Державний вищий навчальний заклад
«Запорізький національний університет»
Міністерства освіти і науки України

П.Г. Стєганцева, М.О.Гречнєва

ОСНОВИ МАТЕМАТИКИ

Навчально-методичний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти магістра
спеціальності «Математика»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол від

Запоріжжя
2015

УДК
ББК

Стєганцева П.Г. Основи математики: навчально-методичний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Математика» / П.Г. Стєганцева, М.О.Гречнєва. – Запоріжжя: ЗНУ, 2015. – 85 с.

Посібник укладено відповідно до навчальної та робочої програм нормативної дисципліни «Основи математики». Він містить стислий виклад теоретичного матеріалу курсу. До кожної теми подано задачі, які сприятимуть формуванню необхідних практичних навичок. Для діагностики рівня засвоєння знань запропоновано питання для самоконтролю, задачі та тести.

Видання призначене для студентів спеціальності «Математика» денної, заочної форм навчання та екстернату. Викладачі можуть використати матеріал посібника для забезпечення самостійної роботи.

Рецензент *І.В.Красікова*
Відповідальний за випуск *А.К. Приварников*

ЗМІСТ

Вступ………………………………………………………………………… 4
1 Теоретичні питання основ математики.. 6
Тема 1. Загальні питання аксіоматики.. 6
Тема 2. Аксіоматичні теорії натуральних, цілих і раціональних чисел….. 11
Тема 3. Огляд і порівняння різних аксіоматичних теорій дійсних чисел… 18
Тема 4. Сучасні аксіоматичні теорії евклідової геометрії.......................... 21
Тема 5. Геометрія Лобачевського.. 29
Тема 6. Інші неевклідові геометрії……………………………………...… 35
2 Зміст практичних занять 43
Тема 1: Загальні питання аксіоматики. Вимоги до системи аксіом............. 43
Тема 2: Аксіоматичні теорії натуральних, цілих, раціональних та дійсних чисел………………………………………………………………………….. 48
Тема 3: Системи аксіом евклідової геометрії. Еквівалентність систем аксіом Вейля та Гільберта... 50
Тема 4: Наслідки з аксіом перших трьох груп аксіоматики Гільберта. Співвідношення між кутами і сторонами трикутника. Логічний аналіз математичних тверджень... 53
Тема 5: Абсолютна геометрія. Доведення тверджень абсолютної геометрії про суму кутів трикутника. Еквіваленти аксіом неперервності. Чотирикутник Саккері.. 56
Тема 6: Наслідки з аксіоми паралельності. Еквіваленти п’ятого постулату... 59
Тема 7: Планіметрія Лобачевського………………………………… 62
3 Зміст самостійної роботи.........................………………………………….. 66
Індивідуальне завдання …………………………………………………… 70
Підсумковий тест... 73
Література……………………..…...………………………………………... 74
Питання до заліку……......…………………………………………………..... 75
Додаток А………………………………………………………………… 76
Додаток Б………………………………………………………………… 77
Додаток В………………………………………………………………… 79
Додаток Г………………………………………………………………… 81
Додаток Ґ………………………………………………………………….. 84

ВСТУП

Специфіка математичної науки полягає в тому, що її об'єкти або постулюються, або їх істинність перевіряється в ході доведення. Ідея доведення зародилась ще в стародавні часи. Математична теорія будується аксіоматичним методом. Ті факти, що залучаються до процедури обґрунтування, що служать опорою для нього, сформульовані у вигляді аксіом. Всі інші факти виводяться з аксіом лише за правилами логіки. Головна мета звернень до філософських обґрунтувань в тому, щоб зрозуміти, яке відношення математичної теорії до реальності, що саме стоїть за математичним об'єктом і чому він зобов'язаний своєю появою. По суті це спроби (і насамперед самих математиків) вийти за межі власної науки, співвіднести її зміст з дійсним світом.

Філософські дискусії в математиці XIX ст. були пов'язані в основному з розвитком геометрії, а саме з тлумаченням неевклідових геометрій. В галузі математичного аналізу також виникли принципові труднощі, але до кінця XIX ст. вони здавалися легко усуненими і деякі з них, дійсно, були усунені. Неевклідові геометрії були фактом зовсім іншого роду. Питання про природу математичного знання виникло у зв'язку з ними знову і не менш гостро, ніж в попередньому столітті, у зв'язку з обґрунтуванням обчислення нескінченно малих.

