Аналіз міркувань в логіці висловлювань та логіці предикатів

1. Отримання всіх наслідків з даних посилок. Запис міркувань у логічній символіці. Правильні і неправильні схеми міркувань

Багато математичних тверджень мають форму «Якщо *A*, то *B*», тобто форму імплікації. Залишимо поза увагою імплікації типу «Якщо число 3 парне, то сніг білий». Будемо розглядати тепер лише такі імплікації, складові А та В яких мають спільний зміст.

Означення Говорять, що формула B є *логічним наслідком* формул $A_1, A_2, ..., A_n$, якщо B істинна на кожному наборі значень її атомів, при яких кожна з формул $A_1, A_2, ..., A_n$ істинна. Формули $A_i, i = \overline{1,n}$ називаються *посилками* або *гіпотезами.* Позначають $A_1, A_2, ..., A_n \vdash B$.

В частинному випадку, $A \vdash B$ означає, що формула B є логічним наслідком формули A. В цьому випадку також говорять що висновок В отримано з умови А за допомогою дедукції.

Теорема $A_1, A_2, ..., A_n \vdash B$ тоді і тільки тоді, коли імплікація $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \Rightarrow B$ є тавтологією. В частинному випадку, $A \vdash B$ тоді і тільки тоді, коли $A \Rightarrow B$ є тавтологією.

Приклад.

1) Формула $P = A \wedge B \vee \overline{C}$ є логічним наслідком формули $Q = A \wedge \overline{C}$. Дійсно,

$$Q \Rightarrow P = \overline{A \wedge \overline{C}} \vee (A \vee \overline{C}) \wedge (B \vee \overline{C}) = (\overline{A} \vee C \vee A \vee \overline{C}) \wedge (\overline{A} \vee C \vee B \vee \overline{C}) = 1$$

.

2) Формула B є логічним наслідком посилок A і $A \Rightarrow B$. Дійсно,

$$A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B = \overline{A \wedge (A \Rightarrow B)} \vee B = \overline{A} \vee (A \wedge \overline{B}) \vee B =$$
$$= (A \vee \overline{A}) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B}) \vee B = \overline{A} \vee \overline{B} \vee B = 1.$$

Теорема (про всі наслідки з даних посилок) Нехай дано посилки $A_1, A_2, ..., A_n$. Позначимо $D_1 \cdot D_2 \cdot ... \cdot D_m$ досконалу кон'юнктивну нормальну форму (ДКНФ) формули $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n$. Логічними наслідками даних посилок є диз'юнкції $D_1, D_2, ..., D_m$ та всі можливі кон'юнкції цих диз'юнкцій.

Приклад

1) Знайти всі наслідки з посилок $A_1 = x$, $A_2 = x \vee \bar{y}$.

Знаходимо ДКНФ кон'юнкції посилок: $x(x \vee \bar{y}) = (x \vee y\bar{y})(x \vee \bar{y}) = (x \vee y)(x \vee \bar{y})$. Всі наслідки: $x \vee y$, $x \vee \bar{y}$, $(x \vee y)(x \vee \bar{y})$.

2) Розглянемо посилки: «Якщо $a \vdots 10$, то $a \vdots 5$», «Число *a* не ділиться на 5». Які можливі наслідки з цих посилок? Чи є твердження «$\overline{a \vdots 10}$» логічним наслідком з цих посилок?

Позначимо $A_1 = b \Rightarrow c$, $A_2 = \bar{c}$, де b означає $a \vdots 10$, c є висловлювання $a \vdots 5$. Знайдемо ДКНФ формули $A_1 \wedge A_2$: $(b \Rightarrow c) \wedge \bar{c} = (\bar{b} \vee c)(\bar{c} \vee \bar{b})(\bar{c} \vee b)$. Запишемо всі логічні наслідки: $(\bar{b} \vee c)$, $(\bar{c} \vee \bar{b})$, $(\bar{c} \vee b)$, $(\bar{b} \vee c)(\bar{c} \vee \bar{b})$, $(\bar{c} \vee \bar{b})(\bar{c} \vee b)$, $(\bar{b} \vee c)(\bar{c} \vee b)$, $(\bar{b} \vee c)(\bar{c} \vee \bar{b})(\bar{c} \vee b)$.

Далі, оскільки $\bar{b} = \bar{b} \vee (c \wedge \bar{c}) = (\bar{b} \vee c)(\bar{c} \vee \bar{b})$, то отримали, що $\bar{b}$ (це означає «$\overline{a \vdots 10}$») є логічним наслідком з даних посилок.

