1 ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

1.1 Лінійні операції над векторами

1. Для довільного трикутника ABC точки M, N, P — відповідно середини сторін AC, AB і BC. Серед вказаних нижче пар векторів знайдіть пари рівних і пари колінеарних, але нерівних векторів: а) $\overrightarrow{AN}$ і $\overrightarrow{MP}$; б) $\overrightarrow{NP}$ і $\overrightarrow{CA}$; в) $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{PC}$; г) $\overrightarrow{PC}$ і $\overrightarrow{BC}$; д) $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MC}$; е) $\overrightarrow{NP}$ і $\overrightarrow{CM}$; ж) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{NP}$.

2. Нехай A, B, C, D — довільні точки, M, N, P, Q — середини відрізків AB, BC, CD, DA відповідно. Довести, що $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

3. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — паралелепіпед, O — точка перетину діагоналей, а M, N, P, Q — середини сторін AA_1, BB_1, CC_1 і DD_1. Довести, що: а) $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OP}$; б) $\overrightarrow{QO} = \overrightarrow{ON}$; в) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

4. Нехай $ABCD$ — паралелограм, O — точка перетину діагоналей, а E і F — відповідно середини паралельних сторін BC і AD. Побудувати на рисунку такі вектори: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DF}$; в) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{OB}$; д) $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FO}$; е) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{CD}$.

5. За даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати кожний з таких векторів: $4\vec{a}$, $-\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{a})$, $2\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$, $3\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$.

6. Користуючись паралелограмом, побудуваним на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, перевірте на рисунку справедливість рівностей:

   (a) $(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b}) = 2\vec{a}$;

   (b) $(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b}) = 2\vec{b}$;

   (c) $(\vec{a}+\vec{b})-\vec{a} = \vec{a}+(\vec{b}-\vec{a}) = \vec{b}$;

(d) $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$;

(e) $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{b}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$;

(f) $\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)-\left(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\vec{b}$.

7. Дано: $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$ і $|\vec{a}+\vec{b}|=24$. Обчислити $|\vec{a}-\vec{b}|$.

8. Дано: $|\vec{a}|=11$, $|\vec{b}|=23$ і $|\vec{a}-\vec{b}|=30$. Визначити $|\vec{a}+\vec{b}|$.

9. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, причому $|\vec{a}|=5$ і $|\vec{b}|=12$. Визначити $|\vec{a}+\vec{b}|$ і $|\vec{a}-\vec{b}|$.

10. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=60^\circ$, причому $|\vec{a}|=5$ і $|\vec{b}|=8$. Визначити $|\vec{a}+\vec{b}|$ і $|\vec{a}-\vec{b}|$.

11. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=120^\circ$, причому $|\vec{a}|=3$ і $|\vec{b}|=5$. Визначити $|\vec{a}+\vec{b}|$ і $|\vec{a}-\vec{b}|$.

12. Якій умові повинні задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб вектор $\vec{a}+\vec{b}$ ділив пополам кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

13. В правильному п'ятикутнику $ABCDE$ задані вектори: $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{n}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{p}$, $\overrightarrow{DE}=\vec{q}$ і $\overrightarrow{EA}=\vec{r}$. Побудувати вектори:

(a) $\vec{m}-\vec{n}+\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}$;

(b) $\vec{m}+2\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{r}$;

(c) $2\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}-3\vec{p}-\vec{q}+2\vec{r}$.

14. Довести, що якщо точка M є точка перетину медіан трикутника ABC, то $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ і для довільної точки O справедлива рівність

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

15. Дані три точки A, B і C. Побудувати точку Q таку, щоб

$$\overrightarrow{Q} - 2\ \overrightarrow{QB} - \overrightarrow{QC} = \vec{0}.$$

16. A, B, C і D — довільні точки простору, M і N — середини відрізків AD і BC. Довести, що $2\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

17. При яких умовах для ненулевих векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можливі такі рівності:

    (a) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$;

    (b) $\vec{a} + \vec{b} = \lambda(\vec{a} - \vec{b})$;

    (c) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$;

    (d) $|\vec{a} + \vec{b}| = ||\vec{a}| - |\vec{b}||$;

    (e) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$?

18. Довести, що існує трикутник, сторони якого рівні і паралельні медіанам даного трикутника.

19. Довести, що для кожної скінченної множини точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n > 1)$ існує єдина точка M така, що $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \cdots + \overrightarrow{MA_n} = \vec{0}$ і для довільної точки O виконується рівність

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}).$$

20. Записати у векторній формі необхідну та достатню умову того, щоб чотирикутник $ABCD$ був паралелограмом.

21. Записати за допомогою векторів умову того, що точки A, B, C, D є вершини трапеції $ABCD$, де $AB||CD$.

22. Записати у векторній формі необхідну і достатню умову того, щоб точка M була точкою перетину медіан трикутника ABC.

23. Точки P і Q — середини відрізків AB і CD відповідно. Довести, що середини відрізків AC, BD і PQ належать одній прямій.

24. Довести: для того щоб дві протилежні сторони чотирикутника були паралельні, необхідно і достатньо, щоб відрізок, який з'єднує їх середини, проходив через точку перетину діагоналей.

25. Довести: для того щоб чотирикутник був паралелограмом, необхідно і достатньо, щоб відрізки, які з'єднують середини його протилежних сторін, проходили через точку перетину його діагоналей.

26. „Вектором" будемо називати одностовпцеву матрицю висоти n з елементами з даного поля K, причому

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix}.$$

Довести, що множина таких матриць утворює векторний простір.

27. Нехай $\mathbf{C}$ — множина неперервних функцій $f(x)$, заданих на відрізку $[a;b]$. Перевірити, що природні операції $f(x)+g(x)$, $\lambda f(x)$, де $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathbf{C}$, перетворюють множину $\mathbf{C}$ в векторний простір.

28. Нехай V_1 і V_2 — підпростори векторного простору V. Довести, що їх перетин є векторний простір.

1.2 Координати вектора

29. В трикутнику ABC вектори $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BL}$ і $\overrightarrow{CM}$ направлені по медіанам. Виразити їх через вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

30. Нехай ABC — довільний трикутник, E і F — середини сторін AB і BC. Виразити вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AC}$ через $\vec{a} = \overrightarrow{AE}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$.

31. Нехай $ABCD$ — паралелограм O — точка перетину його діагоналей. Покладаючи $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$, виразити через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$.

32. Дана трапеція $ABCD$, де $\overrightarrow{DC} = k\ \overrightarrow{AB}$. Точки M і N — середини основ AB і DC, P — точка перетину діагоналей AC і DB.

    (a) Взявши вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$ за базисні, знайти координати векторів $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PB}$.

    (b) Взявши вектори $\overrightarrow{PA}$ і $\overrightarrow{PB}$ за базисні, знайти розкладання векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

33. В трикутнику ABC проведена бісектриса AD кута A. Розкласти вектор $\overrightarrow{AD}$ за векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

34. Точка M — центр ваги трикутника ABC. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$ в базисі $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$.

35. Точка M — центр ваги трикутника ABC. Розкласти:

    (a) $\overrightarrow{MA}$ за векторами $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$;

    (b) $\overrightarrow{AB}$ за векторами $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$;

    (c) $\overrightarrow{OA}$ за векторами $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM}$, де O — довільна точка простору.

36. В правильному шостикутнику $ABCDEF$ вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1$ і $\overrightarrow{AE} = \vec{e}_2$ вибрані як базисні. Знайти в даному базисі координати векторів $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$ і $\overrightarrow{EF}$.

37. В ромбі $ABCD$ вектори $\overrightarrow{AC} = \vec{e}_1$ і $\overrightarrow{BD} = \vec{e}_2$ взяті за базисні. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$ в даному базисі.

38. В трикутнику ABC проведена медіана BK і середня лінія MN, яка паралельна AC. Прямі BK і MN перетинаються в точці O. Знайти:

    (a) координати векторів $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{NC}$ і $\overrightarrow{AN}$ в базисі $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OC}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OM}$;

    (b) координати тих же векторів в базисі $\vec{e}_1 = \overrightarrow{KC}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{KN}$.

39. В рівнобічній трапеції $ABCD$ кут A дорівнює $\dfrac{\pi}{3}$. Розкласти вектори $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$ за векторами $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$.

40. Точки P і Q — середини протилежних ребер BC і AD тетраедра, G — його центр ваги. Взявши вектори $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC}$ за базисні, знайти координати вектора $\overrightarrow{PQ}$.

41. Дано неколінеарні вектори $\vec{a}, \vec{b}$. Довести, що система векторів $\vec{m} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{n} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{p} = \vec{a} + 3\vec{b}$ лінійно залежна, вектори $\vec{n}, \vec{p}$ не колінеарні. Розкласти вектор $\vec{m}$ за векторами $\vec{n}, \vec{p}$.

42. На площині дані три вектора своїми координатами в деякому базисі: $\vec{a}(4, -2)$, $\vec{b}(3, 5)$, $\vec{c}(-2, -12)$. Подати вектор $\vec{c}$ як лінійну комбінацію векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

43. Дані вектори $\vec{a}(1, -2)$, $\vec{b}(\frac{1}{2}, 1)$, $\vec{c}(2, 0)$. Визначити координати векторів $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$, $\frac{1}{2}(3\vec{a} - 5\vec{b})$, $\frac{1}{3}(\vec{c} - 2\vec{b})$.

44. Знайти координати вектора $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$, якщо

(a) $\vec{a}(-1,2)$, $\vec{b}(-3,1)$, $\vec{c}(1,0)$;

(b) $\vec{a}(4,-3)$, $\vec{b}(0,2)$, $\vec{c}(3,5)$.

45. Знайти значення α, при яких пари векторів колінеарні:

(a) $\alpha\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \quad \vec{e}_1 - \vec{e}_2$;

(b) $\vec{e}_1 - \alpha\vec{e}_2, \quad 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$;

(c) $(\alpha - 1)\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad 2\vec{e}_2$,

де $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ — базис на площині.

46. Визначити, при яких α, β вектори $\vec{a} = -2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \beta\vec{e}_3$ і $\vec{b} = \alpha\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ колінеарні, де $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — базис в просторі.

47. На площині дані два вектори $\vec{p}(2,-3)$, $\vec{q}(1,2)$. Знайти розклад вектора $\vec{a}(9,4)$ в базисі $\vec{p}, \vec{q}$.

48. На площині дані три вектори $\vec{a}(3,-2)$, $\vec{b}(-2,1)$, $\vec{c}(7,-4)$. Визначити розклад кожного з цих трьох векторів, приймаючи два інших за базисні.

49. Дані три вектори $\vec{a}(3,-1)$, $\vec{b}(1,-2)$, $\vec{c}(-1,7)$. Визначити розклад вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ в базисі $\vec{a}, \vec{b}$.

50. Дані три вектори $\vec{p}(3,-2,1), \vec{q}(-1,1,-2), \vec{r}(2,1,-3)$. Знайти розклад вектора $\vec{c}(11,-6,5)$ за базисом $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.

51. Відносно базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ вектор $\vec{a}$ має координати $(2,1)$. Знайти координати вектора $\vec{a}$ відносно базиса $\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2$, якщо

(a) $\vec{e}'_1 = 4\vec{e}_1$, $\vec{e}'_2 = -\frac{2}{3}\vec{e}_2$;

(b) $\vec{e}'_1 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}'_2 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

52. Серед векторів $\vec{a}_1(0,-3,0)$, $\vec{a}_2(-2,0,5)$, $\vec{a}_3(0,2,-1)$, $\vec{a}_4(0,0,4)$, $\vec{a}_5(1,0,0)$, $\vec{a}_6(0,1,-3)$, $\vec{a}_7(1,-2,3)$, $\vec{a}_8(0,0,0)$, заданих в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, вказати вектори:
1) колінеарні $\vec{e}_2$; 2) компланарні з векторами $\vec{e}_2$ і $\vec{e}_3$.

53. В базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ дані вектори $\vec{p}(-3, 6, -13)$, $\vec{a}(1, 0, -2)$, $\vec{b}(1, -1, 3)$, $\vec{c}(-2, 3, 0)$. Подати вектор $\vec{p}$ як лінійну комбінацію векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

54. Дані чотири вектори $\vec{a}(2, 1, 0)$, $\vec{b}(1, -1, 2)$, $\vec{c}(2, 2, -1)$ і $\vec{d}(3, 7, -7)$. Розкласти кожен з цих векторів в базисі, який складається з решти трьох векторів.

55. До кола $\omega(O, R)$ з точки C проведені дотичні CA і CB (A і B — точки дотикання). Розкласти вектор:

   (a) $\overrightarrow{CO}$ за векторами $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$;

   (b) $\overrightarrow{OC}$ за векторами $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, якщо $\angle ACB = 60^\circ, 120^\circ, \alpha$.

1.3 Скалярний добуток векторів

56. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\alpha = \frac{2}{3}\pi$; знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, обчислити: 1) $\vec{a}\vec{b}$, 2) $\vec{a}^2$; 3) $\vec{b}^2$; 4) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 5) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$; 6) $(\vec{a} - \vec{b})^2$; 7) $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$.

57. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні; вектор $\vec{c}$ утворює з ними кути, рівні $\frac{\pi}{3}$; знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$, обчислити: 1) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{b} + 3\vec{c})$; 2) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$; 3) $(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2$.

58. Одиничні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задовольняють умову $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Обчислити $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$.

59. Одиничні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задовольняють умову $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$ і $|\vec{c}| = 4$, обчислити $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$.

60. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ попарно утворюють один з одним кути, кожен з яких дорівнює 60°. Знаючи що $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$ і $|\vec{c}| = 6$, визначити модуль вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

61. Дано, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Визначити, при якому значені α вектори $\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ будуть взаємно перпендикулярні.

62. Довести, що вектор $\vec{p} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$.

63. Довести, що вектор $\vec{p} = \vec{b} - \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$.

64. Який кут утворюють між собою ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо, що вектор $\vec{a} + 3\vec{b}$ перпендикулярний до вектора $7\vec{a} - 5\vec{b}$, а вектор $\vec{a} - 4\vec{b}$ перпендикулярний до вектора $7\vec{a} - 2\vec{b}$?

65. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$; знаючи, що $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, обчислити кут між векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

В наступних задачах координати векторів задані в ортонормованому базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

66. Вектор $\vec{x}$, колінеарний вектору $\vec{a}(6, -8, -7.5)$, утворює гострий кут з віссю Oz. Знаючи, що $|\vec{x}| = 50$, знайти його координати.

67. Знайти вектор $\vec{x}$, який колінеарний вектору $\vec{a}(2, 1, -1)$а задовольняє умову $\vec{x}\vec{a} = 3$.

68. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = 18\vec{i} - 22\vec{j} - 5\vec{k}$, утворює з віссю Oy тупий кут. Знайти його координати, знаючи, що $|\vec{x}| = 14$.

69. Дані вектори $\vec{a}(2, -1, 3)$, $\vec{b}(1, -3, 2)$, $\vec{c}(3, 2, -4)$. Визначити координати вектора $\vec{x}$, який задовольняє умови $\vec{x}\vec{a} = 10$, $\vec{x}\vec{b} = 22$, $\vec{x}\vec{c} = -40$.

70. Дані два вектори $\vec{a}(3, -1, 5)$ і $\vec{b}(1, 2, -3)$. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо він перпендикулярний до осі Oz і задовольняє умови: $\vec{x}\vec{a} = 9, \vec{x}\vec{b} = -4$.

71. Обчислити, яку роботу виконує сили $\vec{f}(3, -5, 2)$, якщо її точка прикладання переміщується з початку в кінець вектора $\vec{s}(2, -5, -7)$.

72. Обчислити, яку роботу виконує сила $\vec{f}(3,-2,-5)$, якщо її точка прикладання рухаючись прямолінійно, зміщується з точки $A(2,-3,5)$ в точку $B(3,-2,-1)$.

73. Дані три сили $\overrightarrow{M}(3,-4,2)$, $\overrightarrow{N}(2,3,-5)$ і $\overrightarrow{P}(-3,-2,4)$, прикладені до однієї точки. Обчислити, яку роботу виконує рівнодійна цих сил, коли її точка прикладання, рухаючись прямолінійно, зміщується з положення $M_1(5,3,-7)$ в положення $M_2(4,-1,-4)$.

74. Нехай $\vec{x}^3=(\vec{x}\vec{x})\vec{x}$. Розв'язати рівняння $\vec{x}^3=\vec{a}$, де $\vec{a}$ — заданий ненульовий вектор.

75. Дані два неколінеарних вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Розв'язати відносно x рівняння:

$$\frac{\vec{a}^2+x\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{a}+x\vec{b}|}=\frac{\vec{b}^2+\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}||\vec{a}+\vec{b}|}.$$

76. Дано прямокутник $ABCD$. Довести, що для довільної точки M простору виконуються рівності:

$$1)\quad \overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MC}^2=\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MD}^2;$$

$$2)\quad \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}.$$

77. Користуючись скалярним добутком векторів, довести, що висоти трикутника перетинаються в одній точці.

78. В кубі знайти величину кута:

1) між його діагоналлю і мимобіжною з нею діагоналлю грані;

2) між мимобіжними діагоналями двох сусідніх граней;

3) між діагоналлю куба і перетинаючою її діагоналлю грані.

79. Знайти величину кута BAC рівнобедреного трикутника ABC, знаючи, що медіани BB_0 і CC_0, які проведені з вершин основи, перпендикулярні.

80. Довести, що сума квадратів довжин ортогональних проекцій всіх ребер куба на площину не залежить від взаємного розташування куба і площини.

2 МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ

2.1 Система координат на площині

В задачах 81 – 86 система координат афінна.

81. За координатами трьох вершин P, Q і R паралелограма обчислити координати четвертої його вершини: 1) $P(1,4)$, $Q(3,-1)$, $R(0,2)$; 2) $P(-1,0)$, $Q(2,1)$, $R(4,-1)$.

82. Довести, що три точки A, B і C належать одній прямій: 1) $A(2,1)$, $B(0,5)$, $C(4,-3)$; 2) $A(-1,0)$, $B(1,-2)$, $C(3,-4)$. Виясни́ти яка із трьох точок лежить між двома іншими.

83. Точки K і L — середини сторін BC і CD відповідно паралелограма $ABCD$. Знайти координати вершин паралелограма в репері $R = (A, K, L)$.

84. Відносно репера $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ дані координати точок $O'(2,-3)$, $A'_1(1,1)$, $A'_2(3,-6)$, $M(5,-1)$. Знайти координати точки M в репері $R' = (O', A'_1, A'_2)$.

85. В системі координат $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, де $ABCD$ — паралелограм, точка M має координати (α, β). Обчислити координати цієї точки в системі координат:
1) $(C, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$; 2) $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$; 3) $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$.

86. Відносно репера $R = (O, A_1, A_2)$ дані точки $A(2,1)$, $B(3,0)$, $C(1,4)$. Знайти репер $R' = (O', A'_1, A'_2)$, відносно якого точки A, B, C мають координати $A(1,6)$, $B(1,9)$, $C(3,1)$. Записати формули перетворення координат при переході від репера R до R'. Знайти координати точок O, A_1, A_2 в репері R'.

В задачах 87 – 103 система координат прямокутна декартова.

87. За координатами вершин A і B рівностороннього трикутника ABC обчислити координати третьої його вершини:

    1) $A(1,1)$, $B(2,-1)$; 2) $A(0,0)$, $B(-2,1)$.

88. За координатами вершин A і C квадрата $ABCD$ обчислити координати вершин B і D:

    1) $A(1,1)$, $C(-2,-1)$; 2) $A(-1,0)$, $C(3,1)$; 3) $A(4,2)$, $C(0,1)$.

89. Обчислити площу правильного трикутника, дві вершини якого є точки $A(-3,2)$ і $B(1,6)$.

90. Дані три вершини $A(3,-7)$, $B(5,-7)$, $C(-2,5)$ паралелограма $ABCD$, четверта вершина якого D протилежна B. Визначити довжину діагоналей цього паралелограма.

91. Сторона ромба рівна $5\sqrt{10}$, дві його протилежні вершини є точки $P(4,9)$ і $Q(-2,1)$. Обчислити площу цього ромба.

92. Сторона ромба рівна $5\sqrt{2}$, дві його протилежні вершини є точки $P(3,-4)$ і $Q(1,2)$. Обчислити довжину висоти цього ромба.

93. Довести, що трикутник з вершинами $A(1,1)$, $B(2,3)$, $C(5,-1)$ прямокутний.

94. Довести, що точки $A(2,2)$, $B(-1,6)$, $C(-5,3)$ і $D(-2,-1)$ є вершини квадрата.

95. Визначити, чи є серед внутрішніх кутів трикутника з вершинами $A(1,1)$, $B(0,2)$ і $C(2,-1)$ тупий кут.

96. На осі абсцис знайти таку точку M, відстань якої до точки $N(2,-3)$ була би рівною 5.

97. На осі ординат знайти таку точку M, відстань якої до точки $N(-8,13)$ була би рівною 17.

98. Дані дві точки $M(2,2)$ і $N(5,-2)$; на осі абсцис знайти таку точку P, щоб кут MPN був прямим.

