Лабораторна робота 8

ГРАФОАНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ІГОР З ПЛАТІЖНОЮ МАТРИЦЕЮ РОЗМІРНІСТЮ $2\times n$ ТА $m\times 2$

Мета роботи – набути навичок розв'язання в змішаних стратегіях графоаналітичним методом кінцевої парної матричної гри з нульовою сумою з матрицею розмірністю $2\times n$ та $m\times 2$.

I. Теоретичні відомості з теми

Графоаналітичний (графічний) метод застосовується тільки до ігор, у яких хоча б один гравець має тільки 2 стратегії, тобто до ігор з матрицею гри $2\times n$ або $m\times 2$ відповідно виду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}_{2\times n};\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}_{m\times 2}.$$

Передбачається, що цей метод застосовується у випадках відсутності у грі сідлової точки.

Розглянемо гру виду $(2\times n)$

	q_1	q_2	$\cdots$	q_n
p_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
$p_2=1-p_1$	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}

Оскільки гравець *A* має тільки 2 стратегії, то, отже, $p_2=1-p_1$ (це витікає з властивості, що $\sum_{i=1}^{2} p_i=1$). При цьому $p_1\ge 0$, $p_2\ge 0$.

Очікувані виграші гравця *A*, що відповідають чистим стратегіям гравця *B*, представляються у таблиці 1.

Таблиця 1

Чисті стратегії гравця *B*	Очікувані виграші гравця *A*
1	$p_1a_{11}+(1-p_1)a_{21}=(a_{11}-a_{21})p_1+a_{21}$
2	$p_1a_{12}+(1-p_1)a_{22}=(a_{12}-a_{22})p_1+a_{22}$
…	………
n	$p_1a_{1n}+(1-p_1)a_{2n}=(a_{1n}-a_{2n})p_1+a_{2n}$

Очевидно з таблиці 1, що очікуваний виграш гравця A лінійно залежить від p_1.

Відповідно до критерію мінімакса для ігор в змішаних стратегіях гравець A повинен обирати p_1 таким чином, щоб максимізувати свій мінімальний виграш. Аналогічно, для гравця B: гравець B повинен обирати свою змішану стратегію q_1 таким чином, щоб мінімізувати свій максимальний програш.

Ця задача може бути розв'язана графічно побудовою прямих ліній, що відповідають лінійним функціям від змінної p_1 (для гравця A) або від змінної q_1 (для гравця B).

<u>Алгоритм розв'язання графоаналітичним методом кінцевої парної матричної гри з нульовою сумою</u> з матрицею $(2 \times n)$ або $(m \times 2)$:

1 *етап*. Визначення гравця, який має дві чисті стратегії.

2 *етап*. Знаходження оптимальних стратегій для гравця A та ціни гри V (якщо гравець A має 2 чисті стратегії):

2.1) Відміряємо горизонтальний відрізок [0, 1]. Через кінці відрізка проводимо два перпендикуляри. На лівому перпендикулярі як на числовій осі відкладаємо елементи першого рядка платіжної матриці. На правому перпендикулярі аналогічно відкладаємо всі елементи другого рядка платіжної матриці. Масштаб на лівому та правому перпендикулярах однаковий, хоча може не співпадати із масштабом горизонтального одиничного відрізка.

2.2) З'єднуємо відрізками кожну пару точок, що відповідають стратегії гравця B, тобто в платіжній матриці відображені у стовпцях.

2.3) Виділяємо нижню частину сімейства відрізків, яка в загальному випадку буде мати вигляд ламаної, а у частковому випадку може бути прямою.

2.4) Знаходимо на цій ламаній максимальну (найвищу) точку (точки). Абсциса цієї точки є ймовірністю p^* вибору гравцем A чистої стратегії A_2 в оптимальній змішаній стратегії $P^* = (1 - p^*, p^*)$.

3 *етап*. Знаходження оптимальних стратегій для гравця B та ціни гри V:

3.1) Відміряємо горизонтальний відрізок [0,1]. Через кінці відрізка проводимо два перпендикуляри. На лівому перпендикулярі як на числовій осі відкладаємо елементи першого стовпця платіжної матриці. На правому перпендикулярі аналогічно відкладаємо всі елементи другого стовпця платіжної матриці. Масштаб по обох перпендикулярах, знову ж таки, однаковий.

3.2) З'єднуємо відрізками кожну пару точок, що відповідають стратегії гравця A, тобто в платіжній матриці відображені у рядках. Отримуємо m відрізків.

3.3) Виділяємо верхню частину сімейства відрізків, яка в загальному випадку буде мати вигляд ламаної, а у частковому випадку може бути прямою.

