб перейти від від'ємних елементів матриці A до додатних, додамо до всіх елементів матриці величину c

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

та знайдемо ціну гри для матриці A':

$$\begin{array}{ccc} & & \min \\ A' = & \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{|c} 3 \\ 1 \end{array} \\ \max & \begin{array}{cc} 3 & 5 \end{array} & \end{array}$$

Тоді $\left.\begin{array}{l} \alpha = \max\limits_{i} \alpha_i = 3 \\ \beta = \min\limits_{j} \beta_j = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad V' = \alpha = \beta = 3.$

Оскільки $V' = V + c$, то $V = V' - c = 3 - 4 = -1.$

Отже, умова теореми 5 є виконаною.

Домінування чистих стратегій

Застосування принципу домінування дозволяє іноді зменшити кількість стратегій гравців, тобто зменшити розмірність матриці A. Це випливає з того факту, що доміновані стратегії можуть бути виключені, при цьому ціна гри не змінюється.

Рядок з номером *i* домінує рядок з номером *k*, якщо виконується умова

$$a_{ij} \ge a_{kj} \quad \text{для } j = \overline{1, n}.$$

Причому існує хоча б один стовпець із номером m, для якого виконується умова:

$$a_{im} > a_{km}.$$

Домінований рядок k можна викреслити з матриці, оскільки цією стратегією перший гравець ніколи не скористається, оскільки його виграш при виборі стратегії i завжди буде не меншим, ніж при виборі ним домінованої стратегії k.

Стовпець *j* домінує стовпець із номером *k*, якщо виконується умова:

$$a_{ij} \le a_{ik} \quad \text{для } i = \overline{1, m}.$$

Причому існує хоча б один рядок з номером p, для якого виконується умова

$$a_{pj} < a_{pk}.$$

Домінований стовпець k також може бути викресленим з матриці, оскільки другий гравець не буде обирати цю стратегію, оскільки його програш при такому виборі стратегії j буде не меншим, ніж при виборі ним домінованої стратегії k.

Стратегії вважаються **еквівалентними (дубльованими)**, якщо всі виграші цих стратегій є однаковими. Еквівалентні стратегії також можуть бути викресленими з матриці. Викреслення проводиться при цьому таким чином, щоб з числа еквівалентних стратегій залишилась лише одна.

<u>Зауваження</u>: Якщо гра розмірності $(m \times n)$ має сідлову точку, то після спрощень платіжної матриці за принципом домінування чистих стратегій ми завжди отримаємо гру розмірності (1×1).

<u>Теорема 6:</u> Якщо елементи одного рядка (стовпця) не всі є меншими (більшими) або рівними відповідним елементам інших рядків (стовпців), але усі є меншими (більшими) або рівними деяким опуклим лінійним комбінаціям відповідних елементів інших рядків (стовпців), то цю стратегію можна виключити, замінивши її змішаною стратегією з відповідними частотами використання чистих стратегій.

Аналогічно, якщо кожний елемент деякого стовпця більше або дорівнює деякій опуклій лінійній комбінації відповідних елементів деяких інших стовпців, то цей стовпець можна виключити з розгляду.

Можливості домінування змішаними стратегіями на відміну від чистих є значно менш прозорими (потрібно належним чином підібрати частоти застосування чистих стратегій), але такі можливості існують, ними корисно вміти користуватися.

Процедура розв'язання кінцевої парної матричної гри з нульовою сумою в загальному вигляді

З урахуванням принципу домінування чистих стратегій **<u>процедура розв'язання гри в загальному вигляді включає наступні кроки</u>**:

1. для визначеної платіжної матриці гри проводиться її спрощення за допомогою використання принципу домінування (виключаючи доміновані та дублюючі стратегії);
2. для спрощеної матриці гри проводиться розрахунок нижньої та верхньої цін гри;
3. проводиться перевірка наявності сідлової точки та визначається метод розв'язання гри:
   - 3.1. якщо сідлова точка існує ($\alpha = \beta$), то, отже, гра має розв'язок у чистих стратегіях;
   - 3.2. якщо сідлова точка відсутня ($\alpha < \beta$), то, отже, гра має розв'язок у змішаних стратегіях;
4. проводиться розв'язання гри.

