

ІНДИВІДУАЛЬНЕ КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
З ДИСЦИПЛІНИ «КІЛЬКІСНІ МЕТОДИ В ЕКОНОМІЦІ, ФІНАНСАХ,
МЕНЕДЖМЕНТІ ТА БІЗНЕСІ»

1. Задача лінійного програмування: задача про розподіл ресурсів

Під час виробництва продукції А, В та С використовуються три види ресурсів. Норми витрат ресурсів на випуск одиниці продукції наведені в табл. 1. Побудувати план виробництва, за якого всі наявні ресурси будуть використовуватись. Обчислити, який дохід отримає підприємство, якщо ціни за одиницю продукції також наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Норми витрат ресурсів на виробництво продукції

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Запаси ресурсів, од.
Ресурс І	3	2	3	55
Ресурс ІІ	2	7	5	103
Ресурс ІІІ	1	3	2	44
Ціна за 1 од. продукції, грн.	850	1200	690	

Введемо умовні позначення. Нехай:

x_1 – обсяг виробництва продукції А;

x_2 – обсяг виробництва продукції В;

x_3 – обсяг виробництва продукції С.

Тоді, отриманий від продажу цієї продукції дохід, який необхідно максимізувати, буде дорівнювати:

$$850x_1 + 1200x_2 + 690x_3 \rightarrow \max.$$

Виробництво продукції здійснюється в умовах обмежених ресурсів:

– обсяг споживання першого ресурсу не повинний перевищувати:

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 55,$$

– обсяг споживання другого ресурсу:

$$2x_1 + 7x_2 + 5x_3 \leq 103,$$

– обсяг споживання третього ресурсу:

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 44.$$

Отже, система ресурсних обмежень має вигляд:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 55 \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 \leq 103 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 44 \end{cases}$$

Зважаючи на те, що обсяги виробництва продукції за своїм економічним змістом не можуть бути від'ємними, задачу лінійного програмування слід доповнити обмеженнями:

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0.$$

Завдання

1.1. На основі нормативів витрат ресурсів на виробництво продукції, запасів ресурсів та цін на продукцію, побудувати задачу лінійного програмування для визначення оптимального плану виробництва.

Варіант 1

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	1	7	8	9	370
Ресурс II	7	2	3	0	122
Ресурс III	4	5	4	5	252
Ресурс IV	2	5	5	5	240
Ціна за 1 од. продукції, грн.	180	320	550	225	

Варіант 2

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	1	7	14	9	421
Ресурс II	0	2	3	10	146
Ресурс III	4	0	4	5	183
Ресурс IV	2	5	12	1	326
Ціна за 1 од. продукції, грн.	75	130	720	110	

Варіант 3

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	3	5	11	9	363
Ресурс II	1	2	3	10	257
Ресурс III	4	0	4	5	160
Ресурс IV	6	5	15	4	319
Ціна за 1 од. продукції, грн.	99	599	350	480	

Варіант 4

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	3	5	2	3	246
Ресурс II	0	2	0	7	204
Ресурс III	4	0	4	5	248
Ресурс IV	3	5	9	1	282
Ціна за 1 од. продукції, грн.	180	55	110	99	

Варіант 5

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	3	1	2	3	95
Ресурс II	1	2	0	4	74
Ресурс III	4	0	4	5	128
Ресурс IV	3	5	0	1	119
Ціна за 1 од. продукції, грн.	250	145	80	100	

Варіант 6

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	0	1	2	3	115
Ресурс II	1	2	3	4	172
Ресурс III	4	6	4	5	273
Ресурс IV	3	5	0	2	121
Ціна за 1 од. продукції, грн.	500	240	260	720	

Варіант 7

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	6	1	5	2	226
Ресурс II	1	2	3	4	184
Ресурс III	0	6	1	3	148
Ресурс IV	3	4	0	2	146
Ціна за 1 од. продукції, грн.	420	75	30	330	