3.4) Знаходимо на цій ламаній мінімальну (найнижчу) точку (точки). Абсциса мінімальної точки вказує ймовірністю q^* вибору гравцем B чистої стратегії B_2 в оптимальній змішаній стратегії $Q^* = \left(1 - q^*, q^*\right)$.

Зауваження: Якщо на початку розв'язання гри гравець B має 2 чисті стратегії, то для розв'язання гри спочатку реалізується етап 3 (будується графік для гравця B), а потім – етап 2 (будується графік для гравця A).

II. Практична частина

Розглянемо застосування процедури розв'язання графоаналітичним методом кінцевої парної матричної гри з нульовою сумою з матрицею $(2 \times n)$ або $(m \times 2)$ на наступних прикладах.

Приклад 1: Розглянемо гру, задану платіжною матрицею $2 \times n$

$$\text{Гравець } B:$$

$$\textit{Гравець } A: \quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

На площині pOy введемо систему координат і на осі Op відкладемо відрізок одиничної довжини A_1, A_2, кожній точці якого поставимо у відповідність деяку змішану стратегію гравця A $\left(p_1, 1 - p_1\right)$. Зокрема, точці $A_1(0,0)$ відповідає стратегія A_1, точці $A_2(1,0)$ – стратегія A_2 і т.д. (рисунок 1).

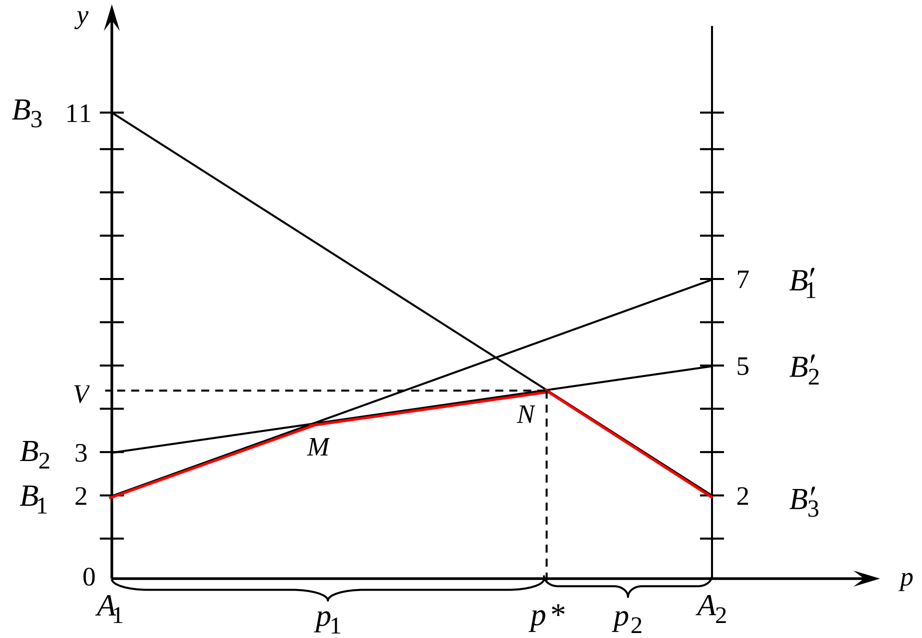

Рисунок 1

В точках A_1 и A_2 встановимо перпендикуляр та на отриманих прямих відкладатимемо виграші гравців.

На першому перпендикулярі (в даному випадку він співпадає з віссю *0y*) відкладемо виграш гравця *A* при стратегії A_1, а на другому – при стратегії A_2. Якщо гравець *A* застосує стратегію A_1, то виграє при стратегії B_1 гравця *B* – 2, при стратегії B_2 – 3, а при стратегії B_3 – 11. Числам 2, 3, 11 на осі *0x* відповідають точки B_1, B_2 та B_3.

Якщо ж гравець *A* застосує стратегію A_2, то його виграш при стратегії B_1 дорівнює 7, при B_2 – 5, а при B_3 – 2. Ці числа визначають точки B_1', B_2', B_3' на перпендикулярі, встановленому в точці A_2. З'єднуючи між собою точки B_1 та B_1', B_2 та B_2', B_3 та B_3' отримаємо три прямі, відстань до яких від осі *0p* визначає середній виграш при будь-якому поєднанні відповідних стратегій.

Наприклад, відстань від будь-якої точки відрізку B_1B_1' до осі *0p* визначає середній виграш V_1 при будь-якому поєднанні стратегій A_1A_2 (з частотами p_1 і $1-p_1$) і стратегією B_1 гравця *B*. Ця відстань дорівнює $2p_1+7\left(1-p_1\right)=V_1$. (Згадайте планіметрію і розгляньте трапецію $A_1B_1B_1'A_2$).

