Лабораторна робота 9

ЗВЕДЕННЯ МАТРИЧНОЇ ГРИ ДО ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Мета роботи – набути навичок зведення матричної гри до задачі лінійного програмування.

I. Теоретичні відомості з теми

Нехай є матрична гра з матрицею $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

Позначимо:

$p^* = (p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_m)$ – оптимальна змішана стратегія гравця А;

$q^* = (q_1, \ldots, q_j, \ldots, q_n)$ – оптимальна змішана стратегія гравця В.

Стратегія p^* гравця А гарантує йому виграш (за теоремою 3), не менший ціни гри V, незалежно від вибору стратегії B_j гравцем В.

Це можна записати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \ge V, \quad j = \overline{1,n}, \tag{1}$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1, \quad p_i \ge 0. \tag{2}$$

Аналогічно, стратегія q^* гравця В гарантує йому програш, не більший ціни гри V, незалежно від вибору стратегії A_i гравцем А, тобто:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le V, \quad i = \overline{1,m}, \tag{3}$$

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1, \quad q_j \ge 0. \tag{4}$$

Оскільки елементи платіжної матриці відповідно до теореми 5 можна завжди зробити позитивними, то і ціна гри $V > 0$.

Перетворимо системи (1) і (3), розділивши обидві частини кожного нерівності на додатне число V:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{a_{ij} p_i}{V} \ge 1, \quad j = \overline{1,n},$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij} q_j}{V} \le 1, \quad i = \overline{1,m},$$

Введемо нові позначення

$$\begin{cases} \dfrac{p_i}{V} = x_i \ , \quad i = \overline{1, m} \ , \\ \dfrac{q_j}{V} = y_j \ , \quad j = \overline{1, n} \ , \end{cases}$$

при підстановці яких в (1)-(4) отримуємо 2 системи:

$$\text{а)} \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge 1, \quad j = \overline{1, n}, & (5) \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \dfrac{1}{V}, \quad x_i \ge 0, \quad i = \overline{1, m}. & (6) \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1, \quad i = \overline{1, m}, & (7) \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \dfrac{1}{V}, \quad y_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}. & (8) \end{cases}$$

У разі а) перший гравець прагне знайти такі значення x_i та, отже, p_i, щоб ціна гри V була максимальною. Тому рішення першої задачі зводиться до знаходження таких невід'ємних значень p_i $(i = \overline{1, m})$, при яких

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \to \min .$$

Аналогічно, у випадку б) другий гравець прагне знайти такі значення y_j та, отже, q_j, щоб ціна гри V була найменшою. Тому рішення другої задачі зводиться до знаходження таких невід'ємних значень q_j, при яких

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \to \max .$$

Отже, фактично в (6) і (8) ми отримуємо цільові функції відповідно для систем (5) і (7):

$$\text{а)} \quad f(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{V} \to \min , \tag{9}$$

$$\text{б)} \quad f(y) = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \frac{1}{V} \to \max . \tag{10}$$

Таким чином, ми отримали двоїсті одна одній задачі лінійного програмування:

$$\text{а)} \quad f(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{V} \to \min ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge 1, \quad j = \overline{1, n}, \tag{11}$$

$$x_i \ge 0$$

б) $f(y) = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \dfrac{1}{V} \to \max.$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1, \quad i = \overline{1,m}, \tag{12}$$

$$y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Розв'язавши пару взаємо двоїстих симетричних задач (11) та (12), знайдемо

$$V = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i^*} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} y_j^*}; \qquad p_i = V \cdot x_i^* \ \left(i = \overline{1,m}\right), \quad q_j = V \cdot y_j^* \ \left(j = \overline{1,n}\right),$$

за допомогою яких визначаємо рішення гри

$$\left(p^*, q^*, V\right) = \left(\left(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_m\right), \left(q_1, \ldots, q_j, \ldots, q_n\right), V\right).$$

II. Практична частина

Розглянемо зведенння матричної гри до задачі лінійного програмування на наступному прикладі.

Приклад 1: Знайти рішення гри, яка визначається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

Перевіримо гру на наявність сідлової точки:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}$$

$$\begin{array}{ccc} & A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \Rightarrow \alpha = \max_i \alpha_i = 1 \\ \beta_j = \max_i a_{ij} & \begin{array}{ccc} 3 & 4 & 3 \end{array} & \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\beta = \min_j \beta_j = 3$$

Отже, $\alpha \le V \le \beta$, тобто $1 \le V \le 3$.

Оскільки $\alpha \ne \beta$, то рішення гри потрібно шукати в змішаних стратегіях.