Варіант 8

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	5	1	5	2	150
Ресурс II	1	2	3	4	120
Ресурс III	2	6	1	3	178
Ресурс IV	3	4	0	2	152
Ціна за 1 од. продукції, грн.	280	110	90	350	

Варіант 9

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	3	7	5	2	203
Ресурс II	1	2	3	4	156
Ресурс III	2	6	4	3	202
Ресурс IV	0	4	0	2	108
Ціна за 1 од. продукції, грн.	300	150	60	470	

Варіант 10

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	10	7	5	2	344
Ресурс II	5	0	3	4	140
Ресурс III	2	6	4	1	184
Ресурс IV	1	4	5	2	164
Ціна за 1 од. продукції, грн.	200	180	390	55	

Варіант 11

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	1	7	8	9	299
Ресурс II	7	2	3	0	101
Ресурс III	4	5	4	5	198
Ресурс IV	2	5	5	5	194
Ціна за 1 од. продукції, грн.	180	320	550	225	

Варіант 12

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	1	7	14	9	388
Ресурс II	0	2	3	10	251
Ресурс III	4	0	4	5	148
Ресурс IV	2	5	12	1	189
Ціна за 1 од. продукції, грн.	75	130	720	110	

Варіант 13

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	3	5	11	9	342
Ресурс II	1	2	3	10	158
Ресурс III	4	0	4	5	160
Ресурс IV	6	5	15	4	412
Ціна за 1 од. продукції, грн.	99	599	350	480	

Варіант 14

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	3	5	2	3	220
Ресурс II	0	2	0	7	124
Ресурс III	4	0	4	5	196
Ресурс IV	3	5	9	1	322
Ціна за 1 од. продукції, грн.	180	55	110	99	

Варіант 15

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	3	1	2	3	99
Ресурс II	1	2	0	4	79
Ресурс III	4	0	4	5	134
Ресурс IV	3	5	0	1	115
Ціна за 1 од. продукції, грн.	250	145	80	100	

Варіант 16

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	0	1	2	3	95
Ресурс II	1	2	3	4	149
Ресурс III	4	6	4	5	244
Ресурс IV	3	5	0	2	93
Ціна за 1 од. продукції, грн.	500	240	260	720	

Варіант 17

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	6	1	5	2	234
Ресурс II	1	2	3	4	170
Ресурс III	0	6	1	3	156
Ресурс IV	3	4	0	2	108
Ціна за 1 од. продукції, грн.	420	75	30	330	

Варіант 18

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	5	1	5	2	138
Ресурс II	1	2	3	4	80
Ресурс III	2	6	1	3	146
Ресурс IV	3	4	0	2	114
Ціна за 1 од. продукції, грн.	280	110	90	350	

Варіант 19

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	3	7	5	2	171
Ресурс II	1	2	3	4	113
Ресурс III	2	6	4	3	142
Ресурс IV	0	4	0	2	16
Ціна за 1 од. продукції, грн.	300	150	60	470	

Варіант 20

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	10	7	5	2	245
Ресурс II	5	0	3	4	130
Ресурс III	2	6	4	1	130
Ресурс IV	1	4	5	2	110
Ціна за 1 од. продукції, грн.	200	180	390	55	

Варіант 21

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	1	7	8	9	239
Ресурс II	7	2	3	0	76
Ресурс III	4	5	4	5	158
Ресурс IV	2	5	5	5	155
Ціна за 1 од. продукції, грн.	180	320	550	225	

Варіант 22

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	1	7	14	9	269
Ресурс II	0	2	3	10	224
Ресурс III	4	0	4	5	120
Ресурс IV	2	5	12	1	90
Ціна за 1 од. продукції, грн.	75	130	720	110	

Варіант 23

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	3	5	11	9	339
Ресурс II	1	2	3	10	172
Ресурс III	4	0	4	5	170
Ресурс IV	6	5	15	4	397
Ціна за 1 од. продукції, грн.	99	599	350	480	