Проблема обґрунтування визрівала історично, має глибоке коріння. Віхами на шляху становлення проблеми були кризи в основах математики, які і звели постановку цієї теми в ранг актуальних. Під обґрунтуванням математики розуміють демонстрацію можливості існування об'єктів її теорії і дослідження зв’язку між твердженнями про ці об’єкти. При такому підході доведення потребують і такі твердження, які є інтуїтивно очевидними. Саме це і називається математичною строгістю. В розвитку математичної науки були періоди надмірного захоплення формалізмом. Багато сучасних математиків вважають це захоплення іноді недоцільним. Але в процесі навчання математична строгість є необхідною. Лише професійний математик здатен визначити, коли евристичний аргумент можна довести до необхідного ступеня строгості, але ця здатність формується лише в процесі навчання проведенню формально строгих доведень.

До XIX ст. самі математики вважали, що математика досліджує числа, величини, фігури, а також, що досліджувані об’єкти даються нам разом з їх структурою. Наприклад, натуральні числа разом з операціями додавання та множення, множина дійсних чисел разом з функцією відстані. Внаслідок розвитку функціонального аналізу математики усвідомили, що на одній і тій же множині можна побудувати різні структури, а також, що одна і та сама математична структура може бути побудована на різних множинах. Це дало можливість дивитись на математику як на науку, що досліджує математичні структури, а основним методом дослідження є аксіоматичний.

Метою курсу є ознайомлення із сутністю аксіоматичного методу, аналіз його характерних рис, розгляд можливостей використання зв’язків між елементарною та вищою математикою.

Завдання:

- вивчення загальних питань аксіоматики;
- ознайомлення з основними проблемами аксіоматичної побудови математичної теорії;
- ознайомлення з аксіоматичними теоріями числових систем;
- вивчення основних фактів геометрії Лобачевського, як першої неевклідової геометрії;
- систематизація набутих при вивченні базових математичних дисциплін знань, вмінь та навичок.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

Знати:

- суть аксіоматичного методу побудови математики;
- систему аксіом теорії множин;
- систему аксіом Пеано арифметики натуральних чисел;
- зміст аксіоматичних теорій Вейля і Гілберта евклідової геометрії;
- основні факти геометрії Лобачевського;
- основні моделі геометрії Лобачевського.

Вміти:

- розв’язувати основні типи задач аксіоматичних теорій числових систем;
- розв’язувати основні типи задач планіметрії Евкліда;
- доводити еквівалентність п’ятого постулату і деяких тверджень евклідової геометрії;
- доводити найпростіші теореми геометрії Лобачевського.

1 ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ОСНОВ МАТЕМАТИКИ

Тема 1. Загальні питання аксіоматики

Мета: Ознайомитися з принципами побудови теорій математичних структур аксіоматичним методом, вимогами до систем аксіом математичних структур.

План:

1. Предмет основ геометрії. Історична довідка. Суть аксіоматичного методу.
2. Поняття математичної структури, аксіоматичної теорії математичної структури, ізоморфізму математичних структур. Поняття моделі (інтерпретації) системи аксіом.
3. Вимоги до системи аксіом.
4. Огляд системи аксіом Вейля. Доведення несуперечливості системи аксіом Вейля евклідової геометрії.
5. Доведення повноти системи Вейля.

Ключові поняття: система аксіом, математична структура, модель системи аксіом, ізоморфізм моделей.

1. Предмет основ геометрії. Історична довідка. Суть аксіоматичного методу.

В математиці, на відміну від експериментальних наук, основна частина її положень не може бути перевірена експериментально. Тому в математиці переважає логічний спосіб доведення. Це пояснюється абстрактним характером об'єктів.

Аксіоматична побудова математики стала можливою після накопичення великої кількості математичних фактів. Перша спроба аксіоматичної побудови математики була зроблена в 3 ст. до н.е. в Стародавній Греції Евклідом. Ним була написана робота «Начала», яка складалася з 13 книг. В «Началах» Евкліда формулюються аксіоми та постулати, доводяться теореми на основі теорем та постулатів. Незважаючи на наявність недоліків в запропонованій Евклідом аксіоматичній побудові геометрії, «Начала» до середини 19 сторіччя вважалися зразком наукової строгості.

В розвитку аксіоматичного методу виділяють три етапи:

1. Від Евкліда до середини 19 сторіччя.
2. Середина 19 сторіччя. Цей період пов'язаний з відкриттям Лобачевським неевклідової геометрії. Також в цей час активно створюються інші аксіоматики евклідової геометрії: Гільберта, Вейля та ін.
3. На початку 20 сторіччя виникли труднощі в обґрунтуванні математики, обумовленні появою парадоксів в теорії множин. Для подолання цих труднощів

Гільберт запропонував свою теорію доведень, яка була названа метаматематикою.