Таким чином, ординати точок, що належать ламаній B_1MNB_3' визначають мінімальний виграш гравця *A* при застосуванні їм будь-яких змішаних стратегій. Ця мінімальна величина є максимальною в точці *N* (тобто точка *N* визначає максимум серед мінімумів). Отже, цій точці відповідає оптимальна стратегія $p^*=\left(p_1,1-p_1\right)$, а її ордината дорівнює ціні гри V.

Координати точки *N* знаходимо як точку перетину прямих B_2B_2' та B_3B_3'. Відповідні два рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} 3p_1+5(1-p_1)=V \\ 11p_1+2(1-p_1)=V \end{cases} \Rightarrow p_1=\frac{3}{11}, \quad p_2=1-p_1=\frac{8}{11}, \quad V=\frac{49}{11}.$$

Відповідно $p^*=\left(\frac{3}{11},\frac{8}{11}\right)$, при ціні гри $V=\frac{49}{11}$.

Оскільки при виборі оптимальної стратегії ми не використали B_1, то, таким чином, ми можемо знайти оптимальну стратегію за допомогою матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, зображуватимемо графічно стратегії гравця *B* (див. рисунок 2). На площині *qOy* введемо систему координат і на осі *Oq* відкладемо відрізок одиничної довжини B_2, B_3, кожній точці якого поставимо у відповідність деяку змішану стратегію гравця *B* $\left(q_1,1-q_1\right)$. Зокрема, точці $B_2\left(0,0\right)$ відповідає стратегія B_2, точці $B_3\left(1,0\right)$ – стратегія B_3.

Далі діємо аналогічно випадку, розглянутому для гравця *A* з урахуванням того факту, що гравець *B* прагне мінімізувати свій максимальний програш.

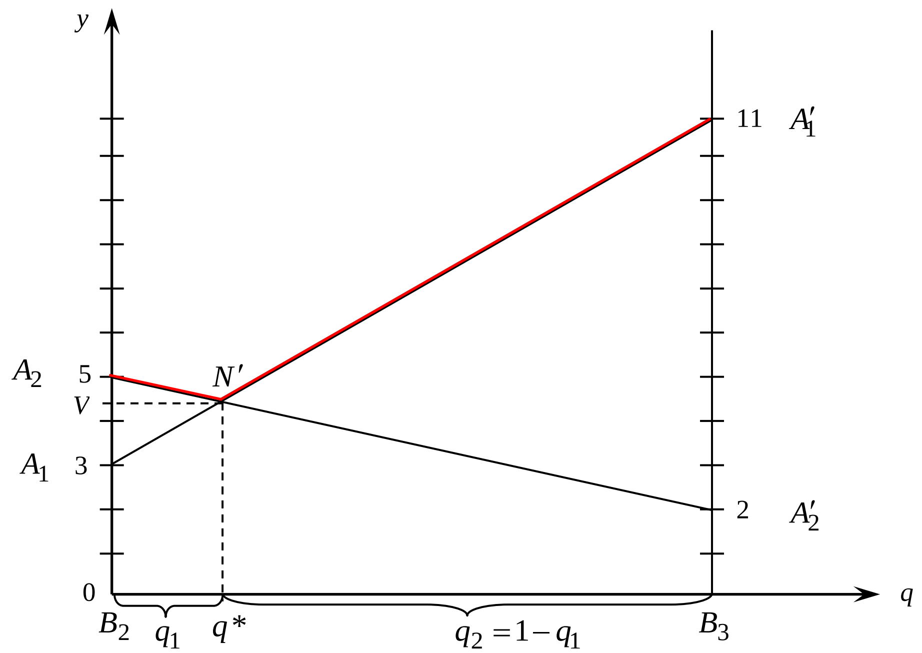

Рисунок 2

Оптимальні стратегії для гравця *B* можна знайти з системи рівнянь

$$\begin{cases} 3q_1 + 11(1-q_1) = V \\ 5q_1 + 2(1-q_1) = V \end{cases} \Rightarrow q_1 = \frac{9}{11}, \quad q_2 = 1 - q_1 = \frac{2}{11}, \quad V = \frac{49}{11}$$

та, відповідно, $q^* = \left(0, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right)$.

З рисунку видно, що стратегія B_1 не увійде до оптимальної стратегії.