Складемо задачі лінійного програмування (ЗЛП) для кожного гравця:

для гравця A:

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + 4x_2 \ge 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

для гравця B:

$$f(y) = y_1 + y_2 + y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + 2y_3 \le 1 \\ y_1 + 4y_2 + 3y_3 \le 1 \\ y_1 \ge 0, \ \ y_2 \ge 0, \ \ y_3 \ge 0 \end{cases}$$

Приведемо їх до канонічного вигляду:

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_5 = 1 \\ x_i \ge 0, \ \ i = \overline{1,5} \end{cases}$$

$$f(y) = y_1 + y_2 + y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 = 1 \\ y_1 + 4y_2 + 3y_3 + y_5 = 1 \\ y_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,5} \end{cases}$$

При приведенні до канонічної формі з'являються додаткові змінні x_3, x_4, x_5, y_4, y_5. Для встановлення взаємозв'язків між ними подумки впишемо їх у вихідну матрицю:

$$\begin{array}{cccc} A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} y_4 & 0 \\ 0 & y_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_3 & 0 & 0 \\ 0 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & x_5 \end{matrix} & \end{array}$$

Встановлюючи взаємозв'язки між змінними прямої та двоїстої до неї задачі, отримаємо наступні:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix}$$

Знаючи взаємозв'язки між змінними, достатньо розв'язати одну з задач. Наприклад, розв'язуємо задачу з y-ками.

Для розв'язання цієї задачі скористаємося симплекс-методом.

Бз	Вб	В	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
			1	1	1	0	0
y_4	0	1	3	1	2	1	0
y_5	0	1	1	4	3	0	1
ЦФ		0	-1	-1	-1	0	0

Бз	Вб	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
			1	1	1	0	0
y_1	1	1/3	1	1/3	2/3	1/3	0
y_5	0	2/3	0	11/3	7/3	-1/3	1
ЦФ		1/3	0	-2/3	-1/3	1/3	0

Бз	Вб	B	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
			1	1	1	0	0
y_1	1	3/11	1	0	5/11	4/11	-1/11
y_2	1	2/11	0	1	7/11	-1/11	3/11
ЦФ		5/11	0	0	1/11	3/11	2/11

Таким чином, отримали оптимальний план:

$$y^* = \left(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, y_5^*\right) = \left(\frac{3}{11}, \frac{2}{11}, 0, 0, 0\right)$$

$$f\left(y^*\right) = \frac{5}{11}$$

Відповідно до встановлених зв'язків між додатковими змінними, маємо:

$$x^* = \left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*\right) = \left(\frac{3}{11}, \frac{2}{11}, 0, 0, \frac{1}{11}\right)$$

$$f\left(x^*\right) = \frac{5}{11}$$

Тоді знаходимо:

$$V = \frac{1}{f\left(x^*\right)} = \frac{1}{f\left(y^*\right)} = \frac{11}{5};$$

$p_i = V \cdot x_i^* \quad \left(i = \overline{1,2}\right)$, $\qquad q_j = V \cdot y_j^* \quad \left(j = \overline{1,3}\right)$,

$$\begin{cases} p_1 = \frac{11}{5} \cdot \frac{3}{11} = \frac{3}{5} \\ p_2 = \frac{11}{5} \cdot \frac{2}{11} = \frac{2}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1 = \frac{11}{5} \cdot \frac{3}{11} = \frac{3}{5} \\ q_2 = \frac{11}{5} \cdot \frac{2}{11} = \frac{2}{5} \\ q_3 = \frac{11}{5} \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

Тоді: $p^* = \left(p_1, p_2\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $\quad q^* = \left(q_1, q_2, q_3\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$.

Відповідь: Рішення гри з матрицею А: $\left(p^*, q^*, V\right) = \left(\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right), \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0\right), \frac{11}{5}\right)$

<u>Приклад 2:</u> Знайти рішення гри, яка визначається матрицею.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

Щоб не мати справу з матрицею, в якій є від'ємні елементи, скористаємося теоремою 5: додамо до кожного елементу матриці число 5 та отримаємо матрицю виду

$$A' = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Ціна гри отриманої матриці відповідно до теореми 5 збільшиться на 5 одиниць (тобто $V' = V + 5$), а оптимальні змішані стратегії $p*$ та $q*$ залишаться незмінними.

Перевіримо гру на наявність сідлової точки:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right. \Rightarrow \alpha = \max_i \alpha_i = 2$$

$$\beta_j = \max_i a_{ij} \qquad 9 \quad 9 \quad 11$$

$$\Downarrow$$

$$\beta = \min_j \beta_j = 9$$

Отже, $\alpha \le V \le \beta$, тобто $2 \le V \le 9$.

Оскільки $\alpha \ne \beta$, то рішення гри потрібно шукати в змішаних стратегіях.