Аксіоматичний метод є цінним інструментом наукових досліджень, за допомогою якого вдається розкрити зв'язки між поняттями та математичними теоріями. Він дозволяє зробити викладення теорії математично строгим.

Геометрія вивчає властивості та відношення низки понять: точка, пряма, кут, коло и т.п. При цьому до їх наукового викладу пред'являються вимоги послідовності, логічного зв'язку та ін.. Цього можна досягти шляхом чіткого розбиття всього матеріалу геометрії на ряд точно сформульованих тверджень, якими є аксіоми, теореми, означення.

Аксіомою називається твердження, яке приймається без доведення. Твердження, справедливість якого перевіряється доведенням, називається *теоремою*. Під *доведенням* розуміють ланцюжок тверджень, які випливають одне з іншого за правилами логіки. Строго довести яке-небудь твердження означає вивести його з аксіом.

Твердження, що встановлює зміст нового поняття та розкриває смисл нового терміну, називається *означенням*. Як правило, означення нового поняття дається на базі раніше означених, тобто маємо справу з неперервним ланцюжком означень. Тому виникає необхідність прийняти без означення деякі поняття. Їх називають *основними* або *неозначуваними*. Основні поняття діляться на *основні об'єкти* та *основні відношення.*

Таким чином, дедуктивна схема викладення теорії полягає в наступному:

1. перераховуються основні поняття;
2. з їх допомогою даються означення інших понять;
3. формулюються аксіоми (система аксіом);
4. на базі аксіом доводяться теореми.

Звичайно, у виборі аксіом, які покладаються в основу теорії, є певний ступінь довільності. Але зазвичай аксіоми виникають природним чином, з пізнання дійсності.

Суть аксіоматичного методу полягає в наступному:

- кожне поняття повинно бути або внесено до списку неозначуваних понять, або означене;
- кожне твердження повинно бути або внесено до списку аксіом, або доведене.

Характерною рисою аксіоматичного методу є його абстрактність. Про основні поняття відомо лише те, що про них сказано в аксіомах, вони позбавлені конкретного змісту.

2. Поняття математичної структури, аксіоматичної теорії математичної структури, ізоморфізму математичних структур. Поняття моделі (інтерпретації) системи аксіом.

Математичною структурою називається сукупність елементів одного або кількох множин, відношень, які задані між цими елементами, та аксіом, яким задовольняють ці відношення. Будемо позначати

$$M = \left\{ \underbrace{M_1, M_2, \ldots}_{\text{множини}}, \underbrace{\rho_1, \rho_2, \ldots}_{\text{відношення}}, \underbrace{A_1, A_2, \ldots}_{\text{аксіоми}} \right\}$$

Приклад. Математична структура групи має вигляд $M = \{G, \rho, A_1, A_2, A_3\}$, де G - будь-яка непуста множина, ρ - алгебраїчна операція $*$ на G,

A_1. $(\forall a, b, c \in G)\, a * (b * c) = (a * b) * c$,

A_2. $(\exists e \in G)(\forall a \in G)\, a * e = a$, елемент e називають *нейтральним елементом*,

A_3.$(\forall a \in G)\,(\exists a' \in G)\, a * a' = e$, елемент a' називають *симетричним до а елементом.*

Аксіоматичною теорією даної математичної структури називається сукупність тверджень, які можна вивести із системи аксіом цієї структури, користуючись лише правилами логіки.

Для однієї математичної структури можна будувати різні аксіоматичні теорії. Вони можуть відрізнятись списками аксіом, теорем, означень. Геометрію, наприклад евклідову, можна викласти аксіоматичним методом, базуючись на різних системах аксіом.

Моделлю (або *інтерпретацією*) системи аксіом називаються множини елементів конкретної природи, на яких означені всі відношення та виконані всі аксіоми даної структури.

Приклад. Модель структури групи.

Нехай G є множиною Z цілих чисел, $*$ - додавання цілих чисел. Ця алгебраїчна операція є асоціативною, $e = 0$, для кожного цілого числа z маємо $z' = -z$.

Дві *математичні структури* (або їх *моделі*) називаються *ізоморфними*, якщо між елементами множин та відношеннями встановлена бієкція так, що елементам однієї структури (моделі), які знаходяться у деякому відношенні, відповідають елементи другої структури (моделі), які знаходяться у відповідному відношенні.

Аксіоматичним методом теорія будується формально, без опори на інтуїцію, очевидність і т. ін., але один раз побудована теорія може бути реалізована на різних множинах об'єктів – на різних інтерпретаціях.

3. Вимоги до системи аксіом.

1. Несуперечливість (сумісність).
2. Незалежність (мінімальність).
3. Повнота (достатність).

Означення. Система аксіом називається внутрішньо несуперечливою, якщо з неї не можна вивести 2 протилежних твердження: F і $\overline{F}$.