Отже, розв'язок гри має вигляд:

- для гравця *A*: $\left(\left(\frac{3}{11}, \frac{8}{11}\right), \frac{49}{11}\right)$;
- для гравця *B*: $\left(\left(0, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right), \frac{49}{11}\right)$,

і, отже, загальний розв'язок гри запишеться у вигляді

$$\left(p^*, q^*, V\right) = \left(\left(\frac{3}{11}, \frac{8}{11}\right), \left(0, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right), \frac{49}{11}\right).$$

Відповідь: Розв'язок гри з матрицею A:

$$\left(\left(\frac{3}{11}, \frac{8}{11}\right), \left(0, \frac{9}{11}, \frac{2}{11}\right), \frac{49}{11}\right).$$

Приклад 2: Розглянемо гру, задану платіжною матрицею

$$
\begin{array}{cc}
 & \textit{Гравець}\,B: \\
 & \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 6 \\ 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \\
\end{array}
$$

$\textit{Гравець}\,A:$

На площині qOy введемо систему координат і на осі Oq відкладемо відрізок одиничної довжини B_1, B_2, кожній точці якого поставимо у відповідність деяку змішану стратегію гравця B $(q_1, 1-q_1)$. Зокрема, точці $B_1(0,0)$ відповідає стратегія B_1, точці $B_2(1,0)$ – стратегія B_2 (див. рисунок 3).

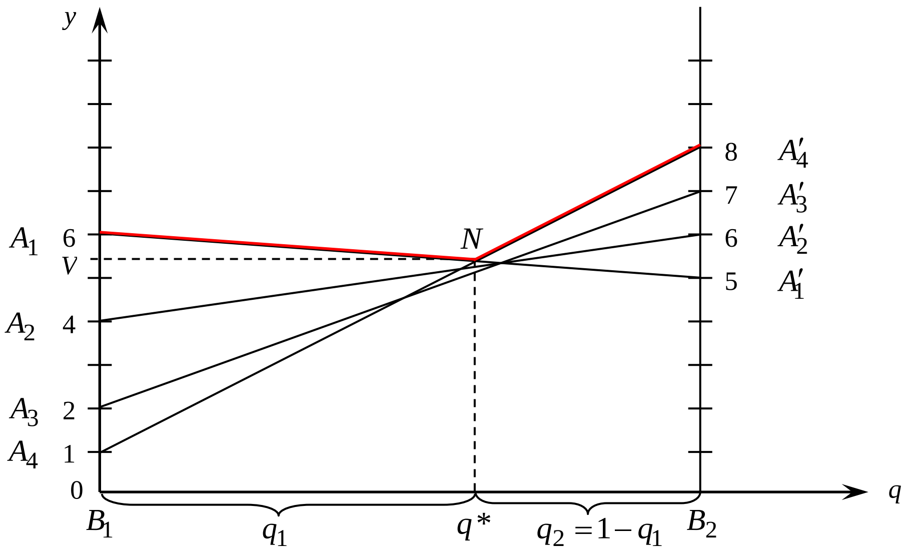

Рисунок 3

У точках B_1 і B_2 встановимо перпендикуляр і на отриманих прямих відкладатимемо виграш гравців.

На першому перпендикулярі (в даному випадку він співпадає з віссю $0y$) відкладемо виграш гравця B при стратегії B_1, а на другому – при стратегії B_2. Якщо гравець B застосує стратегію B_1, то виграє при стратегії A_1 гравця A – 6, при стратегії A_2 – 4, при стратегії A_3 – 2, а при стратегії A_4 – 1. Числам 6, 4, 2, 1 на осі $0y$ відповідають точки A_1, A_2, A_3 і A_4 .

Якщо ж гравець B застосує стратегію B_2, то його виграш при стратегії A_1 дорівнює 5, при A_2 – 6, при A_3 – 7, а при A_4 – 8. Ці числа визначають точки A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 на перпендикулярі, встановленому в точці B_2.

З'єднуючи між собою точки A_1 та A'_1, A_2 та A'_2, A_3 та A'_3, A_4 та A'_4, отримаємо чотири прямі, відстань до яких від осі $0q$ визначає середній виграш при будь-якому поєднанні відповідних стратегій.

Наприклад, відстань від будь-якої точки відрізку A_1A_1' до осі $0q$ визначає середній виграш V_1 при будь-якому поєднанні стратегій B_1B_2 (з частотами q_1 і $1-q_1$) і стратегією г A_1 гравця *A*. Ця відстань дорівнює $6q_1+5(1-q_1)=V_1$. (Згадайте планіметрію і розгляньте трапецію $B_1A_1A_1'B_2$).