99. Через точку $A(4, 2)$ проведено коло, яке дотикається обох координатних осей. Визначити його центр C і радіус R.

100. Через точку $M(1, -2)$ проведено коло радіуса 5, яке дотикається осі Ox. Визначити центр C кола.

101. Визначити координати точки M_2 симетричної точці $M_1(1, 2)$ відносно прямої, яка проходить через точки $A(1, 0)$ і $B(-1, -2)$.

102. Дані дві суміжні вершини квадрата $A(2, -1)$ і $B(-1, 3)$. Визначити дві його інші вершини.

103. В трикутнику ABC висота $CH = 3$ і $AC = BC$, кут BAC орієнтований додатньо. Знайти координати точки C, якщо $A(6, -2)$, $B(4, 0)$.

2.2 Ділення відрізка в заданому відношенні

104. Знайти координати середин відрізків A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, якщо $A_1(-1, 5)$, $B_1(-3, 3)$, $A_2(0, 4)$, $B_2(3, 2)$, $A_3(-2, 6)$, $B_3(1, 4)$.

105. Дані координати $A(-1, 5)$ і $B(3, 4)$ однорідного стержня. Обчислити координати його центра ваги.

106. Дані координати точок $P(-1, 5)$, $Q(3, 2)$.

    (a) знайти координати точки M, яка симетрична точці P відносно точки Q;

    (b) знайти координати точки N, яка симетрична точці Q відносно точки P.

107. Дані вершини трикутника $A(1, -3)$, $B(3, -5)$ і $C(-5, 7)$. Визначити середини його сторін.

108. Точки $M(2, -1)$, $N(-1, 4)$ і $P(-2, 2)$ є середини сторін трикутника. Визначити його вершин.

109. Дані три вершини паралелограма $A(3, -5)$, $B(5, -3)$, $C(-1, 3)$. Визначити четверту вершину D, протилежну B.

110. Дані дві суміжні вершини паралелограма $A(-4,4)$, $B(2,8)$ і точка перетину $M(2,2)$ його діагоналей. Визначити дві інші вершини C і D.

111. Дані вершини трикутника $A(1,4)$, $B(3,-9)$, $C(-5,2)$. Визначити довжину його медіани, яка проведена з вершини B.

112. Даний чотирикутник $A(-1,7)$, $B(5,5)$, $C(7,-5)$, $D(3,-7)$.

    (a) Довести, що відрізки, які з'єднують середини сторін AD і BC, AB і CD, перетинаються і діляться точкою перетину пополам.

    (b) Показати, що чотирикутник, вершини якого є середини сторін даного чотирикутника, є паралелограм.

113. Визначити координати точок, які ділять відрізок $A(2,3)$, $B(-1,2)$ у відношенні $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = \dfrac{1}{2}, \lambda_4 = 3$.

114. Відрізок, обмежений точками $A(1,-3)$ і $B(4,3)$, поділений на три рівних частини. Визначити координати точок поділу.

115. Дві вершини трикутника ABC мають координати $A(3,6)$, $B(-3,5)$. Визначити координати вершини C при умові, що середини сторін AC і BC лежать на різних осях координат.

116. Дані вершини трикутника $A(2,-5)$, $B(1,-2)$, $C(4,7)$. Знайти точку перетину з стороною AC бісектриси його внутрішнього кута при вершині B.

117. Дані вершини трикутника $A(3,-5)$, $A(1,-3)$, $C(2,-2)$. Визначити довжину бісектриси його зовнішнього кута при вершині B. Система координат прямокутна декартова.

118. Визначити координати кінців A і B відрізка, який точками $P(2,2)$ і $Q(1,5)$ поділений на три рівних частини.

119. Пряма проходить через точки $M_1(-12,-13)$ і $M_2(-2,-5)$. На цій прямій знайти точку, абсциса якої рівна 3.

120. Пряма проходить через точки $M(2,-3)$ і $N(-6,5)$. На цій прямій знайти точку, ордината якої рівна -5.

121. Пряма проходить через точки $A(7,-3)$ і $B(23,-6)$. Знайти точку перетину цієї прямої з віссю абсцис.

122. Пряма проходить через точки $A(5,2)$ і $B(-4,-7)$. Знайти точку перетину цієї прямої з віссю ординат.

123. Дані вершини чотирикутника $A(-2,14)$, $B(4,-2)$, $C(6,-2)$, $D(6,10)$. Визначити точку перетину його діагоналей AC і BD.

124. Довести, що точка перетину $M(x,y)$ медіан трикутника з вершинами $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ має координати

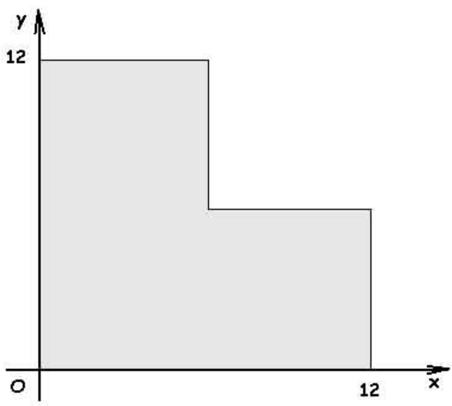
$$x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

125. Точка M перетину медіан трикутника лежить на осі абсцис, дві його вершини — точки $A(2,-3)$ і $B(-5,1)$, третя вершина C лежить на осі ординат. Визначити координати точок M і C.

126. Вершини однорідної трикутної пластинки знаходяться в точках $A(-1,2)$, $B(3,3)$ і $C(1,-1)$. Визначити координати центра ваги пластинки.

127. В точці $A(2,5)$ розміщений вантаж в 60 г, а в точці $B(-3,0)$ — вантаж в 40 г. Визначити координати центра ваги цієї системи.

128. Однорідна пластинка має форму квадрата із стороною, рівною 12, в якій зроблений квадратний виріз, прямі розрізу проходять через центр квадрата, вісі координат направлені по ребрам пластинки (див. рис.) Визначити центр ваги цієї пластинки.



129. Дані точки $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \ldots, A_n(x_n, y_n)$, в яких розміщені маси $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Довести, що координати центра ваги системи матеріальних точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$ визначаються співвідношеннями

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}, y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

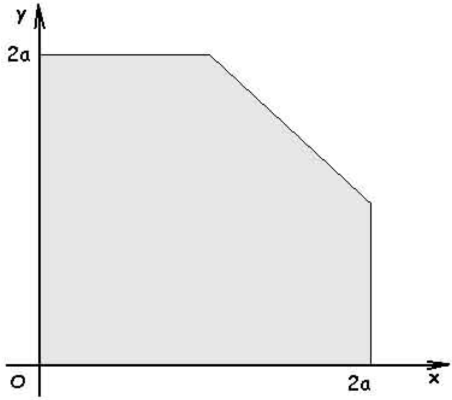
130. В вершинах трикутника $A(1,8)$, $B(3,4)$, $C(4,2)$ розміщені відповідно маси 30, 40 і 60 г.

    а) Визначити координати центра ваги системи матеріальних точок A, B і C.

    б) Знайти центр ваги системи при умові, що в точках A, B і C розміщені однакові маси.

131. Однорідний стержень зігнутий у вигляді трикутника, вершини якого знаходяться в точках $A(2,-1), B(5,-1)$ і $C(2,3)$. Визначити координати центра ваги цього трикутника.

132. Однорідна пластинка має форму квадрата зі стороною, рівною $2a$, від якого відрізаний трикутник; пряма розрізу з'єднує середини двох суміжних сторін, вісі координат направлені по ребрам пластинки (див. рис.). Визначити центр ваги пластинки.



2.3 Пряма лінія на площині

133. Написати рівняння прямої, яка:

    а) проходить через точки $A(-1,1)$ і $B(2,5)$;

б) проходить через початок координат і точку $A(2,5)$;

в) проходить через точку $A(2,-6)$ і паралельна вектору $\vec{a}(1,-1)$;

г) відтинає на осях координат відрізки $a = 3, b = -2$;

д) проходить через точку $A(3,5)$ і паралельна осі Ox;

е) проходить через точку $B(-1,2)$ і паралельна осі Oy;

ж) проходить через точку $A(1,-5)$ і паралельна прямій $x - 3y + 1 = 0$;

з) проходить через точку $A(2,2)$ і паралельна прямій $x+y = 0$.

134. Написати параметричні рівняння прямої, яка:

а) проходить через точку $P(-2,3)$ паралельно вектору $\vec{a}(5,-1)$;

б) проходить через дві точки $A(0,-2)$, $B(3,-4)$;

в) проходить через початок координат і паралельна вектору $\vec{p}(1,1)$;

г) проходить через точку $M(1,-3)$ і паралельна осі Ox;

д) проходить через дві точки $M_1(1,2)$ і $M_2(1,-5)$.

135. Скласти рівняння прямих, які проходять через вершини трикутника $A(5,-4)$, $B(-1,3)$, $C(-3,-2)$ паралельно протилежним сторонам.

136. Написати рівняння середніх ліній трикутника, вершини якого знаходяться в точках $A(2,6)$, $B(-4,0)$, $C(4,2)$.

137. Написати рівняння прямих, які містять медіани трикутника ABC:

1) $A(1,1)$, $B(2,0)$, $C(-1,4)$; 2) $A(3,-1)$, $B(-2,1)$, $C(0,0)$.

138. Дані рівняння прямих, які містять середні лінії трикутника ABC:

$$2x - y + 1 = 0, \quad x + 3y = 0, \quad -x + y + 2 = 0.$$

Знайти рявняння прямих, які містять сторони трикутника.

139. Дані вершини трикутника $A(1,-1)$, $B(-2,1)$ і $C(3,5)$. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини A на медіану, яка проведена з вершини B.

140. Дані вершини трикутника $A(2,-2)$, $B(3,-5)$ і $C(5,7)$. Скласти рівняння перпендикуляра, який опущений з вершини C на бісектрису внутрішнього кута при вершині A.

141. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $P(3,5)$на однакових відстанях від точок $A(-7,3)$ і $B(11,-15)$.

142. Знайти проекцію точки $P(-8,12)$ на пряму, яка проходить через точки $A(2,-3)$ і $B(-5,1)$.

143. Визначити координати точки, яка симетрична точці $M(2,-5)$ відносно прямої $2x+8y-15=0$.

144. Знайти точку M_1, яка симетрична точці $M_2(8,-9)$ відносно прямої, яка проходить через точки $A(3,-4)$ і $B(-1,-2)$.

145. Дані точки $A(2,-1)$ і $B(3,1)$. Визначити, чи розділені ці точки прямою l, яка задана рівнянням:

$$1)\ x+3y-5=0; \quad 2)\ 3x-y+1=0; \quad 3)\ 2x+y=0.$$

146. На осі абсцис знайти таку точку P, щоб сума її відстаней до точок $M(1,2)$ і $N(3,4)$ була найменшою.

147. На осі ординат знайти таку точку P, щоб різниця відстаней її від точок $M(-3,2)$ і $N(2,5)$ була найбільшою.

148. На прямій $2x-y-10=0$ знайти точку Q, сума відстаней якої до точок $M(-5,0)$ і $N(-3,4)$ була б найменшою.

149. На прямій $2x-y-5=0$ знайти точку P, сума відстаней якої до точок $A(-7,1)$ і $B(-5,5)$ була б найменшою.

150. На прямій $3x-y-1=0$ знайти точку P, різниця відстаней якої до точок $A(4,1)$, $B(0,4)$ була б найбільшою.

151. Дані дві прямі $3x+y=0$ і $2x-3y+1=0$ і точка $M(-2,1)$. Знайти аналітичні умови, які визначають той кут, який утворений даними прямими, що містить точку M.

152. Визначити розташування точки $M(2,6)$ і прямої $x-3y-5=0$ відносно трикутника ABC, якщо $A(0,1)$, $B(-2,5)$, $C(4,9)$.

153. Написати аналітичні умови, які визначають смугу, яка утворена прямими:

1) $3x+y-1=0, \quad 6x+2y+3=0;$
2) $x+2y+2=0, \quad 2x+4y-7=0.$

154. Дані три точки $A(-4,-2), B(-2,1)$ і $C(2,3)$. Написати аналітичні умови, які визначають паралелограм $ABCD$.

155. Записати аналітичні умови, які визначають трикутник ABC, якщо:

1) $A(3,1)$, $B(2,-1)$, $C(0,2)$; 2) $A(0,1)$, $B(-2,4)$, $C(3,-1)$.

156. Обчислити координати орта вектора нормалі прямої:

1) $x+2y-3=0$; 2) $x-3y-1=0$; 3) $4x+3y+6=0$.

157. Написати рівняння серединного перпендикуляра відрізка AB:

1) $A(2,1)$, $B(-1,3)$; 2) $A(0,-1)$, $B(2,-3)$; 3) $A(1,1)$, $B(-3,0)$.

158. Дані рівняння прямих, які містять висоти трикутника, і координати однієї з вершин трикутника. Обчислити координати двох інших вершин цього трикутника:

1) $3x+4y-7=0, \quad 2x-y-1=0, \quad A(5,-3);$
2) $3x+4y-2=0, \quad 4x-y+2=0, \quad A(0,-1).$

159. Точка $A(-4,5)$ є вершиною квадрата, діагональ якого лежить на прямій, рівняння якої $7x-y+8=0$. Скласти рівняння сторін і другої діагоналі цього квадрата.

160. Дані дві протилежні вершини квадрата $A(-1,3)$ і $C(6,2)$. Скласти рівняння його сторін.

161. Промінь світла направлений по прямій $x-2y+5=0$. Дійшовши до прямої $3x-2y+7=0$, промінь від неї відбився. Скласти рівняння прямої, на якій лежить відбитий промінь.

162. Дані дві вершини трикутника $M_1(-10,2)$ і $M_2(6,4)$, його висоти перетинаються в точці $N(5,2)$. Визначити координати третьої вершини M_3.

163. Скласти рівняння сторін трикутника ABC, якщо дані одна з його вершин $A(1,3)$ і рівняння двох медіан $x-2y+1=0$ і $y-1=0$.

164. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо дані одна з його вершин $B(-4,-5)$ і рівняння двох висот $5x+3y-4=0$ і $3x+8y+13=0$.

165. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин $A(4,-1)$ і рівняння двох бісектрис $x-1=0$, $x-y-1=0$.

166. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $B(2,6)$, а також рівняння висоти $x-7y+15=0$ і бісектриси $7x+y+5=0$, які проведені з однієї вершини.

167. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $B(2,-1)$, а також рівняння висоти $3x-4y+27=0$ і бісектриси $x+2y-5=0$, які проведені з різних вершин.

168. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $C(4,-1)$, а також рівняння висоти $2x-3y+12=0$ і медіани $2x+3y=0$, які проведені з однієї вершини.

169. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $B(2,-7)$, а також рівняння висоти $3x+y+11=0$ і медіани $x+2y+7=0$, які проведені з різних вершин.

170. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $C(4,3)$, а також рівняння бісектриси $x+2y-5=0$ і медіани $4x+13y-10=0$, які проведені з однієї вершини.

171. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $A(3,-1)$, а також рівняння бісектриси $x-4y+10=0$ і медіани $6x+10y-59=0$, які проведені з різних вершин.

172. Дані рівняння прямих $l_1 : Ax+By+C_1=0$, $l_2 : Ax+By+C_2=0$ $(C_1 \neq C_2)$. Знайти відстань між прямими l_1 і l_2.

173. Обчислити відстань між паралельними прямими в кожному з таких випадків:

1) $3x-4y-10=0$, $6x-8y+5=0$;

2) $5x-12y+26=0$, $5x-12y-13=0$;

3) $4x-3y+15=0$, $8x-6y+25=0$;

4) $24x-10y+39=0$, $12x-5y-26=0$.

174. Точка $A(2,-5)$ є вершина квадрата, одна з сторін якого лежить на прямій, рівняння якої $x-2y-7=0$. Обчислити площу цього квадрата.

175. Дані рівняння двох сторін прямокутника $3x-2y-5=0$, $2x+3y+7=0$ і одна з його вершин $A(-2,1)$. Обчислити площу цього прямокутника.

176. Довести, що через точку $P(2,7)$ можна провести дві прямі так, щоб їх відстані від точки $Q(1,2)$ були рівними 5. Скласти рівняння цих прямих.

177. Довести, що через точку $C(7,-2)$ можна провести тільки одну пряму так, щоб відстань її від точки $A(4,-6)$ була рівною 5. Скласти її рівняння.

178. Скласти рівняння прямих, паралельних прямій $3x-4y-10=0$ і які відстоять від неї на відстань 3.

179. Дані дві суміжні вершини квадрата $A(2, 0)$ і $B(-1, 4)$. Скласти рівняння його сторін.

180. Дані рівняння двох сторін квадрата $4x-3y+3=0$, $4x-3y-17=0$ і одна з його вершин $A(2, -3)$. Скласти рівняння двох інших сторін цього квадрата.

181. Скласти рівняння множини точок, рівновіддалених від двох паралельних прямих:

1) $3x - y + 7 = 0, \quad 3x - y - 3 = 0;$
2) $x - 2y + 3 = 0, \quad x - 2y + 7 = 0;$
3) $5x - 2y - 6 = 0, \; 10x - 4y + 3 = 0.$

182. Скласти рівняння бісектрис кутів, утворених двома прямими, які перетинаються:

1) $x - 3y + 5 = 0, \quad 3x - y - 2 = 0;$
2) $x - 2y - 3 = 0, \quad 2x + 4y + 7 = 0;$
3) $3x + 4y - 1 = 0, \; 5x + 12y - 2 = 0.$

183. Визначити чи лежить точка $M(1, -2)$ і початок координат в одному, в суміжних або вертикальних кутах, утворених при перетині двох прямих:

1) $2x - y - 5 = 0, \qquad 3x + y + 10 = 0;$
2) $4x + 3y - 10 = 0, \quad 12x - 5y - 5 = 0;$
3) $x - 2y - 1 = 0, \qquad 3x - y - 2 = 0.$

184. Визначити чи лежать точки $M(2, 3)$ і $N(5, -1)$ в одному, в суміжних або вертикальних кутах, утворених при перетині двох прямих:

1) $x - 3y - 5 = 0, \qquad 2x + 9y - 2 = 0;$
2) $2x + 7y - 5 = 0, \quad x + 3y + 7 = 0;$
3) $12x + y - 1 = 0, \quad 13x + 2y - 5 = 0.$

185. Скласти рівняння бісектриси кута між прямими $3x - y - 4 = 0$ і $2x + 6y + 3 = 0$, в якому лежить початок координат.

186. Скласти рівняння бісектриси кута між прямими $x - 7y + 5 = 0$ і $5x + 5y - 3 = 0$, суміжного з кутом, який містить початок координат.

187. Скласти рівняння бісектриси кута між прямими $x + 2y - 11 = 0$ і $3x - 6y - 5 = 0$, в якому лежить точка $M(1, -3)$.

188. Скласти рівняння бісектриси кута між прямими $2x - 3y - 5 = 0$, $6x - 4y + 7 = 0$, суміжного з кутом, який містить точку $C(2, -1)$.

189. Дані дві прямі, які перетинаються:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Довести, що коли

$$(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1)(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2)(A_1A_2 + B_1B_2) < 0,$$

то точка $M_0(x_0, y_0)$ належить одному з гострих кутів, які визначаються даними прямими.

190. Визначити, який з кутів, гострий чи тупий, утворених двома прямими $3x - 2y + 5 = 0$ і $2x + y - 3 = 0$, містить початок координат.

191. Визначити, який з кутів, гострий чи тупий, утворених двома прямими $3x - 5y - 4 = 0$ і $x + 2y + 3 = 0$, містить точку $M(2, -5)$.

192. Скласти рівняння бісектриси гострого кута, утвореного двома прямими $3x + 4y - 5 = 0$, $5x - 12y + 3 = 0$.

193. Дані рівняння прямих $l_1 : 2x - y - 5 = 0$, $l_2 : x + 3y + 7 = 0$. Обчислити косинус кута φ, утвореного прямими l_1, l_2, якому належить точка $M_0(1, 1)$.

2.4 Коло і пряма лінія

В задачах цього параграфу система координат прямокутна декартова.

194. Скласти рівняння кола в кожному з таких випадків:

   1) центр кола співпадає з точкою $C(2,-3)$, а його радіус дорівнює 7;
   2) коло проходить через точку $A(2,6)$, а його центр співпадає з точкою $C(-1,2)$;
   3) точки $A(3,2)$ і $B(-1,6)$ є кінці одного з діаметрів кола;
   4) центр кола співпадає з точкою $C(1,-1)$, а пряма, рівняння якої $5x-12y+9=0$, є дотичною до кола;
   5) коло проходить через точки $A(3,1)$ і $B(-1,3)$, а його центр лежить на прямій $3x-y-2=0$;
   6) коло проходить через три точки $A(1,1)$, $B(1,-1)$ і $C(2,0)$.

195. Точка $C(3,-1)$ є центр кола, яке відтинає на прямій, рівняння якої $2x-5y+18=0$, хорду довжини 6. Скласти рівняння цього кола.

196. Скласти рівняння кола, яке дотикається двох паралельних прямих: $2x+y-5=0$, $2x+y+15=0$, причому однієї з них в точці $A(2,1)$.