Система аксіом називається змістовно несуперечливою, якщо існує хоча б одна її модель. Отже, питання про змістовну несуперечливість системи аксіом зводиться до питання несуперечливості її моделі.

Означення. Говорять, що *аксіома* A_i в системі аксіом $\Sigma = \{A_1,..., A_{i-1}, A_i, A_{i+1},..., A_n\}$ є *незалежною*, якщо вона не є наслідком інших аксіом цієї системи. *Система аксіом* називається *незалежною*, якщо в ній кожна аксіома незалежна.

Теорема. Нехай задано систему аксіом $\Sigma = \{A_1,..., A_{i-1}, A_i, A_{i+1},..., A_n\}$. Розглянемо нову систему аксіом $\Sigma' = \{A_1,..., A_{i-1}, \overline{A_i}, A_{i+1},..., A_n\}$. Якщо система аксіом Σ' несуперечлива, то аксіома A_i в системі аксіом Σ є незалежною.

Доведення. Застосуємо метод від супротивного. Припустимо, що аксіома A_i в системі Σ є залежною, тобто в аксіоматичній теорії, побудованій на базі системи аксіом $\Sigma \setminus \{A_i\}$, твердження A_i є теоремою. Але тоді в аксіоматичній теорії, побудованій на базі системи аксіом Σ', справедливі твердження A_i (теорема) і $\overline{A_i}$ (аксіома), отже система аксіом Σ' суперечлива. Теорема доведена.

Означення. *Система аксіом* називається *повною*, якщо її не можна доповнити твердженням, яке б:

1. не суперечило аксіомам системи,
2. не залежало від них,
3. не вводило нових неозначуваних понять.

Теорема. Якщо будь-які дві моделі даної системи аксіом ізоморфні, то вона повна.

Доведення. Нехай система аксіом Σ є неповною. За означенням існує твердження F таке, що не містить нових неозначуваних понять, система $\Sigma \bigcup \{F\}$ є несуперечливою і твердження F в ній є незалежним. Розглянемо моделі систем аксіом $\Sigma \bigcup \{F\}$ і $\Sigma \bigcup \{\overline{F}\}$. Вони є також моделями системи аксіом Σ, причому не ізоморфними, адже в одній моделі виконується F, а в іншій $\overline{F}$. Теорема доведена.

4. Огляд системи аксіом Вейля. Доведення несуперечливості системи аксіом Вейля евклідової геометрії.

В 1918 році німецьким математиком Г.Вейлем була запропонована точково-векторна аксіоматика евклідової геометрії (**Додаток А**).

Основними об'єктами системи аксіом Вейля є «точка» та «вектор». Основними відношеннями є «додавання векторів», «множення вектора на число», «скалярний добуток векторів», «відкладання вектора від точки». Аксіоматика Вейля складається з п'яти груп аксіом. Аксіоми перших трьох груп складають аксіоматику векторного простору, перших чотирьох груп – аксіоматику векторного евклідового простору, всю систему аксіом називають ще системою аксіом евклідового точково-векторного простору.

Несуперечливість системи аксіом Вейля доводиться шляхом побудови *арифметичної моделі*. В цій моделі «точкою» і «вектором» називають будь-яку впорядковану трійку дійсних чисел. При цьому для позначення точок будемо використовувати круглі дужки. Наприклад, точкою A є трійка (a_1, a_2, a_3). Для позначення векторів використовують кутові дужки. Наприклад, вектором $\bar{x}$ є трійка $< x_1, x_2, x_3 >$.

Для основного відношення першої групи введемо таке означення: *сумою векторів* $\bar{x} =< x_1, x_2, x_3 >$ та $\bar{y} =< y_1, y_2, y_3 >$ будемо називати вектор $\bar{x} + \bar{y} =< x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 >$. Можна переконатися, що таке означення для суми векторів забезпечує виконання аксіом 1.1-1.4.

Множення дійсного числа α *на вектор* $\bar{x} =< x_1, x_2, x_3 >$ (або вектора $\bar{x}$ на число α) визначається наступним чином: $\lambda\bar{x} = \lambda < x_1, x_2, x_3 >=< \lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3 >$. Так визначена операція задовольняє всім аксіомам другої групи

В третій групі основного відношення немає. Розглянемо набір векторів $\bar{e}_1 =< 1,0,0 >$, $\bar{e}_2 =< 0,1,0 >, \bar{e}_3 =< 0,0,1 >$, він утворює базис тривимірного простору. Крім цього, для будь-якого вектора $\bar{x}$ цього простору маємо $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$, тобто вектори $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, $\bar{x}$ лінійно залежні. Аксіома розмірності виконується.