Строго детерміновані й не строго детерміновані ігри з матрицею (2×2)

Розглянемо матричні ігри з (2×2)-матрицею, які часто зустрічаються в теорії ігор або зводяться до них у результаті застосування властивості домінування чистих стратегій.

Гра з (2×2)-матрицею є **строго детермінованою**, якщо ця матриця містить елемент V, який одночасно є мінімальним елементом в утримуючому його рядку й максимальним елементом в утримуючому його стовпці.

Тоді оптимальні стратегії гравців полягають у наступному:

- для гравця *A*: «обрати рядок, що містить V»;
- для гравця *B*: «обрати стовпець, що містить V».

Ціною гри й буде число V.

Для строго детермінованої гри завжди існує розв’язок в чистих стратегіях.

Матрична гра є **необразливою**, якщо її ціна дорівнює нулю ($V=0$).

Властивість: Матрична гра з матрицею *A*, у якій в одному рядку або в одному стовпці стоять однакові елементи, є **строго детермінованою**.

Деякі матричні ігри не є строго детермінованими, тобто відповідна їм матриця не містить елемента, який був би одночасно мінімальним у своєму рядку й максимальним у своєму стовпці.

Не строго детерміновані матричні ігри з (2×2)-матрицею можна охарактеризувати в такий спосіб.

Теорема 1 (*про строгу недетермінованість гри*): Гра з матрицею

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

не є строго детермінованою тоді й тільки тоді, коли виконано одне з наступних двох умов:

а) $a<b, a<c,\ d<b$ та $d<c$;

б) $a>b, a>c,\ d>b$ та $d>c$.

Ці співвідношення означають, що елементи головної діагоналі матриці мають бути меншими (більшими) кожного з двох елементів іншої діагоналі матриці.

Розв'язання не строго детермінованої гри з матрицею (2×2)

Розглянемо не строго детерміновану гру з матрицею

$$G=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Вирішимо питання про те, <u>яким чином обирати оптимальну змішану стратегію гравців зі всіх доступних для них змішаних стратегій</u>.

Для не строго детермінованої гри з введеною матрицею G число V називається **ціною** цієї **гри**, а вектори $p^* = \left(p_1^*, p_2^*\right)$ й $q^* = \begin{pmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{pmatrix}$ – **оптимальні стратегії** гравців A та B, якщо мають місце наступні нерівності:

$$p^* G = \left(p_1^*, p_2^*\right)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ge (V,\ V); \tag{1}$$

$$Gq^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} V \\ V \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Нехай гравець A обирає змішану стратегію $p = \left(p_1, p_2\right)$ й (незалежно) гравець B обирає змішану стратегію $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$. Тоді гравець A виграє суму a з ймовірністю $p_1 q_1$, суму b з ймовірністю $p_1 q_2$, суму c з ймовірністю $p_2 q_1$ та суму d з ймовірністю $p_2 q_2$.

В такому випадку середнє значення виграшу (математичне очікування) гравця A обчислиться у вигляді

$$ap_1q_1 + bp_1q_2 + cp_2q_1 + dp_2q_2 = pGq\,.$$

Аналогічно, знаходиться й середнє значення виграшу гравця B. Воно дорівнює цьому ж виразу, але зі зворотним знаком.

Щоб виправдати дане вище визначення, потрібно показати, що, якщо для матриці G існують V, p^*, q^* із зазначеними властивостями, то гравець A може зробити середнє значення свого виграшу рівним або більшим V, а гравець B може зробити це середнє значення рівним або меншим V.

Нехай q – будь-яка стратегія для гравця B. Помноживши (1) праворуч на q, ми одержимо співвідношення $p^* Gq \ge (V, V)q = V$, яке показує, що при будь-якій грі гравця B гравець A може забезпечити собі виграш, середнє значення якого щонайменше дорівнює V.

Аналогічно, нехай p – будь-який вектор стратегії для гравця A. Помноживши (2) ліворуч на p, ми одержимо співвідношення $pGq^* \le p\begin{pmatrix} V \\ V \end{pmatrix} = V$, яке показує, що при будь-якій грі гравця A гравець В може зробити середнє значення виграшу A рівним максимально V.