197. Скласти рівняння кола, яке, маючи центр на прямій $2x+y=0$, дотикається прямих $4x-3y+10=0$ і $4x-3y-30=0$.

198. Скласти рівняння кіл, які дотикаються прямих $2x-3y-10=0$, $3x-2y+5=0$, а центри їх лежать на прямій $4x-5y-3=0$.

199. Написати рівняння кіл, які проходять через точку $A(-1,5)$ і дотикаються двох прямих: $3x+4y-35=0$, $4x+3y+14=0$.

200. Написати рівняння кіл, які дотикаються трьох прямих:
$$3x+4y-35=0, \quad 3x-4y-35=0 \quad \text{і} \quad x-1=0.$$

201. Знайти умову, при якій пряма $y = kx + b$ дотикається до кола $x^2 + y^2 = R^2$.

202. В прямокутній декартовій системі координат дані рівняння множин точок:

а) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$,

б) $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 40 = 0$,

в) $x^2 + xy - 2x = 0$,

г) $x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x + y + 5 = 0$,

д) $x^2 + y^2 - 2x = 0$,

е) $x^2 + y^2 + 2y + 8 = 0$,

ж) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.

Вияснити, які з наведених рівнянь визначають коло. Знайти координати центра і радіус кожного з них.

203. Знайти рівняння лінії центрів двох кіл, які задані рівняннями:

1) $(x - 3)^2 + y^2 = 9$ і $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$;

2) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$ і $(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 25$;

3) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ і $x^2 + y^2 - 6x = 0$;

4) $x^2 + y^2 - x + 2y = 0$ і $x^2 + y^2 + 5x + 2y - 1 = 0$.

204. Скласти рівняння діаметра кола $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$, який перпендикулярний до прямої $5x + 2y - 13 = 0$.

205. Обчислити найкоротшу відстань від точки до кола в кожному з таких випадків:

а) $A(6, -8)$, $x^2 + y^2 = 9$;

б) $B(3, 9)$, $x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0$;

в) $C(-7, 2)$, $x^2 + y^2 - 10x - 14y - 151 = 0$.

206. Визначити координати точок перетину прямої $7x - y + 12 = 0$ і кола $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

207. Скласти рівняня прямої, яка проходить через точки перетину двох кіл:

$$x^2 + y^2 + 3x - y = 0, \quad 3x^2 + 3y^2 + 2x + y = 0.$$

208. Обчислити відстань від центра кола $x^2 + y^2 = 2x$ до прямої, яка проходить через точки перетину двох кіл:

$$x^2 + y^2 + 5x - 8y + 1 = 0, \quad x^2 + y^2 - 3x + 7y - 25 = 0.$$

209. З точки $A\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ проведені дотичні до кола $x^2 + y^2 = 5$. Скласти їх рівняння.

210. З точки $A(1, 6)$ проведені дотичні до кола $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$. Скласти їх рівняння.

211. З точки $A(4, 2)$ проведені дотичні до кола $x^2 + y^2 = 10$. Визначити кут, який утворений цими дотичними.

212. З точки $M(4, -4)$ проведені дотичні до кола

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0.$$

Обчислити довжину хорди, яка з'єднує точки дотикання.

213. Скласти рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, які перпендкулярні до прямої $x - 2y + 9 = 0$.

214. Скласти рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$, які паралельні прямій $2x + y - 7 = 0$.

215. Обчислити довжину дотичної, яка проведена з точки $A(1, -2)$ до кола $x^2 + y^2 + x - 3y - 3 = 0$.

216. Знайти множину точок, відношення відстаней яких до двох даних точок A і B є стале число і рівне λ.

217. Знайти множину точок, сума квадратів відстаней яких до двох даних точок A і B є величина стала.

218. Знайти множину точок, для кожної з яких сума квадратів відстаней до двох перпендикулярних прямих є стала величина λ^2.

219. Знайти множину точок, сума квадратів відстаней яких до трьох даних точок A, B і C є величина стала.

220. Дано коло і деяка точка A, яка лежить в площині кола. Відрізок AB (де B — довільна точка кола) точкою M поділений в сталому відношенні λ. Знайти множину точок M.

3 ПЕРЕТВОРЕННЯ ПЛОЩИНИ

3.1 Переміщення (рух) площини

В наступних задачах система координат прямокутна декартова.

221. Записати формули осьової симетрії площини за координатами двох симетричних точок: $A(1,-2),\ B(3,4)$.

222. Написати формули перетворення осьової симетрії, якщо вісь задана рівнянням $y = kx + b$.

223. Вісь симетрії l задана своїм рівнянням. Написати рівняння прямої m', яка симетрична прямій m відносно осі l, якщо:

    1) $l : x + y + 1 = 0,\ m : 2x - y - 2 = 0;$
    2) $l : -x + y = 0,\quad m : x - 2y + 1 = 0.$

224. Написати формули перетворення, яке є композицією трьох осьових симетрій з осями $x = 0$, $y = 0$, $x - 2y = 0$.

225. Довести, що дві різні осьові симетрії переставні тоді і тільки тоді, коли їх вісі взаємно перпендикулярні.

226. Довести, що композиція трьох осьових симетрій тоді і тільки тоді є осьова симетрія, коли ці вісі проходять через одну точку або паралельні одна одній.

227. В ортонормованому репері R дана точка $S(x_0, y_0)$ і даний кут $0 < \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Написати формули повороту f площини навколо точки S на кут α.

228. Поворот навколо точки $M(2,1)$ відображає точку A на точку B. Обчислити координати точки B, якщо

$$1)\ \alpha = 45^\circ, A(1,-2); \quad 2)\ \alpha = 120^\circ, A(1,1); \quad 3)\ \alpha = 90^\circ, A(3,-1).$$

229. Обчислити координати центра повороту, заданого формулами:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y + 1, \\ y' = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y - 2. \end{cases}$$

230. Написати рівняння образу прямої l при повороті навколо точки M на кут φ:

1) $M(0,0), \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}, \quad l : x + y - 2 = 0;$
2) $M(-2,1), \quad \varphi = \dfrac{\pi}{6}, \quad l : x - y + 1 = 0;$
3) $M(0,-1), \quad \varphi = \dfrac{\pi}{4}, \quad l : x + 2y = 0.$

231. На прямій m_1, заданій рівнянням $2x + y - 1 = 0$, дана точка $M_1(2,-3)$, а на прямій m_2, заданій рівнянням $3x - y + 2 = 0$, дана точка $M_2(-1,-1)$. Написати формули перетворення повороту f, при якому $f(M_1) = M_2$, $f(m_1) = m_2$.

232. Дані точка $M(5,1)$ перетину медіан рівностороннього трикутника ABC і рівняння прямої $AB : 2x - y = 0$. Написати рівняння прямих AC, BC.

233. Довести, що композиція симетрій f_1, f_2 площини Π відносно двох точок O_1, O_2 є перенесення площини.

234. Дані два поворота з різними центрами. Побудувати нерухому точку композиції цих двох поворотів.

235. Написати формули ковзної симетрії, заданої віссю l і вектором $\vec{a}$:

1) $l: x-2=0, \quad \vec{a}(0,3)$;

2) $l: x+y-3=0, \quad \vec{a}(-1,1)$;

3) $l: y+5=0, \quad \vec{a}(2,0)$;

4) $l: 2x-y+1=0, \quad \vec{a}(2,4)$.

236. Знайти координати образа точки A при ковзній симетрії, яка задана віссю l і вектором $\vec{a}$:

1) $A(2,1), \quad l: x+5=0, \quad \vec{a}(0,2)$;

2) $A(0,-3), \quad l: x+y+3=0, \quad \vec{a}(-2,2)$;

3) $A(0,0), \quad l: x-2y+1=0, \quad \vec{a}(6,3)$.

237. Написати рівняння образа прямої m при ковзній симетрії, заданої віссю l і вектором $\vec{a}$:

1) $l: x+2=0, \quad \vec{a}(0,3), \quad m: x-3y+1=0$;

2) $l: x-y+1=0, \quad \vec{a}(5,5), \quad m: x+y=0$;

3) $l: x+2y=0, \quad \vec{a}(-2,1), \quad m: x-2y+1=0$.

238. Знайти рівняння інваріантної прямої ковзної симетрії, заданої формулами:

$$x' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + 4, \quad y' = \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y.$$

239. Написати формули переміщення, яке являє собою композицію трьох осьових симетрій з осями $x=0$, $y=0$, $x+y-1=0$.

240. Довести, що композиція двох ковзних симетрій з різними паралельними осями є перенесення.

241. В ортонормованому репері R перетворення f площини Π задано формулами:

$$1)\ x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}, \quad y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2)\ x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{8}{5}, \quad y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{4}{5}.$$

Довести, що f — рух, і визначити його вид. Знайти інваріантні точки.

242. Дані два рівних відрізка AB і A_1B_1. Скласти формули руху, який переводить A в A_1, B в B_1, якщо $A(3,4)$, $B(0,0)$, $A_1(0,0)$, $B_1(5,0)$.

243. Дані координати точок
$$A(\sqrt{3},1),\ B(0,2),\ A'(2,\sqrt{3}-2),\ B'(0,\sqrt{3}-2).$$
Написати формули переміщення першого роду, знаючи, що $f(A)=A'$, $f(B)=B'$.

244. Скласти формули переміщення першого і другого роду, якщо відомо, що образи точок $(0,1)$, $(1,0)$ і $(1,1)$належать відповідно прямим $y=0$, $x=0$, $x+y-1=0$.

245. Площина повертається навколо точки $S(2,3)$ на кут α, такий, що $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$. В яку пряму при цьому повороті перейде пряма l: $x+2y-3=0$?

246. Дані координати вершин трикутника ABC і $A'B'C'$: $A(2,-3)$, $B(5,1)$, $C(0,1)$, $A'(-3,1)$, $B'(1,4)$, $C'\left(-\frac{19}{5},\frac{27}{5}\right)$. Довести, що ці трикутники рівні. Знайти формули руху, який переводить (A,B,C) в (A',B',C'), і визначити вид цього руху.

247. Написати формули перетворення осьової симетрії, якщо вісь симетрії задана рівнянням: $Ax+By+C=0$.

248. Довести, що точки, симетричні точці M перетину висот трикутника відносно прямих, що містять його сторони, лежать на колі, описаному навколо цього трикутника.

3.2 Подібність площини

249. На прямій l дані пари точок A і B, A_1 і B_1. Побудувати центр гомотетії, яка точку A переводить в точку A_1, а точку B — в точку B_1.

250. В репері R дані координати точок $A(2,1)$, $B(3,-2)$, $C(1,0)$, $A'(-1,-5)$, $B'(-3,1)$, $C'(1,-3)$. Довести, що трикутники ABC і $A'B'C'$ гомотетичні, і написати формули гомотетії h такої, що $h(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$.

251. Довести, що два нерівних трикутника ABC і $A'B'C'$ гомотетичні тоді і тільки тоді, коли їх відповідні сторони паралельні.

252. Довести, що одне з двох нерівних кіл може бути переведене в інше двома різними гомотетіями, причому сума коефіцієнтів цих гомотетій рівна нулеві.

253. Довести, що коли композиція гомотетії з центром A і гомотетії з центром B є гомотетія з центром C, то точки A, B і C належать одній прямій.

254. Дані три попарно нерівні кола. Довести, що центри додатних гомотетій цих кіл належать одній прямій.

255. В ортонормованому репері R дані координати вершин: $A(0,-3)$, $B(4,0)$, $C(1,-1)$, $A'(-6,-6)$, $B'(0,2)$, $C'\left(-\frac{26}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ трикутників ABC і $A'B'C'$. Довести, що трикутники ABC і $A'B'C'$ подібні. Знайти формули подібності.

256. Написати формули перетворення подібності першого роду, при якому $A(1,2) \mapsto A_1(2,0)$, $B(-2,3) \mapsto B_1(0,0)$. Обчислити координати інваріантної точки і знайти коефіцієнт подібності.

257. Написати формули перетворення подібності другого роду, при якому $A(1,0) \mapsto A_1(0,1)$, $B(-2,1) \mapsto B_1(-1,1)$. Скласти рівняння інваріантних прямих подібності та обчислити координати нерухомої точки.

258. Довести, що кожна подібність площини, відмінна від руху, є або композицією гомотетії і повороту навколо центра гомотетії, або композицією гомотетії і симетрії відносно прямої, що проходить через центр гомотетії.

259. Подібність f переводить три точки A, B, C, що не лежать на одній прямій, в точки A', B', C' відповідно. Побудувати образ точки M, а також образ прямої l.

260. Подібність першого роду задана двома парами відповідних точок. Побудувати інваріантну точку.

3.3 Афінні перетворення площини

261. Написати формули афінного перетворення, яке точки $A(1,2)$, $B(3,-1)$, $C(-1,1)$ переводить відповідно в точки $A'(-1,10)$, $B'(6,6)$, $C'(-4,6)$.

262. Знайти інваріантні точки афінного перетворення, яке переводить точки $A(-1,2)$, $B(2,1)$, $C(1,-1)$ в точки $A'(-3,0)$, $B'(6,2)$, $C'(10,-1)$.

263. Написати рівняння інваріантних прямих афінного перетворення, заданого в репері $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ формулами:

$$x' = 7x - y + 1,$$
$$y' = 4x + 2y + 4.$$

264. В репері $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ написати формули афінного перетворення, якщо відомо, що прямі $l_1 : 2x - y + 3 = 0$ і $l_2 : x - y + 2 = 0$ є інваріантними прямими цього перетворення і точка $M(-1,0)$ переходить в точку $M'(1,2)$.

265. В репері $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ дані рівняння прямих $l_1 : x + y - 1 = 0$, $l'_1 : x - y - 3 = 0$, $l_2 : x - 2y + 1 = 0$, $l'_2 : 2x + y + 1 = 0$ і точки $M_1(0,0)$, $M'_1(1,-1)$. Написати формули афінного перетворення f, яке переводить прямі l_1, l_2 в прямі l'_1, l'_2 і точку M_1 — в точку M'_1.

266. Нехай в репері $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ дані рівняння прямих
$$l : Ax + By + C = 0, \quad l' : A'x + B'y + C' = 0.$$

Довести, що коли при афінному перетворення f пряма l переходить в l', то існує таке число λ, що для кожної точки $M(x,y) \in l$ і точки $f(M) = M'(x',y') \in l'$ виконується рівність:

$$A'x' + B'y' + C' = \lambda(Ax + By + C).$$

267. Афінне перетворення задане трьома парами відповідних точок: $A \mapsto A_1$, $B \mapsto B_1$, $C \mapsto C_1$:

    1) для даної точки M побудувати відповідну точку M_1;
    2) для даної прямої m побудувати відповідну пряму m_1.

268. Довести, що довільні два паралелограми афінно еквівалентні.

269. Довести, що для довільної трапеції $ABCD$ існує афінно еквівалентна їй рівнобічна трапеція $A'B'C'D'$.

270. Знайти нерухомі точки та інваріантні прямі афінного перетворення $x' = x + 3$, $y' = 2x - y + 1$.

271. Знайти нерухомі точки та інваріантні прямі афінного перетворення $x' = x + 3y$, $y' = y$.

272. Знайти нерухомі точки та інваріантні прямі афінного перетворення $x' = 2x + 3y$, $y' = -3x + 2y$.

273. Знайти нерухомі точки та інваріантні прямі афінного перетворення $x' = 5x - 2y + 6$, $y' = 4x - y + 6$.

274. Знайти нерухомі точки та інваріантні прямі афінного перетворення $x' = 10x + 12y + 3$, $y' = 6x + 9y + 2$.

4 ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

4.1 Еліпс

275. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, знаючи, крім того, що:

1) його піввісі рівні 5 і 2;
2) його велика вісь рівна 10, в відстань між фокусами $2c = 8$;
3) його мала вісь рівна 24, а відстань між фокусами $2c = 10$;
4) відстань між його фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{3}{5}$;
5) його велика вісь рівна 20, а ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{3}{5}$;
6) його мала вісь рівна 10, а ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{12}{13}$;
7) відстань між його директрисами рівна 5, а відстань між фокусами $2c = 4$;
8) його велика вісь рівна 8, а відстань між директрисами рівна 16;
9) його мала вісь рівна 6, а відстань між директрисами рівна 13;
10) відстань між його директрисами рівна 32 і $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$.

276. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі ординат, симетрично відносно початку координат, знаючи, крім того, що:

1) його піввісі рівні відповідно 7 і 2;
2) його велика вісь рівна 10, а відстань між фокусами $2c = 8$;
3) відстань між його фокусами $2c = 24$, а ексцентриситет дорівнює $\dfrac{12}{13}$;
4) його мала вісь рівна 16, а ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{3}{5}$;
5) відстань між його фокусами $2c = 6$ і відстань між директрисами рівна $16\dfrac{2}{3}$
6) відстань між його директрисами рівна $10\dfrac{2}{3}$ і ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{3}{4}$.

277. Даний еліпс $9x^2+24y^2 = 225$. Знайти: 1) його піввісі; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння директрис.

278. Ексцентриситет еліпса $\varepsilon = \dfrac{2}{3}$, фокальний радіус точки M еліпса дорівнює 10. Обчислити відстань від точки M до однобічної з цим фокусом директриси.

279. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо дані:

1) точка $M_1(-2\sqrt{5}, 2)$ еліпса і його мала піввісь $b = 3$;
2) точка $M_1(2, -2)$ еліпса і його велика піввісь $a = 4$;
3) точки $M_1(4, -\sqrt{3})$ і $M_2(2\sqrt{2}, 3)$ еліпса;
4) точка $M_1\left(2, -\dfrac{5}{3}\right)$ еліпса і його ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{2}{3}$;
5) точка $M_1(\sqrt{15}, -1)$ еліпса і відстань між його фокусами $2c = 8$;
6) точка $M_1(8, 12)$ еліпса і відстань $r_1 = 20$ від її лівого фокуса;
7) точка $M_1(-\sqrt{5}, 2)$ еліпса і відстань між його директрисами рівна 10.

280. Написати канонічне рівняння еліпса, якщо його велика вісь рівна $2a$, а фокуси знаходяться від вершин на відстані $\dfrac{1}{5}$ її довжини.

281. Знайти ексцентриситет еліпса, якщо відстань між його фокусами є середнє арифметичне його осей.

282. Скласти рівняння еліпса, знаючи, що:

1) його велика вісь рівна 26 і фокуси є $F_1(-10, 0)$, $F_2(14, 0)$;
2) його мала вісь рівна 2 і фокуси є $F_1(-1, -1)$, $F_2(1, 1)$;

3) його фокуси є $F_1\left(-2, \frac{3}{2}\right)$, $F_2\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) його фокуси $F_1(1, 3)$, $F_2(3, 1)$ і відстань між директрисами рівна $12\sqrt{2}$.

283. Скласти рівняння еліпса, якщо відомі його ексцентриситет $\frac{2}{3}$, фокус $F(2, 1)$ і рівняння відповідної директриси $x - 5 = 0$.

284. Скласти рівняння еліпса, якщо відомі його ексцентриситет $\frac{1}{2}$, фокус $F(-4, 1)$ і рівняння відповідної директриси $y + 3 = 0$.

285. Точка $A(-3, -5)$ лежить на еліпсі, фокус якого $F(-1, -4)$, а відповідна директриса дана рівнянням $x - 2 = 0$. Скласти рівняння цього еліпса.

286. Точка $M_1(2, -1)$ лежить на еліпсі, фокус якого $F(1, 0)$, а відповідна директриса дана рівнянням $2x - y - 10 = 0$. Скласти рівняння цього еліпса.

287. Скласти рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{10} + \frac{2y^2}{5} = 1$, паралельних прямій $3x + 2y + 7 = 0$.

288. Скласти рівняння дотичних до еліпса $x^2 + 4y^2 = 20$, перпендикулярних до прямої $2x - 2y - 13 = 0$.

289. Провести дотичні до еліпса $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ паралельно прямій $4x - 2y + 23 = 0$ і обчислити відстань d між ними.

290. На еліпсі $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ знайти точку M_1, найближчу до прямої $2x - 3y + 25 = 0$, і обчислити відстань d від точки M_1 до цієї прямої.

291. З точки $A\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$ проведені дотичні до еліпса $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$. Скласти їх рівняння.

292. З точки $C(10,-8)$ проведені дотичні до еліпса $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$. Скласти рівняння хорди, яка з'єднує точки дотикання.

293. З точки $P(-16,9)$ проведені дотичні до еліпса $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. Обчислити відстань d від точки P до хорди еліпса, яка з'єднує точки дотикання.

294. Еліпс проходить через точку $A(4,-1)$ і дотикається до прямої $x+4y-10=0$. Скласти рівняння цього еліпса при умові, що його вісі співпадають з осями координат.

295. Скласти рівняння еліпса, який дотикається до двох прямих

$$3x-2y-20=0, \quad x+6y-20=0,$$

при умові, що його вісі співпадають з осями координат.

296. Довести, що добуток відстаней від фокусів до довільної дотичної до еліпса дорівнює квадрату малої піввісі.