З імплікаціями, зміст складових *A* та *B* яких спільний, мають справу при дедуктивному методі міркування. Під міркуванням будемо розуміти виведення з деякої вихідної сукупності тверджень (посилок, гіпотез) нового твердження (висновку). Висновок відділяється від посилок за допомогою слів «значить», «тому», «з цього випливає», «отже» і т.ін. Для аналізу міркування ігнорують конкретний зміст посилок і зосереджуються на схемі (або формі) міркування.

Фундаментальний принцип логіки полягає в тому, що в правильному міркуванні з істинності посилок не може випливати хибний висновок. Але істинність посилок є необхідною, але не достатньою умовою правильності міркування. Якщо існує міркування за тією ж схемою, в якому посилки істинні, а висновок хибний, то міркування невірне. Якщо такого контрприкладу не існує, то міркування правильне.

Приклад Розглянемо міркування: «Якщо даний многокутник правильний, то в нього можна вписати коло. Даний многокутник правильний. Отже, в даний многокутник можна вписати коло».

В цьому міркуванні є дві посилки, які утворено з елементарних висловлювань: «даний многокутник правильний» і «в даний многокутник можна вписати коло». Щоб відволіктись від змісту, позначимо ці висловлювання буквами A та B відповідно. Тоді перша посилка має вигляд імплікації $A \Rightarrow B$, а друга є A. Для доведення правильності міркування потрібно довести, що B є логічним наслідком вказаних посилок, тобто що $A \Rightarrow B, A \vdash B$, а для цього треба довести, що імплікація $(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ є логічним законом (тавтологією). Це вище вже було показано.

Отже, наведене міркування є правильним.

Розглянемо наступну схему міркування: $A \Rightarrow B, C \Rightarrow D, A \vee C \vdash B \wedge D$.

Припустимо, що кожна з посилок істинна, а $B \wedge D$=0, що можливо, наприклад, при $B = 1, D = 0$. Тоді отримаємо $A \Rightarrow B = 1$, а з $C \Rightarrow D = 1$ випливає $C = 0$, і з $A \vee C = 1$ випливає $A = 1$. Отже, існує набір $(A, B, C, D) = (1,1,0,0)$, при якому всі посилки істинні, а висновок хибний. Таким, чином міркування за наведеною схемою неправильне або нелогічне.

Розглянемо декілька схем правильних міркувань, їх ще називають *правилами виводу*. Важливо пам'ятати, що ці схеми забезпечать правильність міркування лише якщо всі посилки будуть істинними.

1) схема з прикладу 1.22 відповідає не лише розглянутому конкретному міркуванню, а носить загальний характер. В кожному подібному міркуванні істинність посилок забезпечить істинність висновку. Тому цю схему називають ще **правилом відділення (modus ponens)** і записують у вигляді

$$\frac{A \to B, A}{B}.$$

Нагадаємо, що правило **modus ponens** можна записати у вигляді логічної формули $(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$.

2) Інша схема правильного міркування називається п**равилом заперечення** і має вигляд $\dfrac{A \to B, \overline{B}}{\overline{A}}$.

Дійсно,

$$(A \Rightarrow B) \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A} = \overline{(A \Rightarrow B) \wedge \overline{B}} \vee \overline{A} = \overline{A \Rightarrow B} \vee B \vee \overline{A} = A \wedge \overline{B} \vee (B \vee \overline{A}) = \\ = (B \vee \overline{A} \vee A)(B \vee \overline{A} \vee \overline{B}) = 1.$$

Приклад Якщо використати висловлювання з попереднього прикладу, то друга посилка має вигляд $\overline{B}$ «В даний многокутник не можна вписати коло», і висновок $\overline{A}$ «Даний многокутник не є правильним» є логічним наслідком з даних посилок.

3) Правило силогізму (або транзитивності): $\dfrac{A \to B, B \to C}{A \to C}$

Дійсно,

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) = \overline{(A \Rightarrow B} \vee \overline{B \Rightarrow C)} \vee \overline{A} \vee C = A\overline{B} \vee B\overline{C} \vee \overline{A} \vee C = \\ = (A \vee \overline{A})(\overline{A} \vee \overline{B}) \vee (B \vee C)(\overline{C} \vee C) = \overline{A} \vee \overline{B} \vee B \vee C = 1$$

Приклад Міркування за правилом силогізму: «Якщо число ділиться на 6, то воно ділиться на 3. Якщо число ділиться на 3, то сума його цифр ділиться на 3. Отже, якщо число ділиться на 6, то сума його цифр ділиться на 3».