Саме в цьому полягає <u>тлумачення оптимальних стратегій</u> p^* та q^*.

Якщо обидва гравця грають оптимальним чином, то для гравця A середнє значення виграшу дорівнює V, а для гравця B середнє значення виграшу дорівнює $(-V)$.

Вирішимо питання про **існування стратегій** p^* **та** q^* **в не строго детермінованій грі**. Тоді як при більш складних іграх знаходження оптимальних стратегій виявляється важкою задачею, вирішення цього питання у випадку не строго детермінованої гри з (2×2)-матрицею може бути отримане за наступними співвідношеннями:

$$p_1^* = \frac{d-c}{(a+d)-(b+c)}, \tag{3}$$

$$p_2^* = \frac{a-b}{(a+d)-(b+c)}, \tag{4}$$

$$q_1^* = \frac{d-b}{(a+d)-(b+c)}, \tag{5}$$

$$q_2^* = \frac{a-c}{(a+d)-(b+c)}, \tag{6}$$

$$V = \frac{ad-bc}{(a+d)-(b+c)}. \tag{7}$$

Легко перевірити, що знайдені по формулах (3)-(7) вектори p,q й число V задовольняють умовам (1), (2). У дійсності нерівності (1) та (2) у цьому простому випадку переходять у рівності. Цей факт не має місця в загальному випадку не строго детермінованих ігор, матриця яких має більше число рядків або стовпців.

Знаменник кожної з формул (3)-(7) являє собою різницю між сумами елементів по двом діагоналям.

Оскільки для не строго детермінованої гри елементи по одній діагоналі мають перевершувати елементи по іншій діагоналі, то знаменник не може звернутися в нуль.

У чисельнику дробу для V стоїть визначник

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Якщо для не строго детермінованої гри з матрицею $G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ визначник

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0,$$

то така не строго детермінована гра буде ***необразливою***.

Процедура розв'язання кінцевої парної матричної гри з нульовою сумою в загальному вигляді

З урахуванням принципу домінування чистих стратегій, а також понять строгої детермінованості й строгої не детермінованості ігор, **процедура розв'язання гри в загальному вигляді включає наступні кроки**:

1. для визначеної платіжної матриці гри проводиться її спрощення за допомогою використання принципу домінування (виключаючи доміновані та дублюючі стратегії);
2. для спрощеної матриці гри проводиться дослідження не строгої детермінованості гри за теоремою 1 та визначається метод розв'язання гри:
   - 2.1. якщо умови теореми 1 порушуються, то гра визначається строго детермінованою; для такої гри існує розв'язок у чистих стратегіях;
   - 2.2. якщо умови теореми 1 виконуються, то гра визначається не строго детермінованою; для такої гри розв'язку у чистих стратегіях не існує, але при цьому гра має розв'язок у змішаних стратегіях;
3. проводиться розрахунок нижньої та верхньої цін гри;
4. проводиться розв'язання гри.

Примітка: якщо на 1 етапі розв'язання гри проводилось спрощення матриці гри та викреслювались окремі доміновані рядки та/або стовпці матриці, то при розв'язанні гри у змішаних стратегіях потрібно неактивні стратегії з нульовою ймовірністю застосування внести до остаточної відповіді у відповідні вектори p^* та q^*.

II. Практична частина

Розглянемо застосування процедури розв'язання кінцевої парної матричної гри з нульовою сумою в загальному вигляді на наступних прикладах.

Приклад 1: Для матричної гри з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

потрібно провести спрощення платіжної матриці гри за допомогою принципу домінування та знайти розв'язок гри в чистих стратегіях (у випадку його існування).

Розв'язання:

1. Проведемо спрощення платіжної матриці A за допомогою використання принципу домінування (виключаючи доміновані та дублюючі стратегії).