297. Пряма $x-y-5=0$ дотикається еліпса, фокуси якого знаходяться в точках $F_1(-3,0)$ і $F_2(3,0)$. Скласти рівняння цього еліпса.

4.2 Гіпербола

298. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, знаючи, крім того, що:

    1) її вісі $2a=10$ і $2b=8$;
    2) відстань між фокусами $2c=10$ і вісь $2b=8$;
    3) відстань між фокусами $2c=6$ і ексцентриситет $\varepsilon=\dfrac{3}{2}$;
    4) вісь $2a=16$ і ексцентриситет $\varepsilon=\dfrac{5}{4}$;

5) рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами 20;

6) відстань між директрисами рівна $22\frac{2}{13}$ і відстань між фокусами $2c = 26$;

7) відстань між директрисами рівна $\frac{8}{3}$ і вісь $2b = 6$;

8) відстань між директрисами рівна $\frac{8}{3}$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

9) рівняння асимптот $y = \pm\frac{3}{4}x$ і відстань між директрисами рівна $12\frac{4}{5}$.

299. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі ординат симетрично відносно початку координат, знаючи, крім того, що:

1) її піввісі $a = 6$, $b = 18$ (літерою a ми позначаємо піввісь гіперболи, розташовану на осі абсцис);

2) відстань між фокусами $2c = 10$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$;

3) рівняння асимптот $y = \pm\frac{12}{5}x$ і відстань між вершинами рівна 48;

4) відстань між директрисами рівна $7\frac{1}{7}$ і ексцентриситет $\frac{7}{5}$;

5) рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ і відстань між директрисами рівна $6\frac{2}{5}$.

300. Дана гіпербола $16x^2 - 9y^2 = 144$. Знайти: 1) піввісі a і b; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння асимптот; 5) рівняння директрис.

301. Дана гіпербола $16x^2 - 9y^2 = -144$. Знайти: 1) піввісі a і b; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння асимптот; 5) рівняння директрис.

302. Обчислити площу трикутника, утвореного асимптотами гіперболи $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ і прямою $9x + 2y - 24 = 0$.

303. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = 2$, фокальний радіус її точки M, проведений з деякого фокуса, дорівнює 16. Обчислити відстань від точки M до однобічної з цим фокусом директриси.

304. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = 3$, відстань від точки M гіперболи до директриси рівна 4. Обчислити відстань від точки M до фокуса, однобічного з цією директрисою.

305. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = 2$, центр її лежить в початку координат, один з фокусів $F(12, 0)$. Обчислити відстань від точки M_1 гіперболи з абсцисою, рівною 13, до директриси, що відповідає заданому фокусові.

306. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \dfrac{3}{2}$, центр її лежить в початку координат, одна з директрис задана рівнянням $x = -8$. Обчислити відстань від точки M_1 гіпеболи з абсцисою, рівною 10, до фокуса, що відповідає даній директрисі.

307. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо дані:

   1) точки $M_1(6, -1)$ і $M_2(-8, 2\sqrt{2})$ гіперболи;
   2) точка $M_1(-5, 3)$ гіперболи і ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$;
   3) точка $M_1\left(\dfrac{9}{2}, -1\right)$ гіперболи і рівняння асимптот $y = \pm\dfrac{2}{3}x$;
   4) точка $M_1\left(-3, \dfrac{5}{2}\right)$ гіперболи і рівняння директрис $x = \pm\dfrac{4}{3}$;
   5) рівняння асимптот $y = \pm\dfrac{3}{4}x$ і директрис $x = \pm\dfrac{16}{5}$.

308. Визначити ексцентриситет рівнобічної гіперболи.

309. Визначити ексцентриситет гіперболи, якшо відрізок між її вершинами видно з фокусів спряженої гіперболи під кутом в 60°.

310. Фокуси гіперболи співпадають з фокусами еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Скласти рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет $\varepsilon=2$.

311. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать в вершинах еліпса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$, а директриси проходять через фокуси цього еліпса.

312. Довести, що відстань від фокуса гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ до її асимптоти рівна b.

313. Скласти рівняння гіперболи, знаючи, що:

1) відстань між її вершинами рівна 24 і фокуси є $F_1(-10,2)$, $F_2(16,2)$;
2) фокуси є $F_1(3,4)$, $F_2(-3,-4)$ і відстань між директрисами рівна 3.6;
3) кут між асимптотами дорівнює 90° і фокуси є $F_1(4,-4)$, $F_2(-2,2)$.

314. Скласти рівняння гіперболи, якщо відомі її ексцентриситет $\frac{5}{4}$, фокус $F(5,0)$ і рівняння відповідної директриси $5x-16=0$.

315. Скласти рівняння гіперболи, якщо відомі її ексцентриситет $\frac{13}{12}$, фокус $F(0,13)$ і рівняння відповідної директриси $13y-144=0$.

316. Точка $A(-3,-5)$ лежить на гіперболі, фокус якої $F(-2,-3)$, а відповідна директриса дана рівнянням $x+1=0$. Скласти рівняння цієї гіперболи.

317. Скласти рівняння гіперболи, якщо відомі її ексцентриситет $\sqrt{5}$, фокус $F(2,-3)$ і рівняння відповідної директриси $3x-y+3=0$.

318. Точка $M_1(1,-2)$ лежить на гіперболі, фокус якої $F(-2,2)$, а відповідна директриса дана рівнянням $2x-y-1=0$. Скласти рівняння цієї гіперболи.

319. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{5} = 1$, перпендикулярних до прямої $4x + 3y - 7 = 0$.

320. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{64} = 1$, паралельних прямій $10x - 3y + 9 = 0$.

321. Провести дотичні до гіперболи $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{8} = -1$ паралельно прямій $2x + 4y - 5 = 0$ і обчислити відстань між ними.

322. На гіперболі $\dfrac{x^2}{24} - \dfrac{y^2}{18} = 1$ знайти точку M_1, найближчу до прямої $3x + 2y + 1 = 0$, і обчислити відстань d від точки M_1 до цієї точки.

323. З точки $C(1, -10)$ проведені дотичні до гіперболи $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{32} = 1$. Скласти рівняння хорди, яка з'єднує точки дотикання.

324. Скласти рівняння гіперболи, яка дотикається двох прямих:

$$5x - 6y - 16 = 0, \quad 13x - 10y - 48 = 0,$$

за умови, що її вісі співпадають з осями координат.

325. Переконавшись, що точки перетину еліпса $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{5} = 1$і гіперболи $\dfrac{x^2}{12} - \dfrac{y^2}{3} = 1$ є вершинами прямокутника, скласти рівняння його сторін.

326. Записати рівняння гіперболи, яка має спільні фокуси з еліпсом $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{24} = 1$, якщо її ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{5}{4}$.

327. Знайти кут між асимптотами гіперболи, у якої відстань між фокусами вдвічі більше відстані між директрисами.

328. На гіперболі $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ знайти точку, фокальні рабіуси якої взаємно перпендикулярні.

329. Написати рівняння дотичних до гіперболи $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, що проходять через точку $M(1,4)$.

330. Записати рівняння тієї дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$, яка перпендикулярна прямій $2x + 5y + 11 = 0$.

4.3 Парабола

331. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, знаючи, що:

    1) парабола розташована в правій напівплощині симетрично відносно осі Ox, і її параметр $p = 3$;
    2) парабола розташована в лівій напівплощині симетрично відносно осі Ox, і її параметр $p = 0,5$;
    3) парабола розташована в верхній напівплощині симетрично відносно осі Oy, і її параметр $p = \frac{1}{4}$;
    4) парабола розташована в нижній напівплощині симетрично відносно осі Oy, і її параметр $p = 3$.

332. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, знайчи, що:

    1) парабола розташована симетрично відносно осі Ox і проходить черех точку $A(9,6)$;
    2) парабола розташована симетрично відносно осі Ox і проходить черех точку $B(-1,3)$;
    3) парабола розташована симетрично відносно осі Oy і проходить черех точку $C(1,1)$;
    4) парабола розташована симетрично відносно осі Oy і проходить черех точку $D(4,-8)$.

333. Скласти рівняння параболи, яка має фокус $E(0,-3)$і проходить через початок координат, знаючи, що її віссю є вісь Oy.

334. Знайти фокус F і рівняння директриси параболи $y^2 = 24x$.

335. Обчислити фокальний радіус точки M параболи $y^2 = 20x$, якщо ордината точки M рівна 7.

336. Обчислити фокальний радіус точки M параболи $y^2 = 12x$, якщо ордината точки M рівна 6.

337. На параболі $y^2 = 16x$ знайти точки, фокальний радіус яких дорівнює 13.

338. Скласти рівняння параболи, якщо даний фокус $F(-7, 0)$ і рівняння директриси $x - 7 = 0$.

339. Скласти рівняння параболи, якщо дані її фокус $F(7, 2)$ і директриса $x - 5 = 0$.

340. Скласти рівняння параболи, якщо дані її фокус $F(4, 3)$ і директриса $y + 1 = 0$.

341. Скласти рівняння параболи, якщо дані її фокус $F(2, -1)$ і директриса $x - y - 1 = 0$.

342. Дані вершина параболи $A(6, -3)$ і рівняння її директриси

$3x - 5y + 1 = 0$. Знайти фокус F цієї параболи.

343. Дані вершина параболи $A(-2, -1)$ і рівняння її директриси

$x + 2y - 1 = 0$. Скласти рівняння цієї параболи.

344. Скласти рівняння прямої, яка дотикається параболи $y^2 = 8x$ і паралельна прямій $2x + 2y - 3 = 0$.

345. Скласти рівняння прямої, яка дотикається параболи $x^2 = 16y$ і паралельна прямій $2x + 4y + 7 = 0$.

346. Провести дотичну до параболи $y^2 = 12x$ паралельно прямій

$3x - 2y + 30 = 0$ і обчислити відстань d між цією дотичною і даною прямою.

347. На параболі $y^2 = 64x$ знайти точку M_1, найближчу до прямої $4x + 3y - 14 = 0$ і обчислити відстань d від точки M_1 до цієї прямої.

348. Скласти рівняння дотичних до параболи $y^2 = 36x$, проведених з точки $A(2, 9)$.

349. З точки $A(5, 9)$ проведені дотичні до параболи $y^2 = 5x$. Скласти рівняння хорди, яка з'єднує точки дотикання.

350. Довести, що дві параболи, що мають спільну вісь і спільний фокус, розташований між їх вершинами, перетинаються під прямим кутом.

351. Довести, що коли дві параболи зі взаємно перпендикулярними осями перетинаються в чотирьох точках, то ці точки лежать на одному колі.

352. Скласти рівняння параболи, якщо дані її фокус $F(4, 2)$ і директриса $x + 3y - 6 = 0$. Визначити параметр параболи.

353. На прямій, рівняння якої $8x - 3y + 6 = 0$, знайти точку, яка однаково віддалена від прямої $x - 5 = 0$ і точки $A(-3, 2)$.

354. Знайти найменшу відстань між параболою $y^2 = 64x$ і прямою $4x + 3y + 46 = 0$.

4.4 Загальне рівняння лінії другого порядку

355. Знайти точки перетину кривої $x^2 + xy + 2y^2 - 7x - 12y + 10 = 0$ з осями координат.

356. Обчислити довжину хорди, яка відтинається кривою

$2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0$ на осі абсцис.

357. При якому значенні параметра λ крива, рівняння якої є

$2x^2 - 3xy + y^2 - 7x + \lambda y + 4 = 0$, відтинає на осі ординат хорду довжиною в 3 одиниці і при якому значенні λ відповідна крива дотикається осі ординат?

358. Знайти точки перетину кривої $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ з прямими:

1) $5x - y - 5 = 0;$ 2) $x + 2y + 2 = 0;$

3) $x + 4y - 1 = 0;$ 4) $x - 3y = 0.$

359. Знайти центр кожної з ліній:

1) $x^2 - 4xy + 5y^2 + 20x + 16y + 5 = 0;$

2) $3x^2 + 8xy + 20y^2 - 12x + 4y + 5 = 0;$

3) $x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0;$

4) $4x^2 + 10xy + 5y^2 - 2x - 4y + 3 = 0;$

5) $12x^2 + 7xy - 12y^2 - 1 = 0;$

6) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 6y + 5 = 0.$

360. Знайти центри таких кривих:

1) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0;$

2) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0;$

3) $2x^2 - 3xy - y^2 + 3x + 2y = 0;$

4) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0;$

5) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0;$

6) $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0;$

7) $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0;$

8) $x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y - 5 = 0;$

9) $9x^2 - 6xy + y^2 + 2x - 7 = 0;$

10) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 10x - 20y + 25 = 0.$

361. Крива другого порядку проходить через початок координат, через точки $A(0, 1)$ і $B(1, 0)$. Крім того відомий її центр $C(2, 3)$. Скласти рівняння цієї кривої.

362. Знайти асимптоти наступних гіпербол:

1) $3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y + 14 = 0;$

2) $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$;

3) $10xy - 2y^2 + 6x + 4y - 21 = 0$;

4) $2x^2 - 3xy - x + 3y + 4 = 0$.

363. Крива другого порядку проходить через точку $M(1, -1)$ і має своїми асимптотами дві прямі: $2x + 3y - 5 = 0$ і $5x + 3y - 8 = 0$. Скласти рівняння цієї кривої.

364. Скласти рівняння кривої, яка дотикається прямої $4x + y + 5 = 0$ і має прямі $x - 1 = 0$ і $2x - y + 1 = 0$ своїми асимптотами.

365. В точках перетину кривої $x^2 - 2y^2 - 5x + 4y + 6 = 0$ з осями координат провести дотичні до цієї кривої.

366. Написати рівняння дотичних до кривої

$$3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$$

в її точках, абсциси яких рівні -2.

367. Знаючи рівняння дотичної до кривої, заданої загальним рівнянням, вивести рівняння дотичних до кривих, заданих найпростішими рівняннями:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad y^2 = 2px; \quad xy = m.$$

368. Через початок координат провести дотичні до кривої $3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$.

369. Через точку $A(3, 4)$ провести дотичні до кривої $2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$.

370. Серед прямих, що дотикаються кривої $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$, знайти ті, які паралельні осі абсцис.

371. До даної кривої $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$ провести дотичні, паралельні прямій $3x + 3y - 5 = 0$ і визначити точки дотикання цих дотичних.

372. Скласти рівняння кривої другого порядку, що проходить через початок координат і дотикається прямої $4x+3y+2=0$ в точці $A(1,-2)$ і прямої $x-y-1=0$ в точці $B(0,-1)$.

373. Через точку $M(2,0)$ проведені дві прямі, що мають лише по одній спільній точці з кривою $3x^2-7xy+2y^2+6x-4y-5=0$. Скласти рівняння цих прямих і обчислити кут між ними.

374. При якому значенні параметра λ крива $x^2+2xy-y^2+5x-9=0$ перетинає пряму $2x-y+7=0$ тільки в одній точці?

375. Через точку $M(1,-2)$ проведений діаметр кривої $3x^2-2xy+$ $+3y^2+4x+4y-4=0$. Знайти рівняння цього діаметра і діаметра до нього спряженого.

376. Дана крива $2x^2+5xy-3y^2+3x+16y=0$. Знайти діаметр, паралельний осі абсцис, і діаметр, йому спряжений.

377. Дана крива $3x^2+2xy+2y^2+3x-4y=0$ і один з її діаметрів $x+2y-2=0$. Знайти діаметр, йому спряжений.

378. Скласти рівняння діаметра кривої $2x^2+4xy+5y^2-8x+6=0$, паралельного прямій $2x-y+5=0$.

379. Визначити діаметр кривої $6x^2-xy-2y^2+4y=0$, який утворює кут в 45° з віссю абсцис. Кут $\omega=\dfrac{\pi}{2}$.

380. Дана крива $3x^2+7xy+5y^2+4x+5y+1=0$. Знайти геометричне місце середин її хорд: 1) паралельних осі Ox; 2) паралельних осі Oy; 3) паралельних прямій $x+y+1=0$.

381. Знайти діаметр кривої $5x^2-3xy+y^2-3x+2y-5=0$, який проходить через середину хорди, що відтинається цією кривою на прямій $x-2y-1=0$.

382. Знайти середину хорди, яка відтинається кривою $2x^2+4xy+$ $+3y^2-3x-3y=0$ на прямій $x+3y-12=0$.

383. Знайти головні вісі кривих:

1) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x - 2y - 5 = 0$;

2) $5x^2 + 24xy - 2y^2 + 4x - 1 = 0$;

3) $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$.

384. Знайти вісь параболи $x^2 - 2xy + y^2 + x - 2y + 3 = 0$.

385. Знайти спільний діаметр двох кривих: $x^2 - xy - y^2 - x - y = 0$ і $x^2 + 2xy + y^2 - x + y = 0$.

386. Написати рівняння діаметра лінії $3x^2 - 5xy + y^2 + 8x = 0$, який ділить пополам хорди з кутовим коефіцієнтом $k = -\dfrac{2}{3}$.

387. Написати рівняння діаметра лінії $6x^2 - 9xy + 13y^2 + 2x + 4y + 5 = 0$, що проходить через точку $K(1, -2)$.

388. Знайти кутові коефіцієнти головних напрямків кожної з наступних ліній, заданих рівняннями:

1) $3x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x - y + 7 = 0$;

2) $x^2 + 6xy - 7y^2 + x = 0$;

3) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 3y = 0$;

4) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 2 = 0$.

389. Написати рівняння осей кожної з ліній:

1) $5x^2 + 24xy + 75y^2 - 36x + 6y + 1 = 0$;

2) $7x^2 + 26xy + 7y^2 + 42x = 0$.

390. Звести до канонічного виду рівняння ліній:

1) $x^2 + xy + y^2 + x + y = 0$;

2) $3x^2 + 4\sqrt{2}xy + 5y^2 + 6x - 1 = 0$;

3) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$.

391. Звести до канонічного виду рівняння ліній:

1) $4x^2 + 4xy + y^2 + 8x + 6y + 3 = 0$;

2) $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 8x + 14y + 3 = 0$;

3) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 12x + 24y + 15 = 0$.

392. Кожне з наступних рівнянь звести до канонічного виду:

1) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;

2) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$;

3) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$;

4) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$;

5) $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$;

6) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$.

393. Кожне з наступних рівнянь звести до канонічного виду:

1) $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 130 = 0$;

2) $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$;

3) $7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0$;

4) $50x^2 - 8xy + 35y^2 + 100x - 8y + 67 = 0$;

5) $41x^2 + 24xy + 34y^2 + 34x - 112y + 129 = 0$;

6) $29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0$;

7) $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$;

8) $41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0$.

5 МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТОРІ

5.1 Система координат в просторі

В задачах 394 – 400 система координат афінна.

394. Точки D, E, F — середини ребер BC, AC, AB тетраедра $OABC$. Знайти координати вершин цього тетраедра в репері (O, D, E, F).

395. Дані точки $A(2, -1, 7)$, $B(4, 5, -2)$. Знайти відношення, в якому кожна координатна площина ділить відрізок AB.

396. Відомі координати вершин A, B і C паралелограма $ABCD$. Обчислити координати вершини D:

1) $A(2,1,1)$, $B(3,-1,1)$, $C(0,2,-3)$;
2) $A(3,1,-1)$, $B(2,-1,1)$, $C(-2,0,3)$.

397. Точка O є точкою перетину діагоналей паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки O_1, O_2, O_3 — відповідно центри граней ADD_1A_1, ABB_1A_1, $ABCD$. Написати формули переходу від репера $R = (A, B, C, D)$ до репера $R' = (O, O_1, O_2, O_3)$.

398. Довести, що точки A, B, C і D належать одній площині:

1) $A(3,1,1)$, $B(-2,1,-2)$, $C(-3,-1,0)$, $D(2,0,1.7)$;
2) $A(-2,1,-1)$, $B(-1,1,1)$, $C(0,4,-1)$, $D(-2,4,-3)$.

399. Вектор $\vec{a}$ є напрямний вектор для прямої l. Паралельно l побудовані проекції A_1, A_2, A_3 точки $A(-3,2,1)$ на координатні площини. Обчислити координати цих проекцій, якщо

1) $\vec{a}(2,1,-1)$; 2) $\vec{a}(-1,1,2)$.

400. Дані точки $A_1(-7,3,-2)$, $A_2(0,2,1)$, $A_3(4,-1,0)$, $A_4(-1,0,-3)$. Довести, що $R' = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ — репер, і знайти його орієнтацію, вважаючи вихідний репер додатньо орієнтованим.

В задачах 401 – 425 система координат прямокутна декартова.

401. Пряма AB перетинає координатні площини Oxy і Oyz в точках M і N. Обчислити довжину відрізка MN, якщо

1) $A(2,1,1)$, $B(-2,0,3)$;
2) $A(-3,1,1)$, $B(0,-1,2)$.

402. В ортонормованому репері дані вершини $A(4,1,-2)$, $B(2,0,0)$, $C(-2,3,-5)$ трикутника ABC, AD — бісектриса його внутрішнього кута. Знайти координати точки D і довжину відрізка AD.

403. Діагональ OD прямокутного паралелепіпеда утворює кути 60° з ребрами OA і OB. Який кут вона утворює з ребром OC?