4) $\dfrac{A \vee B, \overline{A}}{B}$ **правило видалення диз'юнкції**

5) $\dfrac{A \wedge B}{A}$ **правило видалення кон'юнкції**

6) $\dfrac{A}{A \vee B}$ **правило введення диз'юнкції**

7) $\dfrac{A, B}{A \wedge B}$ **правило введення кон'юнкції**

8) $\dfrac{A \Rightarrow B}{\overline{B} \Rightarrow \overline{A}}$ **правило контрапозиції**

Означення Сукупність формул $A_1, A_2, ..., A_n$ називається *суперечливою*, якщо при будь-якому наборі значень атомів хоча б одна з формул набуває хибне значення.

Очевидно, необхідною і достатньою умовою суперечливості системи формул $A_1, A_2, ..., A_n$ є тотожна хибність формули $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n$.

Наприклад, сукупність формул A і $\overline{A}$ є суперечливою.

Теорема Якщо логічним наслідком формул $A_1, A_2, ..., A_n, \overline{B}$ є хибна формула, то $A_1, A_2, ..., A_n \vdash B$.

Доведення. За умовою теореми із сукупності формул $A_1, A_2, ..., A_n, \overline{B}$ випливає хибна формула. Розглянемо набір значень атомів, при якому формули $A_1, A_2, ..., A_n$ істинні, а формула $\overline{B}$ – хибна (такий набір існує згідно з означенням імплікації). Але тоді формула B істинна, а значить імплікація $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \Rightarrow B$ є тавтологією, звідки за означенням логічного слідування отримаємо, що $A_1, A_2, ..., A_n \vdash B$.

Доведена теорема є логічним обґрунтуванням *методу доведення від супротивного*. Наведемо кілька *схем доведення від супротивного*, які випливають з доведеної теореми:

1) $(A \Rightarrow B) = \left(\overline{A \Rightarrow B} \Rightarrow (C \wedge \overline{C})\right) = \left(A \wedge \overline{B} \Rightarrow (C \wedge \overline{C})\right)$,

2) $(A \Rightarrow B) = \left(A \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A}\right)$,

3) $(A \Rightarrow B) = \left(A \wedge \overline{B} \Rightarrow B\right)$.

Сутність проблеми розв'язуваності в логіці висловлювань полягає в питанні про існування загального алгоритму, який дозволив би за скінченне число кроків відносно будь-якої конкретної формули отримати відповідь на питання, чи буде вона тотожно істинною. Відповідь на це питання в логіці висловлювань позитивна. Є кілька методів, деякі з них ми вже навіть використовували вище.

1. Складання таблиці істинності.
2. Рівносильні перетворення формули.
3. Метод непрямого доведення (метод «від супротивного»). Для цього припускаємо, що дана формула не є тотожно істинною. Тоді існує хоча б один набір значень змінних, що входять в цю формулу, при якому вона приймає хибне значення. Якщо такий набір значень змінних вдається знайти, дана формула не буде тотожно істинною. Якщо ж припущення про існування такого набору значень приводить до протиріччя, дана формула тотожно істинна.

У практиці міркувань зустрічається той факт, що побудова різноманітних умовиводів дозволяє виділити і донести до співрозмовника смислові відтінки інформації, що міститься в засновках. Особливо це очевидно у випадку з безпосередніми умовиводами:

Всі студенти історичного факультету вивчають логіку — **(засновок).**

1. *Отже, деякі особи, що вивчають логіку, є студентами історичного факультету* — **(висновок, отриманий шляхом обернення засновку).**
2. *Жоден студент історичного факультету не може бути серед тих, хто не вивчає логіку* — **(висновок, отриманий шляхом перетворення засновку).**
3. *Жоден, хто не вивчає логіку, не належить до студентів історичного факультету* — **(висновок, отриманий, шляхом протиставлення предиката засновку до суб'єкта).**
4. *Невірно, що деякі студенти історичного факультету не вивчають логіку* — **(висновок, отриманий за правилом умовиводу по «логічному квадрату» — $ASP \models \neg OSP$).**

2. Аналіз міркувань в логіці предикатів

Не всі міркування навіть шкільної математики можна проаналізувати в логіці висловлювань. Формалізація більшості таких міркувань неможлива без введення кванторів.