Таким чином, ординати точок, що належать ламаній A_1NA_4', визначають максимальний програш гравця *B* при застосуванні їм будь-яких змішаних стратегій. Ця максимальна величина є мінімальною в точці N (тобто точка N визначає мінімум серед максимумів). Отже, цій точці відповідає оптимальна стратегія $q^*=(q_1,1-q_1)$, а її ордината дорівнює ціні гри V.

Координати точки N знаходимо як точку перетину прямих A_1A_1' і A_4A_4'. Відповідні два рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} 6q_1+5(1-q_1)=V \\ q_1+8(1-q_1)=V \end{cases} \Rightarrow q_1=\frac{3}{8}, \quad q_2=1-q_1=\frac{5}{8}, \quad V=\frac{43}{8}.$$

Отже $q^*=\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right)$, при ціні гри $V=\frac{43}{8}$.

Оскільки при виборі оптимальної стратегії ми не використали A_2 і A_3, то, таким чином, ми можемо знайти оптимальну стратегію за допомогою матриці

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, зображуватимемо графічно стратегії гравця *A* (див. рисунок 4). На площині pOy введемо систему координат і на осі Op відкладемо відрізок одиничної довжини A_1, A_4, кожній точці якого поставимо у відповідність деяку змішану стратегію гравця A $(p_1,1-p_1)$. Зокрема, точці $A_1(0,0)$ відповідає стратегія A_1, точці $A_4(1,0)$ – стратегія A_4. Далі діємо аналогічно випадку, розглянутому для гравця *B*, з урахуванням того факту, що гравець *A* прагне максимізувати свій мінімальний виграш.

Оптимальні стратегії для гравця *A* можна знайти з системи рівнянь

$$\begin{cases} 6p_1+1(1-p_1)=V \\ 5p_1+8(1-p_1)=V \end{cases} \Rightarrow p_1=\frac{7}{8}, \quad p_2=1-p_1=\frac{1}{8}, \quad V=\frac{43}{8}$$

та, отже, $p^*=\left(\frac{7}{8},0,0,\frac{1}{8}\right)$.

З рисунка 4 видно, що стратегії A_2 і A_3 не увійдуть до оптимальної стратегії.

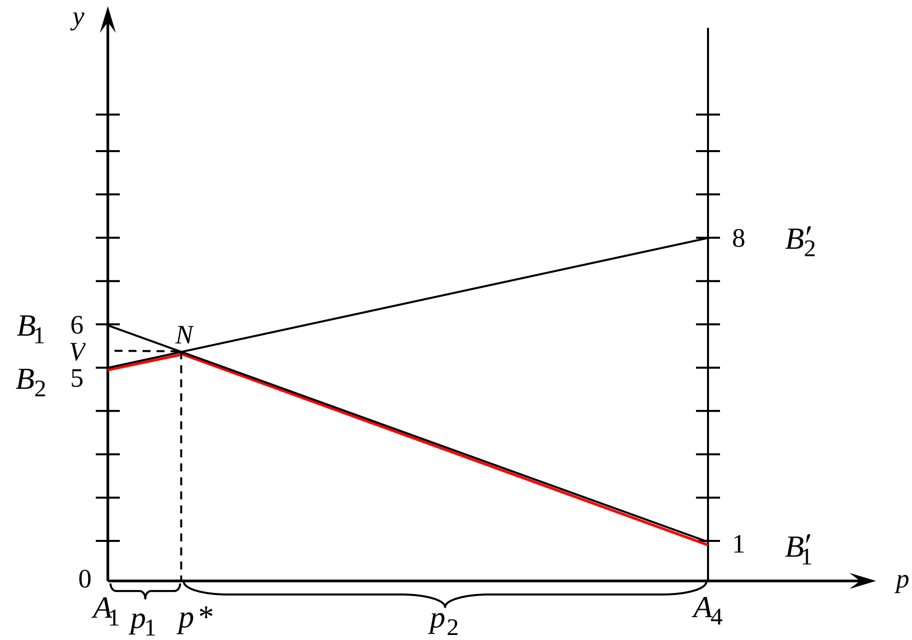

Рисунок 4

Отже, рішення гри має вигляд:

- для гравця *A*: $\left(\left(\frac{7}{8},0,0,\frac{1}{8}\right),\frac{43}{8}\right)$;
- для гравця *B*: $\left(\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right),\frac{43}{8}\right)$,

отже, загальний розв'язок гри запишеться у виді

$$\left(p^*,q^*,V\right)=\left(\left(\frac{7}{8},0,0,\frac{1}{8}\right),\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right),\frac{43}{8}\right).$$

<u>Відповідь</u>: Розв'язок гри з матрицею A:

$$\left(\left(\frac{7}{8},0,0,\frac{1}{8}\right),\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right),\frac{43}{8}\right).$$