Варіант 24

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	3	5	2	3	164
Ресурс II	0	2	0	7	74
Ресурс III	4	0	4	5	134
Ресурс IV	3	5	9	1	236
Ціна за 1 од. продукції, грн.	180	55	110	99	

Варіант 25

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	3	1	2	3	74
Ресурс II	1	2	0	4	64
Ресурс III	4	0	4	5	96
Ресурс IV	3	5	0	1	94
Ціна за 1 од. продукції, грн.	250	145	80	100	

Варіант 26

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	0	1	2	3	75
Ресурс II	1	2	3	4	118
Ресурс III	4	6	4	5	192
Ресурс IV	3	5	0	2	69
Ціна за 1 од. продукції, грн.	500	240	260	720	

Варіант 27

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	6	1	5	2	188
Ресурс II	1	2	3	4	142
Ресурс III	0	6	1	3	126
Ресурс IV	3	4	0	2	86
Ціна за 1 од. продукції, грн.	420	75	30	330	

Варіант 28

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	5	1	5	2	104
Ресурс II	1	2	3	4	62
Ресурс III	2	6	1	3	112
Ресурс IV	3	4	0	2	86
Ціна за 1 од. продукції, грн.	280	110	90	350	

Варіант 29

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	3	7	5	2	148
Ресурс II	1	2	3	4	96
Ресурс III	2	6	4	3	122
Ресурс IV	0	4	0	2	12
Ціна за 1 од. продукції, грн.	300	150	60	470	

Варіант 30

Норми витрат ресурсів на 1 од. виробу	Продукція А	Продукція В	Продукція С	Продукція D	Запаси ресурсів, од.
Ресурс I	10	7	5	2	176
Ресурс II	5	0	3	4	94
Ресурс III	2	6	4	1	100
Ресурс IV	1	4	5	2	86
Ціна за 1 од. продукції, грн.	200	180	390	55	

2. Функція декількох змінних: аналіз виробничої функції Коба-Дугласа

Виробнича функція – це економіко-математичне представлення залежності результату виробничої діяльності підприємства (галузі) від сполучення виробничих факторів. Найбільш поширеною виробничою функцією в економіці є степенева функція Коба-Дугласа, яка має вигляд:

$$Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$$

Де K – обсяг основного капіталу (основних виробничих фондів), у.о.;

L – середньорічна чисельність трудових ресурсів, тис. осіб;

Y – обсяг виробництва продукції, у.о.;

a_0, a_1, a_2 – параметри виробничої функції.

Для аналізу виробничих функцій, використовуються наступні показники, табл. 2

Таблиця 2

Основні показники аналізу виробничих функцій

Назва показника	Формула	Економічний зміст показника
Середня ефективність ресурсу	$\mu_i = \frac{Y}{x_i}$	Який обсяг виробництва ми в середньому отримуємо при витратах одиниці i -ого ресурсу
Гранична ефективність ресурсу	$v_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}$	На скільки одиниць збільшиться обсяг виробництва, якщо витрати i -ого ресурсу зростають на 1
Еластичність випуску продукції від витрат ресурсу	$\delta_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} \times \frac{x_i}{y}$	На скільки відсотків зміниться результат виробництва, якщо витрати i -ого ресурсу зростуть на 1%

Вказані в таблиці показники, характеризують ефективність використання ресурсів. Знайдемо, як вони розраховуються для виробничої функції Коба-Дугласа $Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$:

