

Лабораторна робота 10

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ІГОР В ЗМІШАНИХ СТРАТЕГІЯХ

Мета роботи – набути навичок розв'язання кінцевої парної матричної гри з нульовою сумою в змішаних стратегіях чисельним методом Брауна-Робінсон.

I. Теоретичні відомості з теми

Метод Брауна-Робінсон є одним з найпростіших чисельних методів розв'язання ігор та полягає в послідовній процедурі «зближення» верхньої і нижньої ціни гри із заданою точністю.

Ідея методу полягає в наступному:

Розігрується «уявний експеримент», у якому сторони A і B по черзі застосовують один проти одного свої стратегії

$$\begin{aligned} A: A_1, A_2, \dots, A_m &\Rightarrow A_i \quad (i = \overline{1, m}), \\ B: B_1, B_2, \dots, B_n &\Rightarrow B_j \quad (j = \overline{1, n}), \end{aligned}$$

прагнучи виграти побільше (для гравця A) і програти поменше (для гравця B).

Експеримент складається з ряду «партій» гри.

Починається він з того, що один з гравців (скажімо, A) вибирає довільно одну зі своїх стратегій A_i . Противник (B) відповідає йому тією зі своїх стратегій B_j , яка є найгіршою для A , тобто звертає його виграш при стратегії A_i в мінімум.

Далі знову черга гравця A – він відповідає B тією своєю стратегією A_k , яка дає максимальний виграш при стратегії B_j противника.

Далі – знову черга противника. Він відповідає нам тією своєю стратегією, яка є найгіршою не для останньої, застосованої нами, стратегії A_k , а для **змішаної стратегії**, в якій досі застосовані стратегії A_i , A_k зустрічаються з рівними ймовірностями.

І так далі: на кожному кроці ітераційного процесу кожен гравець відповідає на черговий хід іншого *тією своєю стратегією, яка є оптимальною для нього щодо змішаної стратегії іншого, в яку всі застосовані до сих пір стратегії входять пропорційно частотам їх застосування.*

Замість того, щоб обчислювати кожен раз середній виграш, можна користуватися просто «накопиченим» за попередні ходи виграшем та вибирати ту свою стратегію, при якій цей накопичений виграш є максимальним (мінімальним).

Доведено, що такий метод сходиться: при збільшенні числа «партій» середній виграш на одну партію буде наближатися до ціни гри, а частоти застосування стратегій – до їх ймовірностей в оптимальних змішаних стратегіях гравців, тобто

$$p_i = \frac{N(i)}{K}, \quad q_j = \frac{N(j)}{K}.$$

де $N(i), N(j)$ – число номерів i або j , які співпали та були обрані в даній партії стратегій гравців A і B відповідно;

K – загальне число ходів (партій).

II. Практична частина

Розглянемо застосування процедури розв'язання кінцевої парної матричної гри з нульовою сумою чисельним методом Брауна-Робінсон на наступному прикладі.

Приклад: Розглянемо гру з матрицею 3×3 :

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3
A_1	2	-3	4
A_2	-3	4	-5
A_3	4	-5	6

Щоб не мати справу з матрицею, в якій є від'ємні елементи, скористаємося теоремою 5: додамо до кожного елементу матриці число 5 та отримаємо матрицю виду

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3
A_1	7	2	9
A_2	2	9	0
A_3	9	0	11

Ціна гри отриманої матриці відповідно до теореми 5 збільшиться на 5 одиниць.

Розв'язання гри:

1 хід: Гравець A обирає довільно стратегію з A_i , наприклад, стратегію A_3 з виграшами, що дорівнюють

$$\{9, 0, 11\}.$$

2 хід: Противник B відповідає йому тією зі своїх стратегій B_j , яка є найгіршою для гравця A , тобто звертає виграш гравця A в мінімум при обраній ним стратегії A_3 , тобто

$$\min \{9, 0, 11\} = 0$$

відповідає стратегії B_2 гравця B .

Відповідно до обраної стратегії B_2 виграш гравця B складає $\{2, 9, 0\}$.

3 хід: Гравець A відповідає йому тією зі своїх стратегій A_k , яка дає максимальний виграш при обраній стратегії B_2 гравця B , тобто

$$\max \{2, \bar{9}, 0\} = 9,$$

що відповідає стратегії A_2 гравця A з виграшем

$$\{2, 9, 0\}.$$

4 хід: Гравець B відповідає стратегією B_j , яка дає мінімальний виграш гравцю A , але не для останньої застосованої нами стратегії A_k , а для змішаної стратегії, в якій стратегії A_i та A_k зустрічаються з рівними ймовірностями ($p_i = p_k$).

і т.д.

У таблиці 2 наведені перші 15 кроків ітераційного процесу за методом Брауна-Робінсон (розрахунки можна і продовжити).

Позначимо:

k – номер партії (пари виборів);

i – номер обраної в даній партії стратегії гравця A ;

j – номер обраної в даній партії стратегії гравця B ;

\underline{v} – нижня оцінка ціни гри;

\bar{v} – верхня оцінка ціни гри;

v^* – середнє арифметичне між \underline{v} та \bar{v} ;

A_1, A_2, A_3 та B_1, B_2, B_3 – накопичений виграш гравця B та A відповідно за k партій.

Згідно таблиці 2, в першому стовпці наданий номер партії (пари виборів) k , у другому – номер i обраної в даній партії стратегії гравця A .

У наступних трьох стовпцях – «накопичений виграш» за перші k партій при тих стратегіях, які застосовували гравці в попередніх партіях та при стратегіях B_1, B_2, B_3 гравця B в даній партії (виходить додаванням елементів відповідного рядка до того, що було рядком вище).