Складемо задачі лінійного програмування (ЗЛП) для кожного гравця:

для гравця А:

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 9x_3 \ge 1 \\ 2x_1 + 9x_2 \ge 1 \\ 9x_1 + 11x_3 \ge 1 \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

для гравця В:

$$f(y) = y_1 + y_2 + y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 7y_1 + 2y_2 + 9y_3 \le 1 \\ 2y_1 + 9y_2 \le 1 \\ 9y_1 + 11y_3 \le 1 \\ y_1 \ge 0,\ \ y_2 \ge 0,\ \ y_3 \ge 0 \end{cases}$$

Приводимо їх до канонічного вигляду:

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 9x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_5 = 1 \\ 9x_1 + 11x_3 - x_6 = 1 \\ x_i \ge 0,\ \ i = \overline{1,6} \end{cases}$$

$$f(y) = y_1 + y_2 + y_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 7y_1 + 2y_2 + 9y_3 + y_4 = 1 \\ 2y_1 + 9y_2 + y_5 = 1 \\ 9y_1 + 11y_3 + y_6 = 1 \\ y_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,6} \end{cases}$$

При приведенні до канонічної формі з'являються додаткові змінні $x_4, x_5, x_6, y_4, y_5, y_6$. Для встановлення взаємозв'язків між ними подумки впишемо їх у вихідну матрицю:

$$A = \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{pmatrix} & \begin{array}{ccc} y_4 & 0 & 0 \\ 0 & y_5 & 0 \\ 0 & 0 & y_6 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} x_4 & 0 & 0 \\ 0 & x_5 & 0 \\ 0 & 0 & x_6 \end{array} & \end{array}$$

Встановлюючи взаємозв'язки між змінними прямої та двоїстої до неї задачі, отримаємо наступні:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$$

Знаючи взаємозв'язки між змінними, достатньо розв'язати одну з задач. Наприклад, розв'язуємо задачу з *y*-ками.

Для розв'язання цієї задачі скористаємося симплекс-методом.

Бз	Вб	В	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
			1	1	1	0	0	0
y_4	0	1	7	2	9	1	0	0
y_5	0	1	2	9	0	0	1	0
y_6	0	1	9	0	11	0	0	1
ЦФ		0	-1	-1	-1	0	0	0

Бз	Вб	В	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
			1	1	1	0	0	0
y_4	0	2/9	0	2	4/9	1	0	-7/9
y_5	0	7/9	0	9	-22/9	0	1	-2/9
y_1	1	1/9	1	0	11/9	0	0	1/9
ЦФ		1/9	0	-1	2/9	0	0	1/9

Бз	Вб	В	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
			1	1	1	0	0	-59/81
y_4	0	4/81	0	0	80/81	1	-2/9	-2/81
y_2	1	7/81	0	1	-22/81	0	1/9	1/9
y_1	1	1/9	1	0	11/9	0	0	1
ЦФ		16/81	0	0	-4/81	0	1/9	7/81

Бз	Вб	В	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
			1	1	1	0	0	0
y_3	1	1/20	0	0	1	81/80	-9/40	-59/80
y_2	1	1/10	0	1	0	11/40	1/20	-9/40
y_1	1	1/20	1	0	0	-99/80	11/40	81/80
ЦФ		1/5	0	0	0	1/20	1/10	1/20

Таким чином, отримали оптимальний план:

$$y^* = \left(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, y_5^*, y_6^*\right) = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, 0,0,0\right)$$

$$f\left(y^*\right) = \frac{1}{5}$$

Відповідно до встановлених зв'язків між додатковими змінними, маємо:

$$x^* = \left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*\right) = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, 0,0,0\right)$$

$$f\left(x^*\right) = \frac{1}{5}$$

Тоді знаходимо:

$$V' = \frac{1}{f\left(x^*\right)} = \frac{1}{f\left(y^*\right)} = 5;$$

$$p_i = V' \cdot x_i^* \ \left(i=\overline{1,3}\right), \qquad q_j = V' \cdot y_j^* \ \left(j=\overline{1,3}\right),$$

$$\begin{cases} p_1 = 5 \cdot \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{4} \\ p_2 = 5 \cdot \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{2} \\ p_3 = 5 \cdot \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1 = 5 \cdot \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{4} \\ q_2 = 5 \cdot \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{2} \\ q_3 = 5 \cdot \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Тоді: $p^* = (p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $q^* = (q_1, q_2, q_3) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Отже, рішення гри з матрицею A':

$$\left(p^*, q^*, V'\right) = \left(\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), 5\right)$$

Відповідь: Рішення гри з матрицею A (у якій $V = V' - 5$):

$$\left(p^*, q^*, V\right) = \left(\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), 0\right)$$