Тут рядок A_1 домінує рядок A_2. Отже, викреслюємо другий домінований рядок A_2:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{1} \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця A прийме вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

В отриманій матриці стовпець B_2 домінує стовпці B_3, B_4, B_5. Отже, викреслюємо доміновані третій, четвертий та п'ятий стовпці:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{2} \\ 1 & 2 & \cancel{5} & \cancel{3} & \cancel{3} \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця A приймає остаточний вигляд, який більше вже не можна буде спростити:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Проведемо розрахунок нижньої та верхньої цін гри:

$$\begin{array}{llcl} & & \min\limits_j a_{ij} & \\ & & \| & \\ \mathrm{A} = & \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \left.\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right\} & \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 1 \\ \max\limits_i a_{ij} = & \underbrace{\begin{matrix} 4 & 2 \end{matrix}} & & \\ & \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 2 & & \end{array}$$

Тоді нижня ціна гри визначається у вигляді

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \{1 \quad 1\} = 1,$$

верхня ціна гри визначається у вигляді

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \{4 \quad 2\} = 2.$$

З аналізу матриці виграшів видно, що $\alpha < \beta$, тобто дана матриця не має сідлової точки, а, отже, потрібно шукати розв'язок гри у змішаних стратегіях.

Відповідь: оскільки $\alpha < \beta$, то розв'язку гри в чистих стратегіях не існує, потрібно шукати розв'язок гри у змішаних стратегіях.

Приклад 2: Для матричної гри з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

потрібно провести спрощення платіжної матриці гри за допомогою принципу домінування та знайти розв'язок гри в чистих стратегіях (у випадку його існування).

Розв'язання:

1. Проведемо спрощення платіжної матриці A за допомогою використання принципу домінування (виключаючи доміновані та дублюючі стратегії).

   Тут рядок A_2 домінує рядок A_3. Отже, викреслюємо третій домінований рядок A_3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 4 \\ \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{1} & \cancel{3} \end{pmatrix}.$$

   Тоді матриця A прийме вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

   В отриманій матриці стовпець B_1 домінує стовпці B_2, B_3, B_4. Отже, викреслюємо ці доміновані стовпці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{5} \\ 3 & \cancel{4} & \cancel{6} & \cancel{4} \end{pmatrix}.$$

   В отриманій матриці другий рядок домінує перший рядок. Отже, викреслюємо перший домінований рядок:

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{1} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   В результаті отримаємо остаточний вигляд платіжної матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}.$$

2. Проведемо розрахунок нижньої та верхньої цін гри.
   Оскільки залишився один елемент матриці A, то, отже він є і мінімальним елементом у рядку, і максимальним елементом у стовпці. Отже, $\alpha = 3$, $\beta = 3$.

3. Перевіримо наявність сідлової точки та визначимо метод розв'язання гри.

Оскільки $\alpha = \beta = 3$, то, отже, сідлова точка для заданої гри існує, а це означає, що гра має розв’язок у чистих стратегіях.

4. Визначення розв’язку гри у чистих стратегіях.

   Для цього визначимо набір стратегій (i_0, j_0) та ціну гри V. Порівнюючи остаточну матрицю з вихідною, можна помітити, що отриманий елемент остаточної матриці знаходиться на перетині 2-го рядка та 1-го стовпця вихідної матриці, а, отже, сідлова точка являє собою ситуацію $(i_0, j_0) = (2,1)$, а ціна гри $V = 3$.

Відповідь: $\{(i_0, j_0), V\} = \{(2,1), 3\}$ – розв'язок гри в чистих стратегіях.

Розглянемо застосування процедури визначення строгої детермінованості й не строгої детермінованості кінцевої парної матричної гри з нульовою сумою в загальному вигляді на наступних прикладах.

<u>Приклад 3:</u> Розглянемо гру з матрицею гри виду

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Потрібно перевірити, чи є гра не строго детермінованою.

Розв’язання

Перевіримо виконання умови теореми про не строго детермінованість.

Оскільки елементи головної діагоналі матриці A є більшими кожного з двох елементів допоміжної діагоналі матриці, то можна зробити висновок, що досліджувана гра не є строго детермінованою (виконується умова (б) теореми про строгу недетермінованість гри).

<u>Приклад 4:</u> Розглянемо гру з матрицею гри виду

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Потрібно перевірити, чи є гра не строго детермінованою.