Таблиця 2

k	i	Виграш гравця A , який платить йому гравець B			j	Виграш гравця B , який платить йому гравець A			\underline{v}	\bar{v}	Наближена оцінка гри v^*
		B_1	B_2	B_3		A_1	A_2	A_3			
1	3	9	0	11	2	2	9	0	0	9	4,5
2	2	11	9	11	2	4	18	0	4,5	9	6,75
3	2	13	18	11	3	13	18	11	3,67	6	4,84
4	2	15	27	11	3	22	18	22	2,75	5,50	4,13
5	1	22	29	20	3	31	18	33	4,00	6,60	5,30
6	3	31	29	31	2	33	27	33	4,84	5,50	5,17
7	1	38	31	40	2	35	36	33	4,43	5,14	4,79
8	2	40	40	40	2	37	45	33	5,00	5,61	5,30
9	2	42	49	40	3	46	45	44	4,45	5,11	4,78
10	1	49	51	49	1	53	47	53	4,90	5,30	5,10
11	3	58	51	60	2	55	56	53	4,64	5,09	4,87
12	2	60	60	60	2	57	65	53	5,00	5,41	5,20
13	2	62	69	60	3	66	65	64	4,61	5,07	4,84
14	1	69	71	69	1	73	67	73	4,93	5,21	5,07
15	3	78	71	80	2	75	76	73	4,74	5,06	4,90

З цих накопичених виграшів в таблиці 2 підкреслять мінімальний (якщо їх декілька, підкреслюються всі). Підкреслене число визначає відповідний вибір гравця B в даній партії – він обирає ту стратегію, яка відповідає підкресленому числу (якщо їх декілька, береться будь-яка). Таким чином, визначається номер j оптимальної (в даній партії) стратегії B (ставиться в наступному стовпці).

У наступних трьох стовпцях подається накопичений виграш за k партій відповідно при стратегіях A_1 , A_2 , A_3 гравця A (виходить додаванням елементів стовпця B_j до того, що було рядком вище). З цих значень в таблиці 2 «надкреслене» максимальне значення. Воно визначає вибір стратегії гравця A в наступній партії (рядком нижче).

В останніх трьох стовпцях таблиці 2 подані: \underline{v} – нижня оцінка ціни гри, що дорівнює мініальному накопиченому виграшу, поділеному на число партій k ; \bar{v} – верхня оцінка ціни гри, що дорівнює максимальному накопиченому виграшу, поділеному на k ; v^* – середнє арифметичне між ними (воно слугує кращою, ніж нижня та верхня, наближеною оцінкою ціни гри).

Як видно, величина v^* незначно коливається навколо ціни гри $v = 5$ (див. рис. 1).

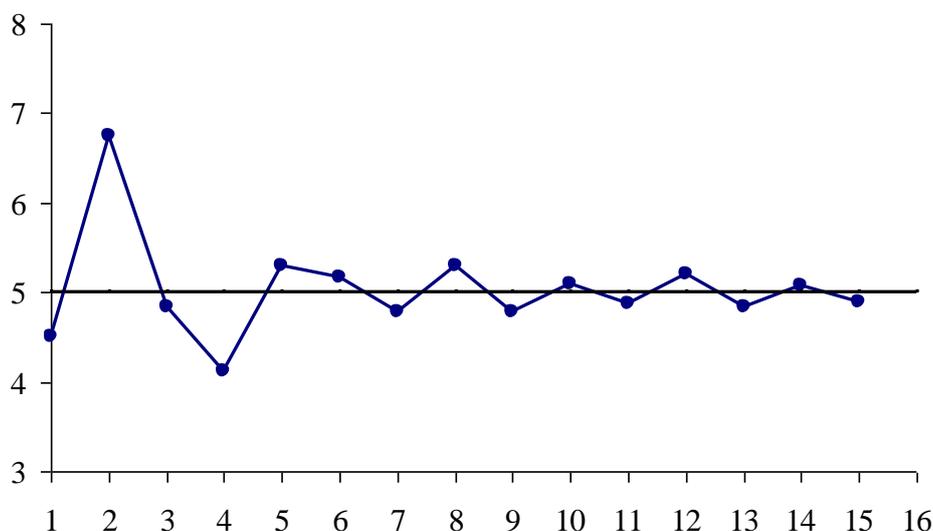


Рисунок 1 – Графічне зображення збіжності ціни гри v^* до ціни гри $v = 5$

Підрахуємо за таблицею 2 частоти $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3$ стратегій гравців:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 &= 4/15 \approx 0,266, & \tilde{p}_2 &= 7/15 \approx 0,468, & \tilde{p}_3 &= 4/15 \approx 0,266, \\ \tilde{q}_1 &= 2/15 \approx 0,133, & \tilde{q}_2 &= 8/15 \approx 0,534, & \tilde{q}_3 &= 5/15 \approx 0,333, \end{aligned}$$

що не так вже сильно відрізняється від ймовірностей для першої, другої й третьої стратегій відповідно, отриманих іншими методами, наприклад, за допомогою методів лінійного програмування:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{4} = 0,25, & p_2 &= \frac{1}{2} = 0,5, & p_3 &= \frac{1}{4} = 0,25, \\ q_1 &= \frac{1}{4} = 0,25, & q_2 &= \frac{1}{2} = 0,5, & q_3 &= \frac{1}{4} = 0,25. \end{aligned}$$

Такі порівняно хороші наближення ми отримали вже при 15 ітераціях. На жаль, далі процес наближень буде йти не так жваво. Збіжність методу Брауна-Робінсон, як показує досвід, є дуже повільною.

Дуже важливою перевагою ітераційного методу розв'язання ігор є те, що його трудомісткість порівняно повільно зростає зі збільшенням розмірності гри $m \times n$, тоді як трудомісткість методів лінійного програмування зростає при збільшенні розмірності задачі набагато швидше.