404. Обчислити координати ортогональної проекції C_1 точки C на пряму AB:

1) $A(2,-1,0)$, $B(-1,3,1)$, $C(0,1,-1)$;
2) $A(3,1,1)$, $B(-2,1,-1)$, $C(1,-1,2)$.

405. Дані дві точки A і B. Знайти множину точок C, для яких ABC — рівносторонній трикутник:

1) $A(2,3,-1)$, $B(-1,0,1)$;
2) $A(-2,1,1)$, $B(-1,1,-2)$.

406. На прямій AB знайти точку, найближчу до осі Oz:

1) $A(1,2,-1)$, $B(3,-1,1)$;
2) $A(3,4,1)$, $B(-2,1,2)$.

407. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(1,2,-4)$, $B(4,0,-10)$, $C(-2,6,8)$. Знайти внутрішні кути цього трикутника.

408. Довести, що трикутник ABC рівносторонній, якщо:

1) $A(2,3,-1)$, $B(3,-1,2)$, $C(-1,2,3)$;
2) $A(m,n,p)$, $B(n,p,m)$, $C(p,m,n)$.

409. Дані точки: $A(1,-2,-3)$, $B(2,-3,0)$, $C(3,1,-9)$, $D(-1,1,12)$. Обчислити відстань між 1) A і C; 2) B і D; 3) C і D.

410. Довести, що трикутник з вершинами $A(3,-1,2)$, $B(0,-4,2)$ і $C(-3,2,1)$ рівнобедрений.

411. Довести, що трикутник з вершинами $A(3,-1,6)$, $B(-1,7,-2)$ і $C(1,-3,2)$ прямокутний.

412. Визначити чи є тупий кут серед внутрішніх кутів трикутника $M_1(4,-1,4)$, $M_2(0,7,-4)$, $M_3(3,1,-2)$.

413. Довести, що внутрішні кути трикутника $M(3,-2,5)$, $N(-2,1,-3)$, $P(5,1,-1)$ гострі.

414. На осі абсцис знайти точку, відстань якої від точки $A(-3,4,8)$ рівна 12.

415. На осі ординат знайти точку, рівновіддалену від точок $A(1,-3,7)$ і $B(5,7,-5)$.

416. Дані вершини $M_1(3,2,-5)$, $M_2(1,-4,3)$, $M_3(-3,0,1)$ трикутника. Знайти середини його сторін.

417. Дані вершини $A(2,-1,4)$, $B(3,2,-6)$, $C(-5,0,2)$ трикутника. Обчислити довжину його медіани, проведеної з вершини A.

418. Дані дві вершини $A(2,-3,-5)$, $B(-1,3,2)$ паралелограма $ABCD$ і точка перетину його діагоналей $E(4,-1,7)$. Визначити дві інші вершини цього паралелограма.

419. Дані три вершини $A(3,-4,7)$, $B(-5,3,-2)$ і $C(1,2,-3)$ паралелограма $ABCD$. Знайти його четверту вершину D, протилежну B.

420. Дані три вершини $A(3,-1,2)$, $B(1,2,-4)$ і $C(-1,1,2)$ паралелограма $ABCD$. Знайти його четверту вершину D.

421. Відрізок прямої, обмежений точками $A(-1,8,3)$ і $B(9,-7,-2)$, поділений точками C, D, E, F на п’ять рівних частин. Знайти координати цих точок.

422. Визначити координати кінців відрізка, який точками $C(2,0,2)$ і $D(5,-2,0)$ поділений на три рівних частини.

423. Дані вершини трикутника $A(1,2,-1)$, $B(2,-1,3)$ і $C(-4,7,5)$. Обчислити довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині B.

424. Дані вершини трикутника $A(1,-1,-3)$, $B(2,1,-2)$ і $C(-5,2,-6)$. Обчислити довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині A.

425. Пряма проходить через дві точки $M_1(-1,6,6)$ і $M_2(3,-6,-2)$. Знайти точки її перетину з координатними площинами.

5.2 Векторний добуток векторів

426. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5.$, обчислити $|[\vec{a},\vec{b}]|$.

427. Дано: $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ і $\vec{a}\,\vec{b} = 12$. Обчислити $|[\vec{a},\vec{b}]|$.

428. Дано: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$ і $|[\vec{a},\vec{b}]| = 72$. Обчислити $\vec{a}\,\vec{b}$.

429. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, обчислити:

$$1)\quad |[\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}]|; \qquad 2)\quad |[3\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-2\vec{b}]|.$$

430. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{2}{3}\pi$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, обчислити:

$$1)\ [\vec{a},\vec{b}]^2, \quad 2)\ [2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}]^2, \quad 3)\ [\vec{a}+3\vec{b},3\vec{a}-\vec{b}]^2.$$

431. Якій умові повинні задовольняти вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, щоб вектори $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$ були колінеарні?

432. Дані довільні вектори: $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$, $\vec{n}$. Довести, що вектори $\vec{a} = [\vec{p},\vec{n}]$, $\vec{b} = [\vec{q},\vec{n}]$, $\vec{c} = [\vec{r},\vec{n}]$ компланарні.

433. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задовольняють умову $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$. Довести, що $[\vec{a},\vec{b}] = [\vec{b},\vec{c}] = [\vec{c},\vec{a}]$.

434. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ пов'язані співвідношеннями $[\vec{a},\vec{b}] = [\vec{c},\vec{d}]$, $[\vec{a},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{d}]$. Довести колінеарність векторів $\vec{a}-\vec{b}$ і $\vec{b}-\vec{c}$.

435. Дані вектори $\vec{a}(3,-1,-2)$ і $\vec{b}(1,2,-1)$. Знайти координати векторних добутків:
1) $[\vec{a},\vec{b}]$; 2) $[2\vec{a}+\vec{b},\vec{b}]$; 3) $[2\vec{a}-\vec{b},2\vec{a}+\vec{b}]$.

436. Дані точки $A(2,-1,2)$, $B(1,2,-1)$ і $C(3,2,1)$. Знайти координати векторних добутків 1) $[\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{BC}\ ]$; 2) $[\ \overrightarrow{BC}\ -2\ \overrightarrow{CA}\ ,\ \overrightarrow{CB}\ ]$.

437. Дані точки $A(1,2,0)$, $B(3,0,-3)$ і $C(5,2,6)$. Обчислити площу трикутника ABC.

438. Дані вершини трикутника $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$ і $C(1,3,-1)$. Обчислити довжину його висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

439. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}(2,-2,-3)$ і $\vec{b}(2,3,6)$.

440. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}(4,-2,-3)$ і $\vec{b}(0,1,3)$, утворює з віссю Oy тупий кут. Знаючи, що $|\vec{x}|=26$, знайти його координати.

441. Вектор $\vec{m}$, перпендикулярний до осі Oz і до вектора $\vec{a}(8,-15,3)$, утворює гострий кут з віссю Ox. Знаючи, що $|\vec{m}|=51$, знайти його координати.

442. Знайти вектор $\vec{x}$, знаючи, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a}(2,-3,1)$ і $\vec{b}(1,-2,3)$ і задовольняє умову: $\vec{x}\,(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})=10$.

443. Обчислити площу паралелограма $ABCD$, якщо $\overrightarrow{AB}=3\vec{m}-2\vec{n}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{m}+\vec{n}$, $|\vec{m}|=5$, $|\vec{n}|=12$, $\widehat{CAB}=30°$.

444. Обчислити площу трикутника з вершинами в точках $A(3,4,-1)$, $B(2,0,3)$ і $C(-3,5,4)$. Система координат прямокутна декартова.

445. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{p}=2\vec{a}+3\vec{b}$ і $\vec{q}=\vec{a}-4\vec{b}$, де $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

446. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB} = \vec{m} + 2\vec{n}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{m} - 3\vec{n}$, де $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 3$ і $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \dfrac{\pi}{6}$.

5.3 Мішаний добуток векторів

447. Визначити, чи є трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (правою чи лівою), якщо:

1) $\vec{a} = \vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i}, \quad \vec{c} = \vec{j};$
2) $\vec{a} = \vec{i}, \quad \vec{b} = \vec{k}, \quad \vec{c} = \vec{j};$
3) $\vec{a} = \vec{j}, \quad \vec{b} = \vec{i}, \quad \vec{c} = \vec{k};$
4) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{b} = \vec{j}, \quad \vec{c} = \vec{k};$
5) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{b} = \vec{i} - \vec{j}, \quad \vec{c} = \vec{j};$
6) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{b} = \vec{i} - \vec{j}, \quad \vec{c} = \vec{k}.$

448. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, утворюючі праву трійку, взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, обчислити $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

449. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівний 30°. Знаючи, що $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$, обчислити $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

450. Довести тотожність $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c})(\vec{c} + \vec{a}) = 2\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

451. Довести тотожність $\vec{a}\,\vec{b}\,(\vec{c} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, де λ і μ — які завгодно числа.

452. Довести, що необхідною і достатньою умовою компланарності векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є залежність $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$, де принаймні одне з чисел α, β, γ не дорівнює нулеві.

453. Дані три вектори: $\vec{a}(1, -1, 3)$, $\vec{b}(-2, 2, 1)$, $\vec{c}(3, -2, 5)$. Обчислити $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

454. Встановити чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо:

1) $\vec{a}(2, 3 - 1), \quad \vec{b}(1, -1, 3), \quad \vec{c}(1, 9, -1);$
2) $\vec{a}(3, -2, 1), \quad \vec{b}(2, 1, 2), \quad \vec{c}(3, -1, -2);$

3) $\vec{a}(2,-1,2)$, $\vec{b}(1,2,-3)$, $\vec{c}(3,-4,7)$.

455. Довести, що чотири точки $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$, $D(2,1,3)$ лежать в одній площині.

456. Обчислити об'єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках $A(2,-1,1)$, $B(5,5,4)$, $C(3,2,-1)$ і $D(4,1,3)$.

457. Дані вершини тетраедра: $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,3)$. Знайти довжину висоти, яка опущена з вершини D.

458. Об'єм тетраедра $V=5$, три його вершини знаходяться в точках $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$, $C(2,-1,3)$. Знайти координати четвертої вершини D, якщо відомо, що вона лежить на осі Oy.

459. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах

$$\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}, \quad \vec{q}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}, \quad \vec{r}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}.$$

460. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах:

1) $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}$, $\vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}-3\vec{r}$ і $\vec{c}=\vec{p}+2\vec{q}+\vec{r}$, де $\vec{p}$, $\vec{q}$ і $\vec{r}$ — взаємно перпендикулярні орти.

2) $\vec{a}=3\vec{m}+5\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, $\vec{c}=2\vec{m}+7\vec{n}$, де $|\vec{m}|=\dfrac{1}{2}$, $|\vec{n}|=3$, $(\widehat{\vec{m},\vec{n}})=135^\circ$.

461. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах:

$$\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}-5\vec{r}, \quad \vec{b}=\vec{p}-\vec{q}+4\vec{r} \quad \text{і} \quad \vec{c}=\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r},$$

якщо за основу взятий паралелограм, побудований на $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Крім того, відомо, що $\vec{p}$, $\vec{q}$ і $\vec{r}$ — взаємно перпендикулярні орти.

462. Перевірити чи компланарні дані вектори:

1) $\vec{p}=\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{q}=3\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$, $\vec{r}=7\vec{a}+14\vec{b}-13\vec{c}$;

2) $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$, $\vec{q}=\vec{a}-4\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{r}=3\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}$;

3) $\vec{p}=[\vec{a},\vec{m}]$, $\vec{q}=[\vec{b},\vec{m}]$, $\vec{r}=[\vec{c},\vec{m}]$.

де $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — взаємно перпендикулярні орти.

463. Об'єм правильної трикутної піраміди з довжиною ребра a дорівнює $\dfrac{1}{6}\, a^3$. Знайти величину плоского кута при вершині піраміди.

464. Знайти відношення об'єму паралелепіпеда до об'єму тетраедра, вершинами якого є вершина паралелепіпеда і центри, граней що через неї не проходять.

465. Знайти відношення об'єму паралелепіпеда до об'єму тетраедра, ребрами якого є діагоналі трьох граней паралелепіпеда, які виходять з однієї з його вершин.

466. Довжина діагоналі куба дорівнює a. Обчислити відстань між діагоналям, що не перетинаються, двох суміжних граней куба.

5.4 Рівняння площини

467. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2, 1, -1)$ і має нормальний вектор $\vec{n}(1, -2, 3)$.

468. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат і має нормальний вектор $\vec{n}(5, 0, -3)$.

469. Точка $P(2, -1, -1)$ є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину. Скласти рівняння цієї площини.

470. Дані дві точки $M_1(3, -1, 2)$ і $M_2(4, -2, -1)$. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_1 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

471. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1(3, 4, -5)$ паралельно двом векторам $\vec{a}_1(3, 1, -1)$ і $\vec{a}_2(1, -2, 1)$.

472. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(2, 1, -3)$ і $M_2(3, 1, 2)$ паралельно вектору $\vec{a}(3, -1, 4)$.

473. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(3, -1, 2)$, $M_2(4, -1, -1)$ і $M_3(2, 0, 2)$.

474. Встановити, які з наступних пар рівнянь визначають паралельні площини:

1) $2x - 3y + 5z - 7 = 0, \quad 2x - 3y + 5z + 3 = 0;$

2) $4x + 2y - 4z + 5 = 0, \quad 2x + y + 2z - 1 = 0;$

3) $x - 3z + 2 = 0, \quad 2x - 6z - 7 = 0.$

475. Встановити, які з наступних пар рівнянь визначають перпендикулярні площини:

1) $3x - y - 2z - 5 = 0, \quad x + 9y - 3z + 2 = 0;$

2) $2x + 3y - z - 3 = 0, \quad x - y - z + 5 = 0;$

3) $2x - 5y + z = 0, \quad x + 2z - 3 = 0.$

476. Визначити, при яких значеннях l і m наступні пари рівнянь будуть визначати паралельні площини:

1) $2x + ly + 3z - 5 = 0, \quad mx - 6y - 6z + 2 = 0;$

2) $3x - y + lz - 9 = 0, \quad 2x + my + 2z - 3 = 0;$

3) $mx + 3y - 2z - 1 = 0, \quad 2x - 5y - lz = 0.$

477. Визначити, при яких значеннях l наступні пари рівнянь будуть визначати перпендикулярні площини:

1) $3x - 5y + lz - 3 = 0, \quad x + 3y + 2z + 5 = 0;$

2) $5x + y - 3z - 3 = 0, \quad 2x + ly - 3z + 1 = 0;$

3) $7x - 2y - z = 0, \quad lx + y - 3z - 1 = 0.$

478. Визначити двохгранні кути, утворені перетином наступних пар площин:

1) $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0, \quad x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0;$

2) $3y - z = 0, \quad 2y + z = 0;$

3) $6x + 3y - 2z = 0, \quad x + 2y + 6z - 12 = 0;$

4) $x + 2y + 2z - 3 = 0, \quad 16x + 12y - 15z - 1 = 0.$

479. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат паралельно площині $5x - 3y + 2z - 3 = 0$.

480. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(3, -2, -7)$ паралельно площині $2x - 3z + 5 = 0$.

481. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат перпендикулярно двом площинам: $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y + z = 0$.

482. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2, -1, 1)$ перпендикулярно двом площинам $2x - z + 1 = 0$, $y = 0$.

483. Скласти рівняння площини, яка проходить через дві точки $M_1(1, -1, -2)$ і $M_2(3, 1, 1)$ перпендикулярно до площини

$x - 2y + 3z - 5 = 0$.

484. Встановити, що три площини $x-2y+z-7 = 0$, $2x+y-z+2 = 0$, $x - 3y + 2z - 11 = 0$ мають одну спільну точку, та обчислити її координати.

485. Довести, що три площини $7x+4y+7z+1 = 0$, $2x-y-z+2 = 0$, $x + 2y + 3z - 1 = 0$ проходять через одну пряму.

486. Довести, що три площини $2x-y+3z-5 = 0$, $3x+y+2z-1 = 0$, $4x + 3y + z + 2 = 0$ перетинаються по трьом різним паралельним прямим.

487. Визначити, при яких значеннях a і b площини $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y - z + b = 0$, $x + ay - 6z + 10 = 0$: 1) мають одну спільну точку; 2) проходять через одну пряму; 3) перетинаються по трьом різним паралельним прямим.

488. Скласти рівняння площини, яка проходить:

1) через точки $M_1(7, 2, -3)$ і $M_2(5, 6, -4)$ паралельно осі Ox;
2) через точки $P_1(2, -1, 1)$ і $P_2(3, 1, 2)$ паралельно осі Oy;

3) через точки $Q_1(3, -2, 5)$ і $Q_2(2, 3, 1)$ паралельно осі Oz.

489. Обчислити площу трикутника, який відтинає площина $5x - 6y + 3z + 120 = 0$ від координатного кута Oxy.

490. Обчислити об'єм піраміди, обмеженої площиною

$$2x - 3y + 6z - 12 = 0$$

і координатними площинами.

491. Площина проходить через точку $M_1(6, -10, 1)$і відтинає на осі абсцис відрізок $a = -3$ і на осі аплікат відрізок $c = 2$. Скласти для цієї площини рівняння "у відрізках".

492. Площина проходить через точки $M_1(1, 2, -1)$ і $M_2(-3, 2, 1)$ і відтинає на осі ординат відрізок $b = 3$. Скласти для цієї площини рівняння "у відрізках".

493. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2, -3, -4)$ і відтинає на координатних осях відмінні від нуля відрізки однакової величини.

494. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(-1, 4, -1)$, $M_2(-13, 2, -10)$ і відтинає на осях абсцис і аплікат відмінні від нуля відрізки однакової довжини.

495. Скласти рівняння площини, яка відтинає на осі Oz відрізок $c = -5$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n}(-2, 1, 3)$.

496. Скласти рівняння площини, яка паралельна вектору $\vec{l}(2, 1, -1)$ і відтинає на координатних осях Ox і Oy відрізки $a = 3$, $b = -2$.

497. Скласти рівняння площини, яка перпендикулярна до площини $2x - 2y + 4z - 5 = 0$ і відтинає на координатних осях Ox і Oy відрізки $a = -2$, $b = \dfrac{2}{3}$.

498. Обчислити відстань d від точки до площини в кожному з наступних випадків:

1) $M_1(-2;-4;3)$, $\quad 2x - y + 2z + 3 = 0$;

2) $M_2(2;-1;-1)$, $\quad 16x - 12y + 15z - 4 = 0$;

3) $M_3(1;2;-3)$, $\quad 5x - 3y + z + 4 = 0$.

499. Обчислити відстань d від точки $P(-1;1;-2)$до площини, що проходить через три точки $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$, $M_3(4;-5;-2)$.

500. Визначити, чи лежить точка $Q(2;-1;1)$ і початок координат по один або по різні боки відносно кожної з наступних площин:

1) $5x - 3y + z - 18 = 0$; $\quad$ 2) $2x + 7y + 3z + 1 = 0$;

3) $x + 5y + 12z - 1 = 0$; $\quad$ 4) $2x - y + z + 11 = 0$;

5) $2x + 3y - 6z + 2 = 0$; $\quad$ 6) $3x - 2y + 2z - 7 = 0$.

501. Довести, що площина $3x - 4y - 2z + 5 = 0$ перетинає відрізок, обмежений точками $M_1(3;-2;1)$ і $M_2(-2;5;2)$.

502. Довести, що площина $5x - 2y + z - 1 = 0$ перетинає відрізок, обмежений точками $M_1(1;4;-3)$ і $M_2(2;5;0)$.

503. В кожному з наступних випадків обчислити відстань між паралельними площинами:

1) $x - 2y - 2z - 12 = 0$;
$x - 2y - 2z - 6 = 0$;

2) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$;
$4x - 6y + 12z + 21 = 0$;

3) $2x - y + 2z + 9 = 0$;
$4x - 2y + 4z - 21 = 0$;

4) $16x + 12y - 15z + 50 = 0$;
$16x + 12y - 15z + 25 = 0$;

5) $30x - 32y + 24z - 75 = 0$;
$15x - 16y + 12z - 25 = 0$;

6) $6x - 18y - 9z - 28 = 0$,
$4x - 12y - 6z - 7 = 0$.

504. Дві грані куба лежать на площинах

$$2x - 2y + z - 1 = 0, \quad 2x - 2y + z + 5 = 0.$$

Обчислити об'єм цього куба.

505. На осі Oy знайти точку, яка знаходиться на відстані $d = 4$ від площини $x + 2y - 2z - 2 = 0$.

506. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від точки $M(1; -2; 0)$ і від площини $3x - 2y + 6z - 9 = 0$.

507. На осі Ox знайти точку, рівновіддалену від двох площин: $12x - 16y + 15z + 1 = 0$, $2x + 2y - z - 1 = 0$.

508. Вивести рівняння геометричного місця точок, відстань яких від площини $4x - 4y - 2z + 3 = 0$ дорівнює 2.

509. Скласти рівняння площин, паралельних площині

$$2x - 2y - z - 3 = 0,$$

які знаходяться від неї на відстані $d = 5$.