Скалярним добутком векторів $\bar{x} =< x_1, x_2, x_3 >$ та $\bar{y} =< y_1, y_2, y_3 >$ називається число $(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$. Перші три аксіоми четвертої групи перевіряються безпосередньо. Скалярний квадрат вектора $\bar{x}$ має вигляд $\bar{x}^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2$, звідки випливає, що $\bar{x}^2 \geq 0$ і що $\bar{x}^2 = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$.

Відношення п'ятої групи визначається так: будь-якій парі точок $A(a_1, a_2, a_3)$ та $B(b_1, b_2, b_3)$ відповідає вектор $< b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3 >$, який будемо позначати символом $\overline{AB}$. В аксіомі 5.1 задано ненульовий вектор $\bar{x} =< x_1, x_2, x_3 >$ та точка $A(a_1, a_2, a_3)$. Легко переконатись, що точка $B(x_1 + a_1, x_2 + a_2, x_3 + a_3)$ задовольняє цю аксіому. Справедливість аксіоми 5.2 перевіряється безпосередньо.

Отже, можемо зробити висновок: система аксіом Вейля несуперечлива, якщо несуперечлива арифметика дійсних чисел.

5. Доведення повноти системи Вейля.

Позначимо символом I довільну модель системи аксіом Вейля. Якщо в цій моделі вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ утворюють базис, то для будь-якого вектора $\bar{x}$ отримаємо розклад $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$, де дійсні числа x_1, x_2, x_3 називаються координатами $\bar{x}$ в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Зафіксуємо точку O. Будь-яка точка A відносно репера $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ має координати a_1, a_2, a_3, якщо розклад радіус-вектора $\overline{OA}$ має вигляд $\overline{OA} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3$.

Позначимо символом I_0 арифметичну модель системи аксіом Вейля. Розглянемо таку відповідність між моделями I та I_0. Точці $A(a_1, a_2, a_3) \in I$ поставимо у відповідність впорядковану трійку $(a_1, a_2, a_3) \in I_0$, вектору $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in I$ поставимо у відповідність впорядковану трійку $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle \in I_0$, сумі векторів з моделі I поставимо у відповідність суму відповідних векторам впорядкованих трійок, і так само між іншими операціями встановимо відповідність. Очевидно, вказана відповідність є бієктивною і має властивість ізоморфізму. Оскільки ізоморфізм є відношенням еквівалентності, то доведений ізоморфізм моделей I та I_0 дозволяє зробити висновок про ізоморфізм будь-якої пари моделей системи аксіом Вейля. Отже, ця система аксіом повна.

Тема 2. Аксіоматичні теорії натуральних, цілих і раціональних чисел.

Мета. Ознайомитись з аксіоматичною побудовою числових систем, з основними принципами розширення множини.

План.

1. Аксіоматика Пеано системи натуральних чисел і наслідки з неї.
2. Аксіоматичне означення цілих чисел. Множина цілих чисел як розширення множини натуральних чисел.
3. Аксіоматичне означення раціональних чисел. Множина раціональних чисел як розширення множини цілих чисел.
4. Означення перерізу на множині раціональних чисел.

Ключові поняття: натуральне число, аксіоми Пеано, числові системи, розширення множини, переріз на множині.

1. Аксіоматика Пеано системи натуральних чисел і наслідки з неї.

Вперше питання про створення аксіом арифметики поставив Лобачевський. Існують різні аксіоматики системи натуральних чисел. Ми розглянемо аксіоматику, створену італійським математиком Пеано. Неозначуваними поняттями в ній є: об'єкти «одиниця», «натуральне число» та відношення «безпосередньо слідує за». Список аксіом складається з чотирьох аксіом:

A_1. Одиниця – натуральне число.

A_2. Для кожного натурального числа a існує єдине натуральне число a', яке безпосередньо слідує за a.

A_3. Для кожного натурального числа a, відмінного від одиниці, існує єдине натуральне число $\hat{a}$ таке, що число a безпосередньо слідує за $\hat{a}$.

A_4 (аксіома індукції). Якщо будь-яка підмножина M натуральних чисел містить одиницю і з припущення що M містить натуральне число a випливає, що M містить натуральне число a', то M є множиною N всіх натуральних чисел.

Зауваження. Остання аксіома є обґрунтуванням методу доведення істинності тверджень, сформульованих для натуральних чисел – методу математичної індукції.

Умовимось позначати: одиницю символом 1, натуральне число $1'$ (що безпосередньо слідує за 1) символом 2, $2'$ – символом 3, $3'$ – символом 4 і т.д. Розглянемо початки аксіоматичної теорії натуральних чисел.