Зупинимось на способах символічного запису тверджень, в яких зустрічаються вирази типу «принаймні один (або принаймні два, …, *n*)», «не більше ніж один (або не більше ніж два, …, *n*)», рівно один (або рівно два, …, *n*). Вони доволі часто зустрічаються. Ці вирази іноді називають *чисельними кванторами*. Покажемо, якими рівносильними виразами їх можна замінити і як буде виглядати символічний запис.

Чисельний квантор	**Рівносильний вираз**	**Символічний запис**
Принаймні один об'єкт має властивість *A*.	Існує об'єкт, що має властивість *A*	$(\exists x)\ A(x)$
Не більше, ніж один об'єкт має властивість *A*.	Якщо є два об'єкти, що мають властивість *A*, то вони співпадають	$(\forall x)\ (\forall y)(A(x) \wedge A(y) \Rightarrow x = y)$
Один і тільки один об'єкт має властивість *A*.	Існує об'єкт, що має властивість *A*. Якщо є два об'єкти, що мають властивість *A*, то вони співпадають	$(\exists x)\ A(x) \wedge$ $\wedge (\forall x)\ (\forall y)(A(x) \wedge A(y) \Rightarrow x = y)$
Принаймні два об'єкти мають властивість *A*.	Існують неспівпадаючі об'єкти, що мають властивість *A*.	$(\exists x)\ (\exists y)(A(x) \wedge A(y) \wedge x \neq y)$

Не більше, ніж два об'єкти мають властивість A.	Які б не були три об'єкти, якщо вони всі мають властивість А, то принаймні два з них співпадають.	$(\forall x)\ (\forall y)(\forall z)(A(x) \wedge A(y) \wedge A(z) \Rightarrow$ $\Rightarrow x = y \vee x = z \vee y = z)$
Два і тільки два об'єкти мають властивість A.	Існують неспівпадаючі об'єкти, що мають властивість A. Які б не були три об'єкти, якщо вони всі мають властивість A, то принаймні два з них співпадають.	$(\exists x)\ (\exists y)(A(x) \wedge A(y) \wedge x \neq y) \wedge$ $\wedge (\forall x)\ (\forall y)(\forall z)(A(x) \wedge A(y) \wedge A(z) \Rightarrow$ $\Rightarrow x = y \vee x = z \vee y = z)$

Переходимо до аналізу міркувань в логіці предикатів. Розглянемо міркування: «Будь-який квадрат є прямокутником. Відомо, що $ABCD$ є квадратом. Значить, $ABCD$ – прямокутник».

Введемо одномісні предикати $K(x)$ – «x є квадратом» і $P(x)$ – «x є прямокутником». Тоді перша посилка запишеться у вигляді $(\forall x)\ (K(x) \Rightarrow P(x))$ і вона є істинним висловлюванням. Перша посилка при $x = ABCD$ має вигляд $K(ABCD) \Rightarrow P(ABCD)$.

Другою посилкою є $K(ABCD)$, а висновком є $P(ABCD)$. За правилом modus ponens з посилок $K(ABCD) \Rightarrow P(ABCD)$ і $K(ABCD)$ випливає висновок $P(ABCD)$. Таким чином, ми змогли в рамках логіки предикатів проаналізувати наведене міркування і показати, що воно є правильним.

Будь-яке міркування з посилками $(\forall x)\ (A(x) \Rightarrow B(x))$, $A(c)$ і висновком $B(c)$ є правильним, що можна виразити у вигляді наступного правила виводу:

$$\frac{(\forall x)\ (A(x) \Rightarrow B(x)),\ A(c)}{B(c)}.$$

Але, щоб застосовувати це правило, треба мати на увазі, що з формули $(\forall x)\ A(x)$ логіки предикатів випливає формула $A(c)$ логіки висловлювань, де c – елемент з області визначення предиката $A(x)$. Тому маємо правило

$$\frac{(\forall x)\ A(x)}{A(c)},$$

яке називають *правилом зняття квантора загальності* .

Іноді елемент c не обов'язково окремо взятий елемент з області визначення предиката, а будь-який елемент y з певними властивостями. Тоді попереднє правило виводу набуває вигляду

$$\frac{(\forall x)\ A(x)}{A(y)}$$

і обгрунтовується тим, що формула $(\forall x) A(x) \to A(y)$ є загальнозначущою, що було показано вище. Це правило застосовується, наприклад, для аналізу міркування: «кожне просте число має лише два дільники. Число y має лише два дільники. Значить число y є простим».