Розв’язання

Перевіримо виконання умови теореми про не строго детермінованість.

Оскільки елементи головної діагоналі матриці A є меншими кожного з двох елементів допоміжної діагоналі матриці, то можна зробити висновок, що досліджувана гра не є строго детермінованою (виконується умова (а) теореми про строгу недетермінованість гри).

Розглянемо застосування процедури розв’язання кінцевої парної матричної гри з нульовою сумою в загальному вигляді на наступних прикладах.

<u>Приклад 5:</u> Нехай задана гра з (2×2)-матрицею

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Потрібно знайти розв’язок заданої гри.

Розв’язання

1. Для заданої матриці гри аналіз можливості її спрощення із використанням принципу домінування чистих стратегій.
   Оскільки у заданій матриці немає домінуючий й дублюючих рядків й стовпців, то можна зробити висновок, що провести її спрощення не можливо (матриця вже має спрощений вигляд).
2. Перевіримо, чи є ця гра строго детермінованою (в цьому випадку гра буде мати розв’язок у чистих стратегіях).

   Згідно до теореми 1, досліджувана гра не є строго детермінованою (виконується умова (а) теореми 1 про строгу недетермінованість гри: $a<b, a<c,\ d<b$ та $d<c$).
3. Знайдемо нижню й верхню ціни гри:

$$\begin{array}{ccc} & \min\limits_{\mathrm{j}} a_{ij} & \\ A=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \to & -2 \\ \to & -3 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \max\limits_{i} \min\limits_{\mathrm{j}} a_{ij} = -2 \\ \max\limits_{\mathrm{i}} a_{ij} \downarrow \quad \downarrow & & \\ \underbrace{5 \quad 4} & & \\ \min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij} = 4 & & \end{array}$$

   Отже, $\alpha=-2$ та $\beta=4$.

   Оскільки $\alpha<\beta$, то в матриці A немає сідлових точок.

   Отже, розв’язку гри в чистих стратегіях не існує, потрібно шукати розв'язок гри в змішаних стратегіях.
4. Знайдемо оптимальні змішані стратегії кожного гравця та ціну гри.

   Кожний із гравців A та B має єдину оптимальну змішану стратегію відповідно $p^*=\left(p_1^*, p_2^*\right)$ й $q^*=\left(q_1^*, q_2^*\right)$, які визначаються за формулами (3)-(6):

$$p_1^* = \frac{d-c}{(a+d)-(b+c)} = \frac{-3-5}{(-2-3)-(4+5)} = \frac{4}{7},$$

$$p_2^* = \frac{a-b}{(a+d)-(b+c)} = \frac{-2-4}{(-2-3)-(4+5)} = \frac{3}{7} = 1 - p_1^*,$$

$$q_1^* = \frac{d-b}{(a+d)-(b+c)} = \frac{-3-4}{(-2-3)-(4+5)} = \frac{1}{2},$$

$$q_2^* = \frac{a-c}{(a+d)-(b+c)} = \frac{-2-5}{(-2-3)-(4+5)} = \frac{1}{2} = 1 - q_1^*.$$

Отже, оптимальною змішаною стратегією гравця A є стратегія $p^* = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$, а оптимальною змішаною стратегією гравця B є стратегія $q^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Ціну гри підрахуємо за формулою (7):

$$V = \frac{ad-bc}{(a+d)-(b+c)} = \frac{(-2)(-3) - 4\cdot 5}{(-2-3)-(4+5)} = 1.$$

Тоді розв'язок гри – набір $\left(p^*, q^*, V\right)$, тобто $\left(\left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), 1\right)$.

<u>Відповідь</u>: $\left(\left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), 1\right)$.

<u>Приклад 6:</u> Для матричної гри з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

потрібно провести спрощення платіжної матриці гри за допомогою принципу домінування та знайти розв’язок гри.

Розв’язання:

1. Проведемо спрощення платіжної матриці A за допомогою використання принципу домінування (виключаючи доміновані та дублюючі стратегії).