Означення. Сумою натурального числа a і одиниці будемо називати натуральне число a', яке безпосередньо слідує за a. Сумою натурального числа a і натурального числа b' (що безпосередньо слідує за b) називається натуральне число $(a+b)'$.

Користуючись цим означенням, можна, наприклад, обґрунтувати, що $2+2=4$. Дійсно, запишемо таку послідовність рівностей.

$$2+2=2+1'=(2+1)'=3'=4.$$

Теорема. Додавання натуральних чисел асоціативне і комутативне.

Зауваження. Доведення властивостей слід проводити саме в тій послідовності, яка запропонована в формулюванні. Для доведення властивостей додавання суттєве значення має аксіома індукції.

Означення. Добутком натурального числа a і одиниці будемо називати саме натуральне число a. Добутком натурального числа a і натурального числа b' (що безпосередньо слідує за b) називається натуральне число $ab+a$.

Доведемо, що $2\cdot 2=4$.

Дійсно, $2\cdot 2=2\cdot 1'=(2\cdot 1)+2=2+2=4$.

Теорема. Множення натуральних чисел пов'язане із додаванням дистрибутивним законом. Множення натуральних чисел асоціативне і комутативне.

Означення. Натуральне число a називається більшим за натуральне число b, якщо існує таке натуральне число k, що $a=b+k$. Позначають $a>b$. При цьому число b називають меншим за число a і пишуть $b<a$.

Це відношення між натуральними числами має такі властивості:

1. $a'>a$;
2. якщо $a>b$ і $b>c$, то $a>c$.
3. для будь-яких двох натуральних чисел a і b має місце лише одне з трьох співвідношень: $a>b$, $a<b$, $a=b$.

При доведенні останньої властивості теж використовується аксіома індукції.

Означення. Різницею натурального числа a і натурального числа b називається таке натуральне число c, що $a=b+c$.

Теорема. Різниця натурального числа a і натурального числа b існує і єдина тоді і тільки тоді, коли $a>b$.

Той факт, що в множині натуральних чисел не завжди виконується операція віднімання, робить доцільною необхідність розширення цієї множини.

Принцип розширення полягає в наступному:

1). якщо множина A розширюється до множини B, то $A \subset B$.

2). операція, яка виконувалась у множині A, повинна виконуватись і мати ті самі властивості у множині B.

3). операція, яка не виконувалась або не завжди виконувалась у множині A, повинна виконуватись у множині B.

4). розширення повинне бути мінімальним, тобто розширення не повинне містити відмінних від A підмножин із такими ж, що і у A, властивостями.

Першим розширенням є поповнення множини натуральних чисел нулем, який позначають символом 0. Це число уводиться за допомогою таких аксіом:

1. $(\forall a \in N)\, a + 0 = 0 + a = a$.
2. $(\forall a \in N)\, a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
3. 0+0=0, $0 \cdot 0 = 0$.
4. число 0 є меншим будь-якого натурального числа.

2. Аксіоматичне означення цілих чисел. Множина цілих чисел як розширення множини натуральних чисел.

Означення. Нехай дано множину $N_0 = N \cup \{0\}$. Множиною цілих чисел називається множина $Z = \{(a,b) : a, b \in N_0\}$, на якій операції порівняння, додавання, множення елементів уведені за такими правилами (аксіомами):

1.1) $(a,b) > (c,d) \Leftrightarrow a + d > b + c$,

1.2) $(a,b) < (c,d) \Leftrightarrow a + d < b + c$,

1.3) $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$.

2) $(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$,

3) $(a,b) \cdot (c,d) = (ac + bd, ad + bc)$

Наслідок. Ціле число не зміниться, якщо до кожної компоненти пари додати або, якщо можливо, відняти одне і те саме натуральне число.

В справедливості наслідку легко переконатись за допомогою першої аксіоми. З наслідку випливає, що уведену множину впорядкованих пар можна розбити на класи, в кожному з яких міститимуться всі попарно рівні (в сенсі аксіоми 1.3) пари. Отже,

Ціле число - це клас попарно рівних між собою впорядкованих пар.

Теорема. Додавання цілих чисел комутативне і асоціативне.

Теорема. Множення цілих чисел комутативне, асоціативне і дистрибутивне по відношенню до додавання.

Доведення легко проводиться на мові пар.

Означення. Різницею цілого числа (a,b) і цілого числа (c,d) називається таке ціле число (u,v), що $(a,b) = (u,v) + (c,d)$.

Теорема. Різниця цілих чисел завжди існує і єдина.

Доведення випливає з формули

$$(a,b)-(c,d)=(u,v)=(a+d,b+c),$$

яку неважко отримати, використовуючи означення різниці.