510. В кожному з наступних випадків скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від двох паралельних площин:

$$1)\ \begin{aligned} &4x - y - 2z - 3 = 0; \\ &4x - y - 2z - 5 = 0; \end{aligned} \qquad 2)\ \begin{aligned} &3x + 2y - z + 3 = 0; \\ &3x + 2y - z - 1 = 0. \end{aligned}$$

511. В кожному з наступних випадків скласти рівняння площин, які ділять пополам двохгранні кути, утворені двома площинами, що перетинаються:

$$1)\ \begin{aligned} &x - 3y + 2z - 5 = 0; \\ &3x - 2y - z + 3 = 0; \end{aligned} \qquad 2)\ \begin{aligned} &5x - 5y - 2z - 3 = 0; \\ &x + 7y - 2z + 1 = 0. \end{aligned}$$

512. В кожному з наступних випадків визначити, чи лежить точка $M(2; -1; 3)$ і початок координат в одному, в суміжних або вертикальних двохгранних кутах, утворених при перетині двох площин:

$$1)\ \begin{aligned} &2x - y + 3z - 5 = 0; \\ &3x + 2y - z + 3 = 0; \end{aligned} \qquad 2)\ \begin{aligned} &2x + 3y - 5z - 15 = 0; \\ &5x - y - 3z - 7 = 0. \end{aligned}$$

513. В кожному з наступних випадків визначити, чи лежать точки $M(2;-1;1)$ і $N(1;2;-3)$ в одному, в суміжних або вертикальних двохгранних кутах, утворених при перетині двох площин:

$$1)\ \begin{array}{l} 3x-y+2z-3=0; \\ x-2y-z+4=0; \end{array} \quad 2)\ \begin{array}{l} 2x-y+5z-1=0; \\ 3x-2y+6z-1=0. \end{array}$$

514. Визначити, чи лежить початок координат всередині гострого або тупого кута, утвореного двома площинами: $x-2y+3z-5=0$, $2x-y-z+3=0$.

515. Визначити, чи лежить точка $M(3;2;-1)$ всередині гострого або тупого кута, утвореного двома площинами: $5x-y+z+3=0$, $4x-3y+2z+5=0$.

516. Скласти рівняння площини, яка ділить пополам той двохгранний кут між двома площинами $2x-14y+6z-1=0$, $3x+5y-5z+3=0$, в якому лежить початок координат.

517. Скласти рівняння площини, яка ділить пополам двохгранний кут між двома площинами $2x-y+2z-3=0$, $3x+2y-6z-1=0$, в якому лежить точка $M(1;2;-3)$.

518. Скласти рівняння площини, яка ділить пополам гострий двохгранний кут, утворений двома площинами: $2x-3y-4z-3=0$, $4x-3y-2z-3=0$.

519. Скласти рівняння площини, яка ділить пополам тупий двохгранний кут, утворений двома площинами: $3x-4y-z+5=0$, $4x-3y+z+5=0$.

520. Записати параметричні рівняння площини трикутника ABC, якщо в репері $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ дані координати його вершин: $A(2;-5;1)$, $B(3;4;-2)$, $C(0;0;-1)$.

521. Площина П задана рівнянням $5x-2y-3z+6=0$. Знайти координати якого-небудь вектора $\vec{a}$, паралельного площині П.

522. Написати параметричні рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2;-1;3)$ паралельно площині $2x-y+3z-1=0$.

523. В афінному репері дані вершини $A(4;0;2)$, $B(0;5;1)$, $C(4;-1;3)$, $A_1(3,-1,5)$ паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Написати рівняння площин, які містять його грані.

524. Дані дві площини рівняннями:

$$\Pi_1\colon x-y-z-7=0, \quad \Pi_2\colon 2x+y-3z+3=0$$

в афінному репері.

(a) Скласти систему лінійних нерівностей, які визначають той двохгранний кут, утворений площинами Π_1, Π_2, якому належить точка $M_0(3;-4;3)$.

(b) Визначити розташування точок $M_1(2;-1;3)$, $M_2(3;-4;-5)$ відносно двохгранних кутів, утворених площинами Π_1, Π_2.

525. В репері $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ дані координати вершин $A(0;0;2)$, $B(3,0,5)$, $C(1;1;0)$, $D(4;1;2)$ тетраедра. Визначити розташування точки $M_0\left(2,\dfrac{1}{2},\dfrac{9}{4}\right)$ відносно цього тетраедра.

526. Дані рівняння площин

$$\Pi_1\colon\ x-2y-3z+5=0, \quad \Pi_2\colon\ 2x-4y-6z+7=0$$

в репері $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$. Визначити нерівностями кожну з трьох областей Φ_i, на які площини Π_1, Π_2 поділяють всі точки простору, які їм не належать $(i=1,2,3)$.

527. Написати рівняння площини Π, що проходить через основу $M_0(2;6;-4)$ перпендикуляра, проведеного через початок O репера $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ до площини Π.

528. Дані координати вершин $A(1;0;-2)$, $B(2;1;-1)$, $C(0;2;-3)$, $D(-1;-2;1)$ тетраедра $ABCD$ в репері $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Знайти координати точки D', симетричної вершині D відносно площини грані ABC.

529. Написати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(2;-3;3)$, $M_2(5;1;2)$ перпендикулярно до площини

$x-3y-2z-3=0$.

530. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2;-3;1)$ перпендикулярно до площин $x+3y-z+3=0$, $2x+y-2z+1=0$.

531. Обчислити косинус двохгранного кута, утвореного площинами $2x-y-2z+5=0$, $x-2y-2z+7=0$, якому належить точка $M_0(2,-3,-1)$.

532. В репері $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ дані рівняння площин

$$\Pi_1\colon\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ \Pi_2\colon\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

а також точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Довести, що точка M_0 лежить всередині гострого кута, утвореного площинами Π_1, Π_2, тоді і тільки тоді, коли виконується нерівність $(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)<0$.

533. Дані вершини тетраедра $A(0;0;3)$, $B(1;-2;1)$, $C(0;-2;2)$, $D(1;1;1)$. Обчислити довжину висоти DH $(R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}))$.

534. Дані рівняння паралельних площин $4x+6y+2z-7=0$, $2x+3y+z+5=0$ в репері $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Написати рівняння площини, що проходить посередині між даними площинами.

535. В репері $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ дані рівняння площин $2x-y-z+3=0$, $4x-2y-2z+5=0$. Написати рівняння площини, паралельної даним площинам, яка не розташована між ними і знаходиться від першої площини на відстані вдвічі більшій, ніж від другої.

536. Дані рівняння паралельних площин $Ax+By+Cz+D_1=0$, $Ax+By+Cz+D_2=0$ $(D_1\neq D_2)$ в ортонормованому репері R. Знайти відстань між цими площинами.

537. В репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ дані рівняння площин двох граней куба:

$$x - 2y - 2z + 4 = 0, \quad 2x + 2y - z - 13 = 0$$

і координати його центра $M_0(1; 1; -2)$. Знайти рівняння решти граней куба.

538. Написати рівняння бісекторної площини того двохгранного кута, утвореного площинами $x - y + 2z - 1 = 0$, $2x - y + z - 3 = 0$, якому належить точка $M_0(1; 1; 1)$.

539. В репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ написати рівняння бісекторної площини того двохгранного кута, утвореного площинами $x - y + 2z - 5 = 0$, $2x - y - 2z + 7 = 0$, якому належить точка $M_0(1; -1; 1)$.

540. Трикутна піраміда задана координатами своїх вершин: $A(1; 1; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 0)$, $D(1; 5; 7)$. Написати рівняння бісекторної площини двохгранного кута $B \cdot (AD) \cdot C$.

541. Дані вершини тетраедра $A(-1; -2; 0)$, $B(5; 0; 5)$, $C(3; 2; 2)$, $D(-1; 0; 2)$. Написати рівняння бісекторної площини внутрішнього кута при ребрі AB і знайти косинус цього кута.

542. Написати рівняння бісекторної площини гострого двохгранного кута, утвореного площинами $3x - 2y - z + 3 = 0$, $2x - 3y + z - 5 = 0$.

543. В афінному репері дані рівняння площин, які містять грані тетраедра $ABCD$: $\Pi_1 : x + 2y + z + 2 = 0$, $\Pi_2 : x - y - z = 0$, $\Pi_3 : x + y - 1 = 0$, $\Pi_4 : 3x + z + 1 = 0$. Написати рівняння площини, що проходить через вершину $A = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$, паралельно площині Π_4.

5.5 Рівняння прямої в просторі

544. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(2; 0; -3)$ паралельно: 1) вектору $\vec{a}(2; -3; 5)$; 2) прямій $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$; 3) осі Ox; 4) осі Oy; 5) осі Oz.

545. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки: 1) $(1;-2;1)$, $(3;1;-1)$; 2) $(3;-1;0)$, $(1;0;-3)$; 3) $(0;-2;3)$, $(3;-2;1)$; 4) $(1;2;-4)$, $(-1;2;-4)$.

546. Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(1;-1;-3)$ паралельно: 1) вектору $\vec{a}(2;-3;4)$; 2) прямій $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{0}$; 3) прямій $x=3t-1$, $y=-2t+3$, $z=5t+2$.

547. Скласти параметричні рівняння прямої, що проходить через дві дані точки: 1) $(3;-1;2)$, $(2;1;1)$; 2) $(1;1;-2)$, $(3;-1;0)$; 3) $(0;0;1)$, $(0;1;-2)$.

548. Через точки $M_1(-6;6;-5)$ і $M_2(12;-6;1)$ проведена пряма. Визначити точки перетину цієї прямої з координатними площинами.

549. Дані вершини трикутника $A(3;6;-7)$, $B(-5;2;3)$ і $C(4;-7;-2)$. Скласти параметричні рівняння його медіани, проведеної з вершини C.

В задачах 550 – 565 система координат прямокутна декартова.

550. Дані вершини трикутника $A(3;-1;-1)$, $B(1;2;-7)$ і $C(-5;14;-3)$. Скласти канонічні рівняння бісектриси його внутрішнього кута при вершині C.

551. Дані вершини трикутника $A(2;-1;-3)$, $B(5;2;-7)$ і $C(-7;11;6)$. Скласти канонічні рівняння бісектриси його зовнішнього кута при вершині A.

552. Дані вершини трикутника $A(1;-2;-4)$, $B(3;1;-3)$ і $C(5;1;-7)$. Скласти параметричні рівняння його висоти, опущеної з вершини B на протилежну сторону.

553. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(2;3;-5)$ паралельно прямій $\begin{cases} 3x-y+2z-7=0, \\ x+3y-2z+3=0. \end{cases}$

554. Скласти канонічні рівняння наступних прямих:

$$1)\ \begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 5x+y+z=0, \\ 2x+3y-2z+5=0. \end{cases}$$

555. Скласти параметричні рівняння наступних прямих:

$$1)\ \begin{cases} 2x+3y-z-4=0, \\ 3x-5y+2z+1=0; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x+2y-z-6=0, \\ 2x-y+z+1=0. \end{cases}$$

556. Довести паралельність прямих:

$$1)\quad \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0; \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} x=2t+5, \\ y=-t+2, \\ z=t-7 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0; \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} x+y-3z+1=0, \\ x-y+z+3=0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x+2y-5z-1=0, \\ x-2y+3z-9=0. \end{cases}$$

557. Довести перпендикулярність прямих:

$$1)\quad \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 3x+y-5z+1=0, \\ 2x+3y-8z-9=0; \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} x=2t+1, \\ y=3t-2, \\ z=-6t+1 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0; \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} x+y-3z-1=0, \\ 2x-y-9z-2=0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 2x+y+2z+5=0, \\ 2x-2y-z+2=0. \end{cases}$$

558. Знайти гострий кут між прямими:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

559. Знайти тупий кут між прямими: $x = 3t - 2$, $y = 0$, $z = -t + 3$ і $x = 2t - 1$, $y = 0$, $z = t - 3$.

560. Визначити косинус кута між прямими:

$$\begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0, \\ 2x + y - 2z - 4 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0, \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0. \end{cases}$$

561. Довести, що прямі, які задані параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = 2t - 3, \\ y = 3t - 2, \\ z = -4t + 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t + 5, \\ y = -4t - 1, \\ z = t - 4, \end{cases}$$

перетинаються.

562. Дані прямі

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}, \quad \frac{x-3}{l} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2};$$

при якому значенні l вони перетинаються?

563. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(-1; 2; -3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{a}(6; -2; -3)$ і перетинає пряму $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-5}$.

564. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(-4; -5; 3)$ і перетинає дві прямі

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}, \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}.$$

565. Скласти параметричні рівняння спільного перпендикуляра двох прямих, заданих рівняннями $x = 3t - 7$, $y = -2t + 4$, $z = 3t + 4$ і $x = t + 1$, $y = 2t - 8$, $z = -t - 12$.

566. Визначити, яка з точок $M_1(-1; 2; -1)$, $M_2(2; 1; 3)$ належить прямій l, яка задана в репері $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ рівняннями: $x = 2 - 3t$, $y = 1 + t$, $z = -3 + 2t$.

567. Написати параметричні рівняння прямої l, що проходить через точку $M_0(2;3;-1)$ паралельно прямій l', заданої в репері $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ рівняннями: $x-2y-3z-3=0$, $2x+y-z+5=0$.

568. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2;-1;0)$ перпендикулярно до прямої $l : x = t$, $y = -1-3t$, $z=-1-2t$ і перетинає її ($R = (O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$).

569. Знайти координати точки M_2, симетричної точці $M_1(3;1;-4)$ відносно прямої l, заданої в репері $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ рівняннями:

$x=-1+2t$, $y=-4-t$, $z=-1-t$.

570. В репері $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ прямі l_1 і l_2 задані рівняннями:

$$\begin{cases} x = 2t+1, \\ y = -t, \\ z = 3+2t; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y-2z-1=0, \\ 2x+2y+z+3=0. \end{cases}$$

Обчислити косинус кута між цими прямими.

571. Визначити взаємне розташування прямих l_1 і l_2, заданих в репері $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ рівняннями:

$$1)\ \begin{cases} x = 1+2t, \\ y = 7+t, \\ z = 3+4t; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 6+3t, \\ y = -1-2t, \\ z = -2+t; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x = 1+2t, \\ y = 2-2t, \\ z = -t; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2t, \\ y = -5+3t, \\ z = 4; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 2x+3y=0, \\ x+z-8=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} z-4=0, \\ 2x+3z-7=0; \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} x = t, \\ y = -8-4t, \\ z = -3-3t, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y-z=0, \\ 2x-y+2z=0; \end{cases}$$

5) $\begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = 1 + t, \\ z = -1 - 2t, \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 + 6t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = 1 + 4t, \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2y - z + 2 = 0, \\ x - 7y + 3z - 17 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = -1, \\ z = 4 - t. \end{cases}$

572. Написати рівняння прямої, що лежить в площині, яка задана в афінному репері рівнянням $y + 2z = 0$, і перетинає прямі l_1 і l_2, рівняння яких:

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = t, \\ z = 4t; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 4 + 2t, \\ z = 1. \end{cases}$$

573. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2; 3; 1)$ і перетинає прямі l_1 і l_2, шо задані в афінному репері рівняннями:

$$l_1 : \begin{cases} x + y = 0, \\ x - y + z + 4 = 0; \end{cases} \qquad l_2 : \begin{cases} x + 3y - 1 = 0, \\ y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

574. Довести, що прямі l_1 і l_2, які задані в афінному репері рівняннями

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 11t, \\ y = -1 - 5t, \\ z = 1 - 7t; \end{cases} \qquad l_2 : \begin{cases} 2x + 3y + z - 7 = 0, \\ x - 2y + 3z + 6 = 0. \end{cases}$$

паралельні ($l_1 \neq l_2$), і написати рівняння прямої l, що проходить посередині між l_1 і l_2.

575. Написати рівняння прямої, яка містить висоту AH трикутника ABC, якщо $A(-1; 1; 2)$, $B(1; 1; 0)$, $C(2; 6; -2)$ в репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

576. Довести, що прямі l_1 і l_2, задані в репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ рівняннями

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 + t, \\ z = 2t; \end{cases} \qquad l_2 : \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 3 + 2t, \\ z = 2 + 2t, \end{cases}$$

перетинаються, і написати рівняння прямої, яка містить бісектрису гострих кутів, утворених прямими l_1, l_2.

577. Знайти рівняння спільного перпендикуляра мимобіжних прямих l_1, l_2, заданих в репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ рівняннями:

$$l_1: \begin{cases} x = 3 + t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 4; \end{cases} \qquad l_2: \begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ x + y - z + 4 = 0. \end{cases}$$

578. Написати рівняння прямої, яка містить бісектрису AD внутрішнього кута трикутника ABC, якщо в ортонормованому репері дані вершини $A(4; 1; -2)$, $B(2; 0; 0)$, $C(-2; 3; -5)$.

579. В репері $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ дані рівняння прямої l:

$$x = 2 - t, \quad y = 3 + 2t, \quad z = -3t$$

і площини $\Pi: \ 2x + 2y - z - 5 = 0$. Написати рівняння прямої l', яка проходить через точку $M_1(5; 1; -2)$, паралельно площині Π і перетинає пряму l.

580. Написати рівняння ортогональної проекції прямої l, яка задана рівняннями: $x = 1 - 2t$, $y = 3 + t$, $z = 3t$, на площину $\Pi: \ x - y - z - 5 = 0$ $\big(R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\big)$.

581. В репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ дані рівняння прямої l:

$$x = 2t, \quad y = 1 - t, \quad z = 3 + t$$

і площини $\Pi: \ x + y + z - 10 = 0$. Написати рівняння прямої $l' \subset \Pi$, перпендикулярної до прямої l і яка проходить через точку $M = \Pi \cap l$.

582. В репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ дані рівняння прямих

$$l_1: \ x = 2 + 4t, \quad y = -1 + t, \quad z = 1 - t;$$

$$l_2: \ x = -4 + 2t, \quad y = 2 - 2t, \quad z = -2 - 3t.$$

Довести, що прямі l_1, l_2 мимобіжні. Знайти рівняння площини Π, паралельної прямим l_1, l_2 і яка однаково віддалена від них.

583. Довести, що прямі l_1, l_2, які задані в репері $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ рівняннями

$$l_1: \ x-y-3z=0, \quad x-2y+z=0;$$

$$l_2: \ x=1+4t, \quad y=-2+7t, \quad z=1-t,$$

перетинаються, точка $M_0(2;-1;1)$ є внутрішньою точкою одного з кутів, утворених прямими l_1, l_2, і написати рівняння прямої, яка містить бісектрису цього кута.

584. В репері $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ дані точки: $A(5;-3;2)$, $B(2;-1;0)$, $C(-1;2;-2)$, $D(2;4;-5)$. Написати рівняння спільного перпендикуляра до прямих AB і CD.

585. Знайти рівняння площини Π, яка проходить через пряму l, що задана в репері $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ рівняннями:

$$2x-y-3z-5=0, \qquad x+y-z+1=0$$

і паралельна вектору $\vec{a}(1;3;-2)$.

5.6 Задачі на площину і пряму в просторі

В наступних задачах система координат прямокутна декартова.

586. Довести, що пряма $x=3t-2$, $y=-4t+1$, $z=4t-5$ паралельна площині $4x-3y-6z-5=0$.

587. Довести, що пряма $\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0, \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$ лежить в площині $4x-3y+7z-7=0$.

588. Згайти точку перетину прямої і площини:

$$1)\ \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}, \qquad 2x+3y+z-1=0;$$

$$2)\ \frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-5}, \quad x-2y+z-15=0;$$

$$3)\ \frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}, \quad x+2y-2z+6=0.$$

589. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;-4;-1)$ і середину відрізка прямої

$$\begin{cases} 3x+4y+5z-26=0, \\ 3x-3y-2z-5=0, \end{cases}$$

який знахобиться між площинами

$$5x+3y-4z+11=0, \quad 5x+3y-4z-41=0.$$

590. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;-3;-5)$ перпендикулярно до площини $6x-3y-5z+2=0$.

591. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1;-1;-1)$ перпендикулярно до прямої

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}.$$

592. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1;-2;1)$ перпендикулярно до прямої

$$\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$$

593. При якому значенні m пряма $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{m}=\dfrac{z+3}{-2}$ паралельна площині $x-3y+6z+7=0$.

594. При якому значенні C пряма $\begin{cases} 3x-2y+z+1=0, \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$ паралельна площині $2x-y+Cz-2=0$?

595. При яких значеннях A і D пряма $x=3+4t$, $y=1-4y$, $z=-3+t$ лежить в площині $Ax+2y-4z+D=0$?

596. При яких значеннях A і B площина $Ax+By+3z-5=0$ препендикулярна до прямої $x=3+2t$, $y=5-3t$, $z=-2-2t$?

597. При яких значеннях l і C пряма $\dfrac{x-2}{l}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-5}{-3}$ перпендикулярна до площини $3x-2y+Cz+1=0$?

598. Знайти проекцію точки $P(2;-1;3)$ на пряму $x=3t$, $y=5t-7$, $z=2t+2$.

599. Знайти точку Q, симетричну точці $P(4;1;6)$ відносно прямої

$$\begin{cases} x-y-4z+12=0, \\ 2x+y-2z+3=0. \end{cases}$$

600. Знайти точку Q, симетричну точці $P(2;-5;7)$ відносно прямої, що проходить через точки $M_1(5;4;6)$ і $M_2(-2;-17;-8)$.