– середня ефективність основного капіталу та трудових ресурсів:

$$\mu_K = \frac{Y}{K} = \frac{a_0 K^{a_1} L^{a_2}}{K} = a_0 K^{a_1-1} L^{a_2}$$

$$\mu_L = \frac{Y}{L} = \frac{a_0 K^{a_1} L^{a_2}}{L} = a_0 K^{a_1} L^{a_2-1}$$

– гранична ефективність основного капіталу та трудових ресурсів:

$$v_K = \frac{\partial y}{\partial K} = a_0 a_1 K^{a_1-1} L^{a_2}$$

$$v_L = \frac{\partial y}{\partial L} = a_0 a_2 K^{a_1} L^{a_2-1}$$

– еластичність випуску продукції від витрат основного капіталу та трудових ресурсів:

$$v_K = \frac{\partial Y}{\partial K} \times \frac{K}{Y} = a_0 a_1 K^{a_1-1} L^{a_2} \times \frac{K}{a_0 K^{a_1} L^{a_2}} = a_1$$

$$v_L = \frac{\partial Y}{\partial L} \times \frac{L}{Y} = a_0 a_2 K^{a_1} L^{a_2-1} \times \frac{L}{a_0 K^{a_1} L^{a_2}} = a_2$$

Варіанти завдань, щодо аналізу виробничої функції, наведені в табл. 3.

Таблиця 3

Параметри виробничої функції (по варіантах)

Варіант N	a ₀	a ₁	a ₂	K	L	Варіант N	a ₀	a ₁	a ₂	K	L
1	1,5	0,1	0,9	20	10	16	1,7	0,2	0,8	20	30
2	1,8	0,2	0,7	30	50	17	2,0	0,3	0,6	30	45
3	1,2	0,7	0,3	80	20	18	1,4	0,6	0,3	115	25
4	1,7	0,9	0,8	70	30	19	1,9	0,8	0,9	70	20
5	2,8	0,4	1,2	10	80	20	3,0	0,3	1,3	10	60
6	2,2	1,2	0,8	90	10	21	2,4	1,1	0,5	90	30
7	2,9	0,7	0,6	20	90	22	3,1	0,6	0,5	20	110
8	1,4	0,3	0,85	30	40	23	1,6	0,4	1,1	30	70
9	2,3	0,9	0,5	70	60	24	2,5	0,8	0,5	70	50
10	2,6	1,1	0,4	40	50	25	2,8	0,7	0,6	45	85
11	2,5	0,3	0,9	20	15	26	4,3	0,9	0,5	90	30
12	2,8	0,4	0,7	80	50	27	5,2	0,6	0,5	25	120
13	3,2	0,5	0,3	110	45	28	3,5	0,5	0,65	30	70
14	2,7	0,7	0,8	70	30	29	4,6	0,3	0,5	65	50
15	3,8	0,5	0,7	10	100	30	4,7	0,5	0,6	40	90

Де N – номер студента за журналом

Необхідно знайти:

2.1. Середню ефективність основного капіталу K, де K змінюється в діапазоні [10; 150], з кроком $\Delta K = 10$. При цьому, обсяг трудових ресурсів L дорівнює значенню з таблиці вище;

2.2. Середню ефективність трудових ресурсів L, де L змінюється в діапазоні [10; 150], з кроком $\Delta L = 10$. При цьому, обсяг основного капіталу K дорівнює значенню з таблиці вище;

2.3. Граничну ефективність основного капіталу K, де K змінюється в діапазоні [10; 150], з кроком $\Delta K = 10$. При цьому, обсяг трудових ресурсів L дорівнює значенню з таблиці вище;

2.4. Граничну ефективність трудових ресурсів L , де L змінюється в діапазоні $[10; 150]$, з кроком $\Delta L = 10$. При цьому, обсяг основного капіталу K дорівнює значенню з таблиці вище;

2.5. Еластичність випуску продукції Y від основного капіталу K , де K змінюється в діапазоні $[10; 150]$, з кроком $\Delta K = 10$. При цьому, обсяг трудових ресурсів L дорівнює значенню з таблиці вище;

2.6. Еластичність випуску продукції Y від трудових ресурсів L , де L змінюється в діапазоні $[10; 150]$, з кроком $\Delta L = 10$. При цьому, обсяг основного капіталу K дорівнює значенню з таблиці вище.

Побудувати відповідні графіки (окрім еластичності) й зробити висновки щодо ефективності вказаних виробничих ресурсів.