Постановка задачі інтерполяції

При розв'язанні багатьох практичних задач, що виникають у різних областях, постає необхідність у використанні теорії наближення функцій або теорії апроксимації функцій.

Суть задачі апроксимації така. Нехай дана деяка невідома в аналітичному сенсі функція $y = f(x)$ і відома лише її поведінка (наприклад, дискретні значення в точках $f(x_i)$) на певному відрізку $[a,b]$. Таку функцію надалі будемо називати апроксимованою функцією. Треба побудувати іншу функцію $y = F(x)$, апроксимуючу функцію, яка б була близька до функції $y = f(x)$ з певною похибкою. При цьому потрібне виконання таких вимог: наявність дискретних значень функції $y_i = f(x_i)$; визначення класу апроксимуючих функцій, з яких конструюється функція $y = F(x)$; вид критерію згоди між функціями $y = f(x)$ і $y = F(x)$; оцінка похибки апроксимації.

Вид функції $y = F(x)$ залежить від класу розв'язуваних задач. Наприклад, при дослідженні напружено-деформованого стану методом скінченних елементів у задачах механіки деформованого тіла апроксимуючі функції представляються комбінацією функцій $1, x, \ldots, x^n$, або сплайнами. Експонентні функції мають широке застосування у фізиці при вивченні явищ типу розпаду і нагромадження, а тригонометричні функції – у механіці при коливальних процесах.

Критерій згоди або близькості апроксимованої й апроксимуючої функцій визначається з умови мінімуму відстаней між ними. Наприклад, найпоширенішим критерієм є критерій Чебишева:

$$\rho = \max_{0 \le i \le n} \left| f(x_i) - F(x_i) \right| \to \min \to 0 \ .$$

Інший критерій може бути записаний у вигляді:

$$\rho = \sum_{i=0}^{n} \left[f(x_i) - F(x_i) \right]^2 \to \min \ .$$

Метод апроксимації, заснований на другому критерії, має назву методу найменших квадратів.

Якщо при використанні критерію Чебишева прийняти $\rho = 0$, то це буде означати, що значення апроксимованої й апроксимуючої функцій у вузлових точках відрізка $[a,b]$ збігаються. Цей спосіб апроксимації називається інтерполюванням або інтерполяцією.

Питання оцінки похибки апроксимації безумовно залежать від попередніх трьох вимог і розглядаються окремо для конкретного процесу апроксимації.

Наближене відновлення функції за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа

Нехай відомі значення деякої функції f в $n+1$ різних точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Введемо позначення:

$$f_i = f(x_i), \quad i = 0,1,\ldots,n.$$

Наприклад, ці значення отримані з експерименту чи знайдені за допомогою досить складних обчислень.

Виникає задача наближеного відновлення функції f в довільній точці x. Часто для розв'язання цієї задачі будується алгебраїчний многочлен $L_n(x)$ степені n, що у точках x_i приймає задані значення, тобто

$$L_n(x_i) = f_i \quad (i = 0,1,\ldots,n),$$

і називається інтерполяційним. Точки x_i $(i = 0,1,..n)$ називаються вузлами інтерполяції.

Наближене відновлення функції f за формулою

$$f(x) \approx L_n(x)$$

називається інтерполяцією функції f. Якщо x розташований поза мінімальним відрізком, що містить усі вузли інтерполяції, то заміну функції f за зазначеною формулою називають також екстраполяцією.

Приклад. Нехай задані такі значення функції $f(x)$: $f(1) = 4$, $f(2) = 2$, $f(3) = 4$, $f(4) = 16$.

Для заданої таблиці значень функції $f(x)$ побудуємо інтерполяційний многочлен Лагранжа у вигляді

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} \; .$$

Розв'язок. Тут $\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$.

Ясно, що $\omega'(x_k) = \prod_{i \neq k}(x_k - x_i)$.

Для нашого прикладу $\omega(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

$$\omega'(1) = (1-2)(1-3)(1-4) = -6 \; ; \; \omega'(2) = 2 \; ; \; \omega'(3) = -2 \; ; \; \omega'(4) = 6 \, .$$

Тоді

$$L_3(x) = -\frac{4}{6}(x-2)(x-3)(x-4) + (x-1)(x-3)(x-4) - 2(x-1)(x-2)(x-4) +$$

$$+\frac{16}{6}(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 4x^2 + 3x + 4 \, .$$

Індивідуальне завдання № 2

У лабораторній роботі потрібно за заданою таблицею значень функції $f(x)$ приблизно обчислити значення цієї функції в заданій точці $\bar{x}$ за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа $L_4(x)$.

Таблиця варіантів

Шифр по вертикалі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_0	-9,9	-8,1	-9,2	-8,7	-7,4	-9,5	-7,7	-8,4	-9,3	-8,8
$f(x_0)$	6,0	3,3	4,8	4,1	2,6	5,3	2,9	3,7	5,1	4,2

	Шифр по горизонталі									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_1	-0,9	0,0	0,5	-0,8	0,7	0,1	0,3	-0,4	-1,1	-0,2
$f(x_1)$	0,9	1,0	1,1	0,9	1,2	1,1	1,1	1,0	0,9	1,0
x_2	4,0	3,5	2,8	3,9	2,3	3,4	2,9	3,7	2,0	3,1
$f(x_2)$	2,0	1,9	1,7	2,0	1,6	1,9	1,7	1,9	1,5	1,8
x_3	-4,8	-4,1	-5,3	-4,2	-4,9	-3,9	-5,6	-4,5	-3,6	-5,1
$f(x_3)$	1,1	0,9	1,3	1,0	1,1	0,9	1,4	1,0	0,9	1,2
x_4	6,5	7,7	8,2	6,2	7,4	8,5	6,8	7,9	6,0	7,1
$f(x_4)$	2,7	3,0	3,1	2,6	2,9	3,2	2,8	3,1	2,6	2,9
$\bar{x}$	-6,6	-2,3	1,2	1,8	4,2	4,5	5,1	5,4	5,6	5,8