Правило *зняття квантора існування*

$$\frac{(\exists x)\ A(x)}{A(c)}.$$

Правило *введення квантора загальності*

$$\frac{A(c)\ для\ \ довільного\ \ c \in M}{(\forall x)\ A(x)}.$$

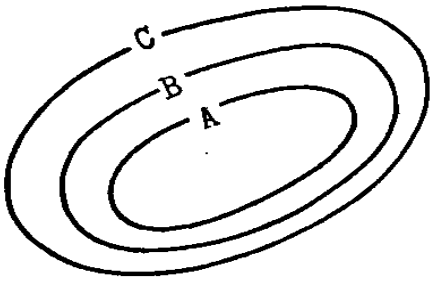
Правило *введення квантора існування*

$$\frac{A(c)\ для\ \ деякого\ \ c \in M}{(\exists x)\ A(x)}$$

Розглянемо кілька правил виводу в логіці предикатів, які називають *правилами силогізмів*:

а) $\dfrac{(\forall x)\ (A(x)\Rightarrow B(x)),(\forall x)(\ B(x)\Rightarrow C(x))}{(\forall x)\ (A(x)\Rightarrow C(x))}$.

Правильність такого міркування можна проілюструвати за допомогою діаграм Ейлера наступним чином



Приклад міркування за цією схемою: «Кожне ціле число є раціональним. Кожне раціональне число є дійсним. Отже, кожне ціле число є дійсним» (*A, B, C* – множини відповідно цілих, раціональних, дійсних чисел).

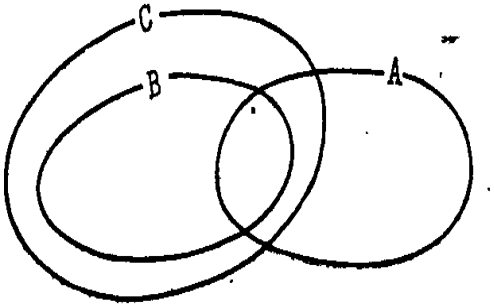
б) $\dfrac{(\forall x)(\ A(x)\Rightarrow B(x)),(\forall x)\big(\ B(x)\Rightarrow \overline{C}(x)\big)}{(\forall x)\ \big(A(x)\Rightarrow \overline{C}(x)\big)}$.

Це правило зводиться до попереднього заміною $\overline{C}$ на C.



Приклад міркування за цією схемою: «Будь-яке раціональне число (*A*) є дійсним (*B*). Жодне дійсне число не є уявним (*C*). Отже, жодне раціональне число не є уявним».

в) $\dfrac{(\forall x)\ (B(x)\Rightarrow C(x)),(\exists x)\ (A(x)\wedge B(x))}{(\exists x)\ (A(x)\wedge C(x))}$



Приклад міркування за цією схемою: «Будь-яке ціле число (*B*) є раціональним (*C*). Деякі дійсні числа (*A*) є цілими. Отже, деякі дійсні числа є раціональними».

Приклад. Область визначення - люди коледжу. 1. Усі випускники Ітона в коледжі грають в крикет. 2. Ніхто, крім викладачів, не обідає за верхнім столом. 3. Жоден з тих, хто грає в крикет, не вміє веслувати. 4. Всі мої друзі в цьому коледжі - випускники Ітона. 5. Всі викладачі – чудові веслувальники. Отже, жоден мій друг не обідає за верхнім столом.

Процес доведення логічного слідування починається з формалізації поставленого завдання засобами логіки предикатів 1-го порядку.
Введемо предикати на заданій області визначення: V (x) - x випускник Ітона; K (x) - x грає в крикет; P (x) - x викладач; O (x) - x обідає за верхнім столом; G (x) - x вміє веслувати; D (x) - x мій друг.

Формалізуємо посилки: 1. $\forall$ x (V(x)$\rightarrow$ K(x)); 2. $\forall$x (O(x)$\rightarrow$ P(x)); 3. $\forall$x (K(x)$\rightarrow \neg$ G(x)); 4. $\forall$x (D(x)$\rightarrow$ V(x)); 5. $\forall$x (P(x)$\rightarrow$ G(x)); і висновок, який треба перевірити: $\forall$x(D(x)$\rightarrow \neg$ O(x)).

(***див. практ.заняття 3***)