Розглянемо цілі числа, друга компонента яких дорівнює 0, тобто множину $M=\{(a,0): a \in N_0\}$. Легко отримати рівності:

$(a,0)+(c,0)=(a+c,0)$,

$(a,0)\cdot(c,0)=(ac,0)$,

$(a,0)-(c,0)=(a,c)=(a-c,0)$, якщо $a>c$.

Тобто, якщо ввести взаємно однозначну відповідність f за правилом $f:(a,0)\to a$, то для неї виконуються вимоги ізоморфізму. З'ясувалося, що множина M ізоморфна множині N_0, або, інакше, що множина $N_0=N\cup\{0\}$ є підмножиною множини Z. А це, в свою чергу, означає, що Z є розширенням множини N_0 і важливо відмітити, що в цьому розширенні операція віднімання чисел завжди виконується.

В силу введеної відповідності f рівність $(a,0)-(c,0)=(a,c)$ можна переписати у вигляді

$$(a,c)=a-c,$$

який будемо називати *другою формою запису цілого числа*.

Означення. Будь-яке ціле число, менше за число $0=(0,0)$, називається від'ємним.

За аксіомою 1.2) отримаємо

$(a,c)<(0,0)\Leftrightarrow a<c$,

тобто від'ємним є ціле число, в якому перша компонента менша за другу.

Віднявши від обох компонент від'ємного числа його першу компоненту, отримаємо $(a,c)=(0,c-a)$, $c>a$. Якщо ввести позначення $c-a=k$, то від'ємне ціле число набуде вигляду $(0,k)$. Це дає можливість продовжити введену відповідність f на множину від'ємних чисел. Дійсно, якщо замість $(0,k)$ писати різницю $0-k$ (друга форма запису цілого числа), то очевидно відповідність $f:(0,a)\to -a$ $(-a=0-a)$ буде взаємно однозначною і на множині від'ємних чисел. Фактично, ми ввели поняття знаку цілого числа.

Теорема. Добуток двох цілих чисел одного знаку є додатним цілим числом (натуральним числом). Добуток двох цілих чисел різних знаків є від'ємним цілим числом.

У сформульованій властивості цілих чисел легко переконатись, якщо задавати цілі числа парами.

Далі можна довести властивості нерівностей, ввести дії над нерівностями, означити операцію ділення цілих чисел і показати, що ця операція не завжди виконується в множині Z. Отже, знову виникає ситуація необхідності розширення множини.

3. Аксіоматичне означення раціональних чисел. Множина раціональних чисел як розширення множини цілих чисел.

Означення. Нехай дано множину Z цілих чисел, які будемо позначати $a, b, c..., x, y,...$. Множиною раціональних чисел називається множина $Q = \{(a,b): a,b \in Z \wedge b > 0\}$, на якій операції порівняння, додавання, множення елементів уведені за такими правилами (аксіомами):

1.1) $(a,b) > (c,d) \Leftrightarrow ad > bc$,

1.2) $(a,b) < (c,d) \Leftrightarrow ad < bc$,

1.3) $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$.

2) $(a,b) + (c,d) = (ad + bc, bd)$,

3) $(a,b) \cdot (c,d) = (ac, bd)$.

Наслідок. Раціональне число не зміниться, якщо кожну компоненту пари помножити або, якщо можливо, розділити (націло) на одне і те саме відмінне від нуля ціле число.

В справедливості наслідку легко переконатись за допомогою аксіоми 1.3). З наслідку випливає, що уведену множину впорядкованих пар можна розбити на класи, в кожному з яких міститимуться всі попарно рівні (в сенсі аксіоми 1.3) пари. Отже,

Раціональне число – це клас попарно рівних між собою впорядкованих пар.

Теорема. Додавання раціональних чисел комутативне і асоціативне.

Теорема. Множення раціональних чисел комутативне, асоціативне і дистрибутивне по відношенню до додавання.

Доведення легко проводиться на мові пар.

Означення. Різницею раціонального числа (a,b) і раціонального числа (c,d) називається таке раціональне число (u,v), що $(a,b) = (u,v) + (c,d)$.

Теорема. Різниця раціональних чисел завжди існує і єдина.

Доведення випливає з формули

$$(a,b) - (c,d) = (u,v) = (ad - bc, bd),$$

яку легко отримати, використовуючи означення різниці.

Означення. Часткою від ділення раціонального числа (a,b) на раціональне число (c,d) називається таке раціональне число (u,v), що $(a,b) = (u,v) \cdot (c,d)$. При цьому число (a,b) називається діленим, а число (c,d) – дільником.