601. Знайти проекцію точки $P(5;2;-1)$ на площину, рівняння якої $2x-y+3z+23=0$.

602. Знайти точку Q, симетричну точці $P(1;3;-4)$ відносно площини $3x+y-2z=0$.

603. На площині Oxy знайти таку точку P, сума відстаней яких до точок $A(-1;2;5)$ і $B(11;-16;10)$ була б найменшою.

604. На площині Oxz знайти таку точку P, різниця відстаней яких до точок $M_1(3;2;-5)$ і $M_2(8;-4;-13)$ була б найбільшою.

605. На площині $2x-3y+3z-17=0$ знайти таку точку P, сума відстаней яких до точок $A(3;-4;7)$ і $B(-5;-14;17)$ була б найменшою.

606. На площині $2x+3y-4z-15=0$ знайти таку точку P, різниця відстаней яких до точок $M_1(5;2;-7)$ і $M_2(7;-25;10)$ була б найбільшою.

607. Обчислити відстань d точки $P(1;-1;-2)$ від прямої

$$\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}.$$

608. Обчислити відстань d від точки $P(2;3;-1)$ до наступних прямих:

1) $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+25}{-2}$;

2) $x=t+1,\quad y=t+2,\quad z=4t+13$;

3) $\begin{cases} 2x-2y+z=0, \\ 3x-2y+2z+17=0. \end{cases}$

609. Переконавшись, що прямі

$$\begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0; \end{cases} \qquad \frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$$

паралельні, обчислити відстань між ними.

610. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(1;2;-3)$ паралельно прямим

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3}, \qquad \frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}.$$

611. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $x=2t+1$, $y=-3t+2$, $z=2t-3$ і точку $M_1(2;-2;1)$.

612. Довести, що прямі

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}; \qquad \begin{cases} x=3t+7, \\ y=2t+2, \\ z=-2t+1 \end{cases}$$

лежать в одній площині, і скласти рівняння цієї площини.

613. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні площини

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}, \qquad \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}.$$

614. Знайти проекцію точки $C(3;-4;-2)$ на площину, що проходить через паралельні прямі

$$\frac{x-5}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4}, \qquad \frac{x-2}{13}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{-4}.$$

615. Знайти точку Q, симетричну точці $P(3;-4;-6)$ відносно площини, що проходить через точки $M_1(-6;1;-5)$, $M_2(7;-2;-1)$ і $M_3(10;-7;1)$.

616. Знайти точку Q, симетричну точці $P(-3;2;5)$ відносно площини, що проходить через прямі

$$\begin{cases} x-2y+3z-5=0, \\ x-2y-4z+3=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+y+3z+7=0, \\ 5x-3y+2z+5=0. \end{cases}$$

617. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму

$x=3t+1$, $y=2t+3$, $z=-t-2$ паралельно прямій

$$\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+2y-z-5=0. \end{cases}$$

618. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$$

перпендикулярно до площини $3x+2y-z-5=0$.

619. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3;-2;-4)$ паралельно площині $3x-2y-3z-7=0$і перетинає пряму $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}$.

620. Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить паралельно площинам

$$3x+12y-3z-5=0, \qquad 3x-4y+9z+7=0$$

і перетинає прямі

$$\frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{3}, \quad \frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}.$$

621. Обчислити найкоротшу відстань між двома прямими в кожному з наступних випадків:

1) $$\frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}; \qquad \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1};$$

2) $$\begin{cases} x = 2t-4, \\ y = -t+4, \\ z = -2t-1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4t-5, \\ y = -3t+5, \\ z = -5t+5; \end{cases}$$

3) $$\frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}, \qquad \begin{cases} x = 6t+9, \\ y = -2t, \\ z = -t+2. \end{cases}$$

622. В репері $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ дані рівняння прямої l:

$$2x - y - z - 5 = 0, \qquad x + y - 2z + 3 = 0$$

і площини $\Pi:\ x - 3y + z - 1 = 0$. Написати рівняння ортогональної проекції прямої l на площину Π.

5.7 Задачі на сферу

В наступних задачах система координат прямокутна декартова.

623. Скласти рівняння сфери в кожному з наступних випадків:

1) сфера має центр $C(0;0;0)$ і радіус $r = 9$;
2) сфера має центр $C(5;-3;7)$ і радіус $r = 2$;
3) сфера проходить через початок координат і має центр $C(4;-4;-2)$;
4) сфера проходить через точку $A(2;-1;-3)$ і має центр $C(3;-2;1)$;
5) точки $A(2;-3;5)$ і $B(4;1;-3)$ є кінцями одного з діаметрів сфери;
6) центром сфери є початок координат, і площина $16x - 15y - 12z + 75 = 0$ дотикається до сфери;

7) сфера має центр $C(3;-5;-2)$ і площина $2x-y-3z+11=0$ дотикається до сфери;

8) сфера проходить через три точки $M_1(3;1;-3)$, $M_2(-2;4;1)$ і $M_3(-5;0;0)$, а центр лежить на площині $2x+y-z+3=0$;

9) сфера проходить через чотири точки: $M_1(1;-2;-1)$, $M_2(-5;10;-1)$, $M_3(4;1;11)$, $M_4(-8;-2;2)$.

624. Скласти рівняння сфери радіуса $r=3$, яка дотикається площини $x+2y+2z+3=0$ в точці $M_1(1;1;-3)$.

625. Обчислити радіус R сфери, яка дотикається площин

$$3x+2y-6z-15=0, \quad 3x+2y-6z+55=0.$$

626. Сфера, центр якої лежить на прямій $\begin{cases} 2x+4y-z-7=0, \\ 4x+5y+z-14=0 \end{cases}$ дотикається площин $x+2y-2z-2=0$, $x+2y-2z+4=0$. Скласти рівняння цієї сфери.

627. Скласти рівняння сфери, яка дотикається двох паралельних площин

$$6x-3y-2z-35=0, \qquad 6x-3y-2z+63=0,$$

причому однієї з них в точці $M_1(5;-1;-1)$.

628. Скласти рівняння сфери з центром $C(2;3;-1)$, яка відтинає від прямої

$$\begin{cases} 5x-4y+3z+20=0, \\ 3x-4y+z-8=0 \end{cases}$$

хорду, яка має довжину, рівну 16.

629. Визначити координати центра C і радіус r сфери, яка задана одним з наступних рівнянь:

1) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=16$;

2) $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=9$;

3) $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-19=0$;

4) $x^2+y^2+z^2-6z=0$;

5) $x^2+y^2+z^2+20y=0$.

630. Скласти параметричні рівняння діаметра сфери

$$x^2+y^2+z^2+2x-6y+z-11=0,$$

перпендикулярного до площини $5x-y+2z-17=0$.

631. Скласти канонічні рівняння діаметра сфери

$$x^2+y^2+z^2-x+3y+z-13=0,$$

паралельного прямій $x=2t-1$, $y=-3t+5$, $z=4t+7$.

632. Обчислити найкоротшу відстань від точки A до даної сфери в таких випадках:

а) $A(-2;6;-3)$, $\quad x^2+y^2+z^2=4$;

б) $A(9;-4;-3)$, $\quad x^2+y^2+z^2+14x-16y-24z+241=0$;

в) $A(1;-1;3)$, $\quad x^2+y^2+z^2-6x+4y-10z-62=0$.

633. Визначити, як розташована площина відносно сфери — чи перетинає, дотикається або проходить поза нею; площина і сфера задані наступними рівняннями:

1) $z=3$, $\quad x^2+y^2+z^2-6x+2y-10z+22=0$;

2) $y=1$, $\quad x^2+y^2+z^2+4x-2y-6z+14=0$;

3) $x=5$, $\quad x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-4=0$.

634. Визначити, як розташована площина відносно сфери — чи перетинає, дотикається або проходить поза нею; площина і сфера задані наступними рівняннями:

1) $\begin{cases} x=-2t+2, \\ y=3t-\frac{7}{2}, \\ z=t-2, \end{cases} \qquad x^2+y^2+z^2+x-4y-3z+\dfrac{1}{2}=0$;

2) $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+25}{-2}$, $\quad x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z-67=0$;

3) $\begin{cases} 2x-y+2z-12=0, \\ 2x-4y-z+6=0, \end{cases}$ $\quad x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z-43=0$.

635. На сфері $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25$ знайти точку M_1, найближчу до площини $3x-4z+59=0$, і обчислити відстань d від точки M_1 до цієї площини.

636. Скласти рівняння дотичної площини до сфери $x^2+y^2+z^2=49$ в точці $M_1(6;-3;-2)$.

637. Довести, що площина $2x-6y+3z-49$ дотикається сфери $x^2+y^2+z^2=49$. Обчислити координати точки дотикання.

638. Скласти рівняння дотичної площини до сфери

$$(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=24$$

в точці $M_1(-1;3;0)$.

639. Через точки перетину прямої $x=3t-5$, $y=5t-11$, $z=-4t+9$ і сфери $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2=49$ проведені дотичні площини до цієї сфери. Скласти їх рівняння.

640. Скласти рівняння площин, дотичних до сфери $x^2+y^2+z^2=9$ і паралельних площині $x+2y-2z+15=0$.

641. Скласти рівняння площин, дотичних до сфери

$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$$

і паралельних площині $4x+3z-17=0$.

642. Скласти рівняння площин, дотичних до сфери

$$x^2+y^2+z^2-10x+2y+26z-113=0$$

і паралельних прямим

$$\frac{x+5}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+13}{2}, \qquad \frac{x+7}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{0}.$$

643. Довести, що через пряму $\dfrac{x+6}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z+1}{1}$ неможливо провести площину, дотичну до сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z + 4 = 0.$$

644. Довести, що через пряму $x = 4t + 4$, $y = 3t + 1$, $z = t + 1$ можна провести тільки одну площину, дотичну до сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z + 4 = 0,$$

і скласти її рівняння.

645. Написати рівняння сфери, яка дотикається площини

$$\Pi\colon\ 3x - 6y - 2z + 14 = 0$$

в точці $(2, 1, 7)$, якщо її радіус дорівнює 7.

646. Знайти рівняння сфери радіуса $r = 6$, що дотикається площини $\Pi:\ x + 2y - 2z + 1 = 0$ в точці $M_0(3; 0; 2)$ і розташована по один бік з точкою $P(0; 1; 2)$ відносно Π.

647. Написати рівняння сфери, яка лежить в гострому куті, утвореному площинами $2x - 4y - 3z + 21 = 0$, $\quad 5x - 2z = 0$, і дотикається цих площин, якщо її центр лежить на осі абсцис.

648. Написати рівняння площини, паралельної площині, заданої рівнянням $2x + y - 4z + 5 = 0$ і яка дотикається до сфери, заданої рівнянням $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 21$.

649. Написати рівняння сфери, вписаної в тетраедр, утворений координатними площинами і площиною $x + 2y - 2z + 8 = 0$.

650. Довести, що сфери Φ_1 і Φ_2, які задані рівняннями

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 20 = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 14 = 0,$$

перетинаються, і знайти рівняння площини $\Pi \supset \gamma$, $\gamma = \Phi_1 \cap \Phi_2$.

6 ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

6.1 Поверхні обертання

651. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням параболи $z^2 = 10y$, $x = 0$ навколо осі Oz.

652. Парабола з параметром $p = 5$ розташована на площині Oyz так, що дирктриса співпадає з віссю Oz. Написати рівняння поверхні, утвореної обертанням даної параболи навколо осі Oz.

653. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням навколо осі Oy кожної з наступних кривих, розташованих в площині Oxy:

   а) еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

   б) гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

   в) гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$;

   г) параболи $x^2 = 2py$.

654. Написати рівняння поверхні, утвореної обертанням синусоїди $z = \sin y$ навколо осі Oz.

655. Довести, що поверхні, задані кожним з наступних рівняннь, є поверхнями обертання. Знайти твірні криві та вісі обертання:

   а) $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + x^2 + y^2 + z = 0$;

   б) $x^2 + y^2 + z^2 = 3 \pm \sqrt{x^2 + y^2}$;

   в) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{a^2} = 1$.

656. Довести, що поверхня, визначена рівнянням

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 21)^2 = 100(x^2 + y^2)$$

є поверхнею обертання. Визначити її переріз з площиною Oxy.

657. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0$ навколо осі Ox.

658. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ y=0$ навколо осі Oz.

6.2 Циліндричні і конічні поверхні

659. Скласти рівняння кругової циліндричної поверхні, якщо відомі рівняння її вісі: $x=7+3t$, $y=1+4t$, $z=3+2t$ і координати однієї з її точок $M_0(2,-1,0)$.

660. Скласти рівняння кругової циліндричної поверхні, якщо відомі ріняння її вісі: $x=t$, $y=1+2t$, $z=-3-2t$ і координати однієї з її точок $M_0(1,-2,1)$.

661. Скласти рівняння циліндричної поверхні в кожному з наступних випадків:

а) напрямна лежить в площині Oxy і має рівняння $x^2+2xy+3y^2-x=0$, а твірні паралельні вектору $\vec{s}(1,0,1)$;

б) напрямна лежить в площині Oyz і має рівняння $y^2-yz+5=0$, а твірні паралельні осі Ox;

в) напрямна лежить в площині Oxy і має рівняння $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$, а твірні паралельні вектору $\vec{p}(1,2,-1)$;

г) напрямна лежить в площині Oxz і є колом $(x-1)^2+z^2=4$, а твірні паралельні осі Oy.

662. Написати рівняння циліндричної поверхні обертання, якщо вісь обертання співпадає з віссю Oz, а радіус $r=5$.

663. Написати рівняння циліндричної поверхні обертання, якщо вісь обертання проходить через початок координат і паралельна вектору $\vec{a}(0,-1,1)$, а $r=3$.

664. Написати рівняння конічної поверхні, якщо:

а) напрямна в площині Oxy задана рівнянням $x^2 + y^2 - y = 0$, а вершина має координати $S(1, 0, 1)$;

б) напрямна в площині Oxy задана рівнянням $x^2 + y^2 = 16$, а вершина має координати $S(0, 0, 1)$.

665. Скласти рівняння конічної поверхні з вершиною в точці $S(1, 2, 4)$, твірні якої утворюють з площиною $2x + 2y + z = 0$ кут $\varphi = 45°$.

666. Скласти рівняння кругової конічної поверхні, вершина якої знаходиться в точці $S(1, 2, 3)$, вісь перпендикулярна до площини $2x + 2y - z + 1 = 0$, а твірні утворюють з віссю кут, рівний $\varphi = 30°$.

667. Скласти рівняння конуса з вершиною в початку координат, напрямна якого задана рівняннями $x^2 - 2z + 1 = 0$, $y - z + 1 = 0$.

668. Скласти рівняння конуса, вершина якого знаходиться в точці $S(3, -1, -2)$, а напрямна задана рівняннями $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $x - y + z = 0$.

669. Вісь Oz є віссю кругового конуса з вершиною в початку координат, точка $M_1(3, -4, 7)$ лежить на його поверхні. Скласти рівняння цього конуса.

670. Пряма $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+1}{-1}$ є вісь кругового конуса, вершина якого лежить на площині Oyz. Скласти рівняння цього конуса, знаючи, що точка $M_1\left(1, 1, -\dfrac{5}{2}\right)$ лежить на його поверхні.

671. Скласти рівняння конуса з вершиною в початку координат, твірні якого дотикаються сфери $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$.

672. Скласти рівняння конуса з вершиною в точці $S(3, 0, -1)$, твірні якого дотикаються еліпсоїда $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{3} = 1$.

673. Скласти рівняння циліндра, твірні якого паралельні вектору $\vec{l}(2,-3,4)$, а напрямна задана рівняннями $x^2+y^2=9$, $z=1$.

674. Скласти рівняння циліндра, напрямна якого задана рівняннями $x^2-y^2=z$, $x+y+z=0$, а твірні перпендикулярні до площини напрямної.

675. Написати рівняння циліндра другого порядку, який проходить через точки $M_1(1,0,-1)$, $M_2(2,0,2)$, якщо площини

$$\Pi_1\colon\ x+2y+z=0, \quad \Pi_2\colon\ x-z=0$$

є площинами симетрії циліндра, а пряма $l=\Pi_1\cap\Pi_2$ — віссю симетрії.

676. Написати рівняння конуса обертання, який проходить через прямі:

$$l_1:\begin{cases} x=2+t,\\ y=2t,\\ z=-1+2t; \end{cases} \quad l_2:\begin{cases} x=2+2t,\\ y=t,\\ z=-1+2t; \end{cases} \quad l_3:\begin{cases} x=2-t,\\ y=2t,\\ z=-1-2t. \end{cases}$$

677. Написати рівняння циліндричної поверхні обертання, знаючи рівняння трьох його твірних:

$$l_1:\begin{cases} x=t,\\ y=t,\\ z=t; \end{cases} \quad l_2:\begin{cases} x=-1+t,\\ y=t,\\ z=1+t; \end{cases} \quad l_3:\begin{cases} x=1+t,\\ y=-1+t,\\ z=2+t. \end{cases}$$

678. Написати рівняння циліндра обертання, що проходить черех точку $M_0(1,-2,1)$, віссю якого є пряма:

$$x=t, \quad y=1+2t, \quad z=-3-2t.$$

679. Параболічний циліндр проходить через точки $M_1(1,1,1)$, $M_2(1,-1,1)$, його твірні паралельні прямій: $x=t$, $y=t$, $z=-2t$, а площина $x+y+z=0$ є його площиною симетрії. Написати рівняння цього циліндра.

680. Написати рівняння циліндра, знаючи напрямний вектор $\vec{a}(5, 3, -2)$ його твірних і рівняння його напрямної:

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ z = 0; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} y^2 - z^2 = 4, \\ x = 0; \end{cases} \qquad 3) \begin{cases} x^2 = 2z, \\ y = 0. \end{cases}$$

681. Написати рівняння циліндричної поверхні, твірні якої дотикаються до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ і утворюють рівні кути з осями координат.

682. Написати рівняння конуса, описаного навколо сфер:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

683. Конус заданий рівнянням $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Написати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(0, -2, 2)$, $M_2(-1, 0, 0)$ і перетинає даний конус по параболі.

684. Написати рівняння конуса з вершиною $S(1, 0, -1)$, що проходить через лінію:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{4} = 1, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

685. Напрямна конуса задана рівняннями:

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y^2 - z = 0, \\ x + y + z = 1, \end{cases}$$

а вершина знаходиться в точці $S(-3, 0, 0)$. Скласти рівняння конуса.

686. Скласти рівняння циліндра, напрямною якого є коло $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ z = 0 \end{cases}$ і напрямок твірної заданий вектором $\vec{s}(5, 3, 2)$.

687. Знайти рівняння циліндра, знаючи, що він проходить через криву

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 25, \\ x + y - z + 2 = 0, \end{cases}$$

а твірна його: 1) паралельна осі Ox; 2) паралельна прямій $x = y$, $z = c$.

688. Напрямна циліндра задана рівняннми: $\begin{cases} x = y^2 + z^2, \\ x = 2z, \end{cases}$ а твірна його перпендикулярна до площини напрямної. Скласти рівняння циліндра.

6.3 Еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди

689. Написати рівняння еліпсоїда, вісі якого співпадають з вісями координат і який:

   а) проходить через точку $M(2, 0, 1)$ і перетинає площину Oxy по еліпсу $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{1} = 1$;

   б) проходить через точку $N(1, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ і перетинає площину Oyz по еліпсу $\dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{5} = 1$;

   в) перетинає площину Oyz по еліпсу $\dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{2} = 1$, а площину Oxy — по колу $x^2 + y^2 = 25$.

690. Написати канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда, якщо поверхня:

   а) проходить через точку $A(\sqrt{5}, 3, 2)$ і перетинає площину Oxz по гіперболі $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{z^2}{4} = 1$;

   б) перетинає площину Oxy по колу $x^2 + y^2 = 9$, а площину Oxz — по гіперболі $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{z^2}{10} = 1$.

691. Знайти переріз еліпсоїда $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1$ координатними площинами прямокутної декартової системи координат.

692. Знайти проекцію на площину Oxy лінії перерізу однопорожнинного гіперболоїда $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{4} = 1$ з площиною $x = 2z$.

693. Дослідити методом перерізів наступні поверхні другого порядку:

а) $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16}$;

б) $x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 8z - 8 = 0$;

в) $x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 5 = 0$;

г) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$;

д) $x^2 - 2x + z^2 - 3 = 0$.

694. Знайти рівняння проекцій на координатні площини перерізу еліптичного параболоїда $y^2 + z^2 = x$ площиною $x + 2y - z = 0$.

695. Встановити, яка лінія є перерізом еліпсоїда $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} = 1$ площиною $2x - 3y + 4z - 11 = 0$, і знайти її центр.

696. Встановити, яка лінія є перерізом гіперболічного параболоїда $\frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{3} = y$ площиною $3x - 3y + 4z + 2 = 0$, і знайти її центр.

697. Довести, що еліпсоїд $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$ має одну спільну точку з площиною $4x - 3y + 12z - 54 = 0$ і знайти її координати.