   Тут рядок A_1 домінує рядок A_2. Отже, викреслюємо другий домінований рядок A_2:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 3 & 2 & 2\\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{1}\\ 1 & 2 & 5 & 3 & 3\end{pmatrix}.$$

Тоді матриця A прийме вигляд

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 3 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 5 & 3 & 3\end{pmatrix}.$$

В отриманій матриці стовпець B_2 домінує стовпці B_3, B_4, B_5. Отже, викреслюємо доміновані третій, четвертий та п'ятий стовпці:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{2}\\ 1 & 2 & \cancel{5} & \cancel{3} & \cancel{3}\end{pmatrix}.$$

Тоді матриця A приймає остаточний вигляд, який більше вже не можна спростити:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

2. Перевіримо, чи є ця гра строго детермінованою (в цьому випадку гра буде мати розв’язок у чистих стратегіях).

   Згідно до теореми 1, досліджувана гра не є строго детермінованою (виконується умова (б) теореми 1 про строгу недетермінованість гри: $a > b, a > c$, $d > b$ та $d > c$.).

3. Проведемо розрахунок нижньої та верхньої цін гри:

$$\begin{array}{cccc}
 & & \min\limits_j a_{ij} & \\
 & & \| & \\
 & A = \begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} & \left.\begin{matrix}1\\ 1\end{matrix}\right\} & \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 1\\
\max\limits_i a_{ij} = & \underbrace{4 \quad 2} & & \\
 & \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 2 & &
\end{array}$$

Тоді нижня ціна гри визначається у вигляді

$$\alpha=\max_i \alpha_i=\max_i \{1 \quad 1\}=1,$$

верхня ціна гри визначається у вигляді

$$\beta=\min_j \beta_j=\min_j \{4 \quad 2\}=2.$$

З аналізу матриці виграшів видно, що $\alpha<\beta$, тобто дана матриця не має сідлової точки, а, отже, потрібно шукати розв’язок гри у змішаних стратегіях.

4. Знайдемо оптимальні змішані стратегії кожного гравця та ціну гри.

   Кожний із гравців A та B має єдину оптимальну змішану стратегію відповідно $p^* = \left(p_1^*, p_2^*\right)$ й $q^* = \left(q_1^*, q_2^*\right)$, які визначаються за формулами (3)-(6):

$$p_1^* = \frac{d-c}{(a+d)-(b+c)} = \frac{2-1}{(4+2)-(1+1)} = \frac{1}{4},$$

$$p_2^* = \frac{a-b}{(a+d)-(b+c)} = \frac{4-1}{(4+2)-(1+1)} = \frac{3}{4} = 1 - p_1^*,$$

$$q_1^* = \frac{d-b}{(a+d)-(b+c)} = \frac{2-1}{(4+2)-(1+1)} = \frac{1}{4},$$

$$q_2^* = \frac{a-c}{(a+d)-(b+c)} = \frac{4-1}{(4+2)-(1+1)} = \frac{3}{4} = 1 - q_1^*.$$

Отже, оптимальною змішаною стратегією гравця A є стратегія $p^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, а оптимальною змішаною стратегією гравця B є стратегія $q^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$. Оскільки на 1 етапі розв’язання гри проводилось спрощення матриці гри та викреслювались домінований рядок A_2 та доміновані стовпці B_3, B_4, B_5 матриці, то при розв’язанні гри у змішаних стратегіях внесемо неактивні стратегії з нульовою ймовірністю застосування (тобто стратегії A_2, B_3, B_4, B_5) у відповідні вектори p^* та q^*. В результаті отримаємо оптимальні змішані стратегії гравців A та B в наступному вигляді:

$$p^* = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right),\ q^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0, 0\right).$$

Ціну гри підрахуємо за формулою (7):

$$V = \frac{ad-bc}{(a+d)-(b+c)} = \frac{4\cdot 2 - 1\cdot 1}{(4+2)-(1+1)} = \frac{7}{4}.$$

Тоді розв'язок гри – набір $\left(p^*, q^*, V\right)$, тобто

$$\left(\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0, 0\right), \frac{7}{4}\right).$$

<u>Відповідь</u>: $\left(\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0, 0\right), \frac{7}{4}\right)$.