698. Визначити, при якому значенні m площина $x - 2y - 2z + m = 0$ дотикається еліпсоїда $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$.

699. Скласти рівняння площини, перпендикулярної до вектора $\vec{n}(2, -1, -2)$ і дотикається еліптичного параболоїда $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 2z$.

700. Провести дотичні площини до еліпсоїда $4x^2 + 16y^2 + 8z^2 = 1$ паралельно площині $x - 2y + 2z + 17 = 0$, обчислити відстань між знайденими площинами.

701. Переконавшись, що точка $M(1, 3, -1)$ лежить на гіперболчному параболоїді $4x^2 - z^2 = y$, скласти рівняння його прямолінійних твірних, що проходять через M.

702. Скласти рівняння прямолінійних твірних однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$, паралельних площині $6x+4y+3z-17=0$.

703. Вісі симетрії еліпсоїда є вісями ортонормованого репера. Написати рівняння цього еліпсоїда, якщо він проходить через еліпс: $z=0,\ \frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{12}=1$ і точку $M(3,2,5)$.

704. Написати рівняння еліпсоїда з піввісями $|O'A_1|=4$, $|O'B_1|=2$, $|O'C_1|=1$, якщо відомі рівняння його площин симетрії

$$\Pi_1\colon\ x+y+z-1=0,\ \Pi_2\colon\ x+y-2z=0,\ \Pi_3\colon\ x-y+1=0$$

і $O'B_1=\Pi_1\cap\Pi_3$, $O'C_1=\Pi_2\cap\Pi_3$.

705. Дані вершини еліпсоїда $A_1(8,0,0)$, $A_2(-2,0,0)$. Написати рівняння цього еліпсоїда, знаючи, що площина Oyz перетинає його по еліпсу: $x=0,\ \frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$.

706. Дані рівняння еліпсоїда Φ: $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{27}=1$, прямої l: $\begin{cases}2x-y=0,\\ z-9=0\end{cases}$ і точка $M_0(-3,1,1)$. Написат рівняння тієї дотичної площини до еліпсоїда Φ, яка проходить через пряму l і не перетинає відрізок OM_0.

707. Вісі симетрії однопорожнинного гіперболоїда Φ слугують вісями ортонормованого репера і Φ проходить через еліпс γ_1: $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1,\\ z=0\end{cases}$ і гіперболу γ_2: $\begin{cases}\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{5}=1,\\ x=0\end{cases}$. Написати рівняння гіперболоїда Φ.

708. Вісі симетрії однопорожнинного гіперболоїда слугуть вісями ортонормованого репера. Написати рівняння цього гіперболоїда,

якщо він проходить через лінію $\begin{cases} 25x^2 - 16z^2 = 144, \\ x = y \end{cases}$ і точку $M_0(3, 4, 3)$.

709. Знайти рівняння прямолінійних твірних поверхні

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1,$$

які проходять через точку $M_0(5, 3, 2)$.

710. Написати рівняння площини, яка паралельна даній площині П: $x - y + z - 5 = 0$ і перетинає параболоїд $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 2y$ по двом прямолінійним твірним. Знайти рівняння цих твірних.

711. Знайти рівняння прямолінійних твірних параболоїда

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 2z,$$

паралельних площині $6x + 4y - 8z + 1 = 0$.

712. Написати рівняння площини, яка дотикається поверхні

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{4} = -1$$

в точці $M_0(-6, 2, 6)$.

713. В точці $M_0\left(-2, 1, -\frac{1}{2}\right)$ провести нормаль до еліпсоїда

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1.$$

714. Знайти дотичні площини еліпсоїда $\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1$, які були б паралельні площині $2x + 2y - 3z = 0$.

715. Знайти дотичні площини параболоїда $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=z$, які були б паралельні площині $x-y-2z=0$.

716. Знайти площину, яка дотикається конуса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}-\frac{z^2}{1}=0$ в точці $M_0(4,-6,4)$.

717. До однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$ провести дотичні площини через кожну з наступних прямих: 1) $\frac{x}{3}=\frac{y+9}{3}=\frac{z}{1}$; 2) $\frac{x-9}{-1}=\frac{y}{4}=\frac{z}{1}$; 3) $\frac{x}{6}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$ і дослідити, як ці прямі розташовані відносно гіперболоїда.

6.4 Загальна теорія поверхонь другого порядку

Поверхнею другого порядку називається геометричне місце точок простору, координати яких в деякій афінній системі координат задовольняють рівняння:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+$$
$$+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0. \tag{1}$$

Коефіцієнти a_{ij} залежать від вибору системи кординат. Однією з основних задач теорії поверхонь другого порядку є спрощення загального рівняння (1) шляхом належного підбору нової системи координат. Спрощення рівняння (1), так як і у випадку кривої другого порядку, проводиться у два етапи.

а) *Спрощення рівняння поверхні шляхом повороту системи координат.* Якщо поверхня задана в прямокутній декартовій системі $Oxyz$ рівнянням (1), то завжди існує така нова прямокутна декартова система, отримана з вихідної шляхом повороту системи ,в якій поверхня має рівняння, що не містить добутків змінних. Напрямки осей цієї системи називаються *головними напрямками* поверхні другого порядку.

Для знаходження головних напрямків спочатку складають *характеристичне рівняння поверхні*:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-s & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-s \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Корені s_1, s_2 і s_3 характеристичного рівняння завжди дійсні числа, і кожному кореню відповідає головний напрямок. Якщо s_k — корінь рівняння (2), то координати вектора головного напрямку, який відповідає кореню s_k, визначається з системи рівнянь:

$$\begin{cases} (a_{11}-s_k)p_k^1 + a_{12}p_k^2 + a_{13}p_k^3 = 0, \\ a_{21}p_k^1 + (a_{22}-s_k)p_k^2 + a_{23}p_k^3 = 0, \\ a_{31}p_k^1 + a_{32}p_k^2 + (a_{33}-s_k)p_k^3 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Визначивши координати одиничних векторів $\vec{i}\,'(p_1^1, p_1^2, p_1^3)$, $\vec{j}\,'(p_2^1, p_2^2, p_2^3)$, $\vec{k}\,'(p_3^1, p_3^2, p_3^3)$, які мають головні напрямки, легко записати формули перетворення при переході від вихідної системи до нової. Рівняння даної поверхні в новій системі $Ox'y'z'$ в загальному виді запишеться так:

$$s_1x'^2 + s_2y'^2 + s_3z'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a_{44} = 0, \tag{4}$$

де $a'_{l4} = a_{14}p_l^1 + a_{24}p_l^2 + a_{34}p_l^3 \quad (l = 1, 2, 3)$.

б) *Спрощення рівняння поверхні шляхом переміщення початку координат.* Подальше спрощення рівняння (4) проводиться за допомогою переміщення початку координат. Шляхом належного підбору нового початку рівняння (4) можна звести до одного з наступних видів:

$$s_1\tilde{x}^2 + s_2\tilde{y}^2 + s_3\tilde{z}^2 + a'_{33} = 0;$$

$$s_1\tilde{x}^2 + s_2\tilde{y}^2 = 2a'_{14}\tilde{z}.$$

Користуючись цими співвідношеннями, можна дати повну класифікацію поверхонь другого порядку. Існують 17 типів поверхонь другого порядку, перелік яких з відповідними канонічними рівняннями даний в таблиці на сторінці 97.

Нехай поверхня другого порядку задана рівнянням (1), а пряма — параметричними рівняннями:

$$x = p_1 t + x_1, \quad y = p_2 t + x_2, \quad z = p_3 t + x_3. \tag{5}$$

Тут $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ — напрямний вектор, а $M_0(x_1, x_2, x_3)$ — початкова точка.

№	Назва поверхні	Канонічне рівняння
1	Еліпсоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
2	Уявний еліпсоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$
3	Однопорожнинний гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
4	Двохпорожнинний гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$
5	Дійсний конус	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
6	Уявний конус	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$
7	Еліптичний параболоїд	$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z;\ p > 0,\ q > 0$
8	Гіперболічний параболоїд	$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z;\ p > 0,\ q > 0$
9	Дійсний еліптичний циліндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
10	Уявний еліптичний циліндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
11	Гіперболічний циліндр	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

№	Назва поверхні	Канонічне рівняння
12	Дві дійсні площини, що перетинаються	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$
13	Дві уявні площини, що перетинаються	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$
14	Параболічний циліндр	$x^2 = \pm 2py$
15	Дві дійсні паралельні площини	$x^2 - a^2 = 0$
16	Дві уявні паралельні площини	$x^2 + a^2 = 0$
17	Дві співпавші площини	$x^2 = 0$

Для знаходження параметрів точок перетину необхідно підставити значення x, y і z з (5) в співвідношення (1). Після елементарних перетворень отримуємо:

$$Pt^2 + 2Q\,t + R = 0, \tag{6}$$

де

$$P = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} a_{\alpha,\beta} p_\alpha p_\beta, \quad Q = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} a_{\alpha,\beta} p_\alpha x_\beta, \quad R = \Phi(x_1, x_2, x_3),$$

де $\Phi(x, y, z)$ — ліва частина рівняння (1).

Прямі, напрямні вектори яких задовольняють умову $P = 0$, називаються *прямими асимптотичного напрямку* по відношенню до даної поверхні, а напрямні вектори цих прямих — *векторами асимптотичного напрямку* або *асимптотичними векторами. Конусом асимптотичних напрямків* даної поверхні, називається конічна поверхня з вершиною в довільній точці простору, всі твірні якої мають асиптотичний напрямок.

Так як і у випадку кривої, число точок перетину поверхні (1) з прямою (5) визначається числом різних коренів рівняння (6).

Якщо пряма не має асимптотичного напрямку по відношенню до поверхні, то вона перетинається з нею в двох точках:

а) дійсних і різних, якщо $Q^2 - PR > 0$,

б) комплексно спряжених, якщо $Q^2 - PR < 0$,

в) співпавших, якщо $Q^2 - PR = 0$. В цьому випадку кажуть, що пряма *дотикається* поверхні.

Якщо пряма має асимптотичний напрямок по відношенню до поверхні, то вона або перетинається з нею в одній точці ($P = 0,\ Q \neq 0$), або не має з нею жодної спільної точки ($P = Q = 0,\ R \neq 0$), або належить поверхні ($P = Q = R = 0$).

Асимптотою поверхні другого порядку називається кожна пряма, яка не має жодної спільної точки (ні дійсної, ні комплексної!) з поверхнею.

Прямолінійною твірною називається пряма, що цілком належить поверхні.

Геометричне місце середин всіх хорд поверхні (1), паралельних вектору $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ неасимптотичного напрямку, є площина, яка задана рівнянням:

$$p_1(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) + p_2(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) +$$
$$+p_3(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}) = 0. \tag{7}$$

Ця площина називається *діаметральною площиною, відповідною або спряженою вектору $\vec{p}$.*

Точка C простору називається *центром поверхні другого порядку*, якщо поверхня симетрична відносно C. Для того щоб точка $C(x_0, y_0, z_0)$ була центром поверхні (1), необхідно і достатньо, щоб її координати завольняли систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0. \end{cases}$$

Поверхні, які мають тільки один центр називаються *центральними*, а інші поверхні — *нецентральними*. Нецентральні поверхні або не мають жодного центра, або мають пряму або площину центрів.

Якщо координати двох ненульових векторів $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ і $\vec{q}(q_1, q_2, q_3)$ задовольняють умову:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} a_{\alpha,\beta} p_\alpha q_\beta = 0,$$

то вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$ називаються *спряженими відносно поверхні* (1).

Напрямок ненульового вектора $\vec{p}$ називається *головним відносно даної поверхні*, якщо будь-який вектор, що перпендикулярний йому, спряжений з ним.

Якщо поверхня задана в прямокутній декартовій системі рівнянням (1), то головні напрямки визначаються з системи (3), де s_k — корінь характеристичного рівняння (2).

Кожна поверхня другого порядку має принаймні три взаємно перпендикулярних напрямки. Вісі координат мають головні напрямки[1] тоді і тільки тоді, коли

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0.$$

Діаметральна площина поверхні другого порядку називається *головною*, якщо вона перпендикулярна відповідним хордам. Для визначення головних діаметральних площин можна скористатись наступною теоремою: *для того щоб діаметральна площина була головною, необхідно і достатньо, щоб відповідний вектор був вектором головного, але не асимптотичного напрямку.*

6.4.1 Зведення загального рівняння поверхні другого порядку до канонічного виду

За допомогою перетворення обертання прямокутної декартової системи координат звести до канонічного виду наступні рівняння поверхонь другого порядку і написати формули перетворення.

718. $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 36 = 0.$

719. $5x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz - 4yz - 24 = 0.$

[1] Див. означення головних напрямків, яке дане на сторінці 95.

720. $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 15 = 0.$

721. $3x^2 + 2y - 4z = 0.$

722. $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 12 = 0.$

723. $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 24 = 0.$

724. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz - 6 = 0.$

725. $5x^2 + 5y^2 - 3z^2 - +8y - 9 = 0.$

726. $5y^2 + 4x^2 + 6z = 0.$

727. $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 + xz - yz = 3.$

728. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{5}{2}z^2 - 3xy - xz + yz - 6 = 0.$

729. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz = 4.$

За допомогою переміщення початку прямокутної декартової системи координат звести до канонічного виду наступні рівняння поверхонь другого порядку.

730. $x^2 - 6y^2 + 2z^2 - 2x + 12y + 4z + 9 = 0.$

731. $3x^2 - 2z^2 + 12x - 2y + 4z + 6 = 0.$

732. $y^2 + 2z^2 - 4y + 12z + 10 = 0.$

733. $2x^2 + y^2 + 4z^2 - 4x + 6y + 16z - 1 = 0.$

734. $x^2 + 2z^2 - 6x + 4y + 12y - 12z + 1 = 0.$

735. $2x^2 + 3y^2 - 4x + 12y - 12z + 2 = 0.$

736. $x^2 - 2z^2 + 6x + 4y - 4z + 3 = 0.$

737. $x^2 - y^2 + z^2 + 2x + 4y - 3 = 0.$

738. $x^2 - 3y^2 + 10x + 12y + 13 = 0.$

739. $5x^2 + 10y + 2z^2 - 40y + 50 = 0.$

740. $x^2 + 14y + 44 = 0.$

За допомогою перетворення обертання системи координат та переміщення початку координат звести до канонічного виду рівняння наступних поверхонь другого порядку.

741. $5x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz + 4x + 8y + 12z - 4 = 0.$

742. $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 8x + 4y - 5 = 0.$

743. $2xz + 4x - 6y + 8z - 2 = 0.$

744. $6x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xz - 4yz + 4x + 4y + 6z - 25 = 0.$

745. $5x^2 + 5y^2 + 8xy - 4xz + 4yz - 36x + 36y - 18z - 18 = 0.$

746. $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 8x - 4y + 8z = 0.$

747. $5y^2 - 2x + 10y - 4z + 1 = 0.$

748. $3x^2 + 2yz - 6x + 4y - 4z + 1 = 0.$

749. $2x^2 - 3y^2 + 2z^2 - 8xz + 4x - 6y + 8z - \dfrac{35}{3} = 0.$

6.4.2 Перетин поверхні з прямою, асимптотичні напрямки

750. Визначити точки перетину поверхні другого порядку $x^2 - 2xy + 2z^2 + xz - x - y = 0$ з прямою $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-3}{4}$.

751. Дана поверхня другого порядку: $x^2 - 3xy + xz + y^2 - x - 2y + 1 = 0$. Вияснити, які з векторів $\vec{a}(1,0,0)$, $\vec{b}(2,2,2)$, $\vec{c}(1,2,0)$, $\vec{d}(0,0,5)$ мають асимптотичні напрямки по відношенню до даної поверхні.

752. Знайти ті прямолінійні твірні поверхні $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, які проходять через точку $M(1,1,1)$.

753. Знайти ті прямолінійні твірні поверхні

$$x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-yz+4x+3y-5z+4=0,$$

які проходять через точку $N(-1,-1,1)$.

754. Знайти точки перетину поверхні і прямої:

1) $\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{9}=1$ і $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-4}{-6}=\dfrac{z+2}{4}$;

2) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1$ і $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+2}{4}$;

3) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=z$ і $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{-2}$;

4) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=z$ і $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$.

6.4.3 Діаметральні площини, центр, головні напрямки

755. Знайти рівняння тієї діаметральної площини поверхні

$$x^2-y^2+2z^2-4xy+2xz-6yz-2x+4y-5=0,$$

яка спряжена напрямку прямої: $\begin{cases} 2x-y-z+1=0, \\ x+y-2z+3=0. \end{cases}$

756. Знайти рівняння тієї діаметральної площини поверхні

$$6x^2+9y^2+z^2-6xy-4xz-2y-3=0,$$

яка паралельна площині $x+3y-z+5=0$.

757. Знайти рівняння тієї діаметральної площини поверхні

$$4x^2+9y^2+z^2-12xy-4xz-5=0,$$

яка проходить через пряму $x=1-3t$, $y=2t$, $z=2-t$.

758. Знайти рівняння тієї діаметральної площини поверхні $2x^2+$ $+10y^2-2z^2+12xy+8yz+12x+4y+8z-1=0$, яка проходить через пряму $x=1+t$, $y=-1-t$, $z=t$.

759. Знайти рівняння тієї діаметральної площини поверхні x^2+2y^2- $-z^2-2xy-2yz+2xz-4x-1=0$, яка проходить через точки $O(0,0,0)$ і $M(1,1,0)$.

760. Знайти спільну діаметральну площину наступних поверхонь:

$$x^2-2y^2+z^2-4xz+6yz-8x+10y=0,$$

$$3x^2+2y^2-2xz+4yz-4x-8z-8=0,$$

$$x^2+y^2+z^2+2xy+6xz-2yz+2x-6y-2z=0.$$

761. Знайти спільну діаметральну площину поверхонь:

$$4x^2+2y^2+3z^2+4xz-4yz+8x-4y+8z=0,$$

$$x^2+9y^2+2z^2-4xy-6xz+2yz+8x-16y+1=0.$$

762. Скласти рівняння діаметральної площини поверхні x^2-xy+ $+2yz+x-z=0$, що проходить через точку $(1,1,1)$ і спряжена напрямку вектора $\vec{a}$, паралельного площині Oxy.

763. Знайти центри наступних поверхонь другого порядку:

а) $x^2+y^2+z^2+2xy+6xz-2yz+2x-6y-2z=0$;
б) $3x^2+2y^2-2xz+4yz-4x-8z-8=0$;
в) $2x^2+12y^2+4z^2+8xy-4xz+12yz-10x+14z+7=0$.

764. Знайти геометричне місце центрів і визначити тип кожної з наступних поверхонь другого порядку:

а) $9x^2+5y^2+9z^2-12xy-6yz+12y-36z=0$;
б) $2x^2+10y^2-2z^2+12xy+8yz+12x+4y-8z-1=0$;
в) $x^2+4y^2+4xz-2yz=0$;
г) $2x^2+2y^2+2z^2+4xy-4xz-4yz+5x+5y-5z+2=0$.

765. Знайти рівняння головних діаметральних площин і осей наступних поверхонь другого порядку:

а) $x^2+y^2+5z^2-6xy-2xz+2yz-4x+6y+2z-8=0$;

б) $5x^2-y^2+z^2+4xy+6xz+2x+8y+6z-10=0$;

в) $5x^2+2y^2+5z^2-4xy-2xz-4yz-6x+6y-7=0$;

г) $x^2+y^2+3z^2+2xy-6xz+6yz-4x+4y-2z-12=0$;

д) $2x^2+3y^2+2z^2+2xy+4xz+2yz+2x+6y+2z=0$.

766. Знайти діаметральну площину поверхні $2x^2+5y^2+8z^2+12yz+6xz+2xy+8x+14y+18z=0$, спряжену хордам, паралельним: 1) прямій $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-5}$; 2) осі Ox; 3) осі Oy; 4) осі Oz.

767. Знайти діаметр поверхні $x^2+9y^2+2z^2-4xy-6xz+2yz+8x-16y+1=0$, який проходить черех початок координат, і скласти рівняння спряженої йому діаметральної площини.

768. Дана поверхня $6x^2+9y^2+z^2-4xz+6xy=2y-3=0$. Знайти діаметральну площину, паралельну площині $x+3y-z+5=0$, і скласти рівняння спряженого йому діаметра.

769. Знайти ту діаметральну площину поверхні $x^2+3z^2-6xy+8x+5=0$, яка проходить через пряму $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-1}{3}$.

770. Знайти спільну діаметральну площину трьох поверхонь:

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-11=0;$$

$$3y^2+4xy-8xz+6z+5=0;$$

$$8x^2-3y^2+7z^2+4xy-9xz-15=0.$$

771. Знайти головні напрямки поверхні $2x^2+2y^2-5z^2+2xy-2x-4y-4z+2=0$.

772. Знайти головні вісі поверхні $x^2+y^2+5z^2-6xy-2xz+2yz-6x+6y-6z+9=0$.

773. Знайти головні діаметральні площини поверхні $x^2+y^2-3z^2-6yz-6xz-2xy+2x+2y+4z=0$.