Теорема. Частка двох раціональних чисел завжди існує і єдина, якщо перша компонента дільника не дорівнює 0.

Доведення випливає з формули

$$(a,b) : (c,d) = (u,v) = (ad, bc),$$

яку легко отримати, використовуючи означення різниці.

Покажемо , що множина раціональних чисел є мінімальним розширенням множини цілих чисел. Розглянемо раціональні числа, друга компонента яких дорівнює 1, тобто множину $M=\{(a,1): a\in Z\}$. Легко отримати співвідношення:

$(a,1)>(c,1)\Leftrightarrow a>c$,
$(a,1)<(c,1)\Leftrightarrow a<c$,
$(a,1)=(c,1)\Leftrightarrow a=c$.
$(a,1)+(c,1)=(a+c,1)$,
$(a,1)\cdot(c,1)=(ac,1)$.
$(a,1)-(c,1)=(a-c,1)$,
$(a,1):(c,1)=(a,c)=\left(\frac{a}{c},1\right)$, якщо ціле число a ділиться на ціле число c.

Тобто, якщо ввести взаємно однозначну відповідність f за правилом $f:(a,1)\to a$, то для неї виконуються вимоги ізоморфізму. Ми отримали, що множина M ізоморфна множині Z, або, інакше, що множина Z є підмножиною множини Q. А це, в свою чергу, означає, що Q є розширенням множини Z і важливо відмітити, що в цьому розширенні операція ділення чисел завжди виконується.

В силу введеної відповідності f рівність $(a,1):(c,1)=(a,c)$ можна переписати у вигляді

$$(a,c)=\frac{a}{c},$$

який будемо називати *другою формою запису раціонального числа*. Отже, раціональне число – це частка двох цілих чисел при умові, що друге число не дорівнює нулю.

Означення. Будь-яке раціональне число, менше за число $0=\frac{0}{1}=(0,1)$, називається від'ємним.

За аксіомою 1.2) отримаємо $(a,c)<(0,1)\Leftrightarrow a<0$, тобто від'ємним є раціональне число, в якому компоненти мають різні знаки. Розділивши обидві компоненти від'ємного раціонального числа на його другу компоненту, отримаємо

$$(a,c)=\left(\frac{a}{c},1\right),\ \frac{a}{c}<0.$$

Далі можна доводити властивості нерівностей, ввести дії над нерівностями. Наведемо, для прикладу одну з цих теорем.

Теорема. При множенні обох частин вірної нерівності $(a,b)<(c,d)$ на від'ємне раціональне число (m,n) отримується вірна нерівність

$$(a,b)(m,n)>(c,d)(m,n).$$

Доведення. За умовою $(a,b)<(c,d)$, тобто за аксіомою 1.2) $ad<bc$, $ad\in Z, bc\in Z$. Число (m,n) від'ємне, значить $m<0$. Помножимо обидві частини нерівності $ad<bc$ на від'ємне ціле число mn. За властивостями

нерівностей для цілих чисел отримаємо $admn > bcmn$, з якої за аксіомою 1.1) можемо записати $(am, bn) > (cm, dn)$, а за аксіомою 3) отримаємо нерівність

$$(a, b)(m, n) > (c, d)(m, n),$$

яку і треба було довести.

4. Означення перерізу на множині раціональних чисел. Приклади перерізів.

Означення. Перерізом впорядкованої множини M є представлення цієї множини у вигляді $M = A \bigcup B$, де підмножини A, B називають класами і вони мають властивості:

1) кожний клас непорожній;
2) кожний елемент множини M належить тільки одному з класів;
3) якщо $a \in A, \quad b \in B$, то $a < b$.

Переріз позначають символом $A \mid B$.

Наведемо приклади різних перетинів у множині раціональних чисел.

1 вид перетину: лівий клас має найбільше число, а правий – не має найменшого числа. Наприклад, $A \mid B = (-\infty, 3] \bigcup (3, +\infty)$.

2 вид перетину: лівий клас не має найбільшого числа, а правий – має найменше число. Наприклад, $A \mid B = (-\infty, 3) \bigcup [3, +\infty)$

3 вид перетину: лівий клас не має найбільшого числа, а правий – не має найменшого числа.

Доведемо, що такий переріз можливий на множині раціональних чисел. До класу A віднесемо всі від'ємні раціональні числа, число 0 та всі додатні раціональні числа, квадрат яких менший 2, до класу B – всі інші раціональні числа. Тоді

1) кожен клас непорожній;
2) будь-яке число з класу A менше за будь-яке число з класу B.

Припустимо, що число $a > 0$ є найбільшим в класі A. Розглянемо число $a + \frac{1}{n}, n \in N$ і покажемо, що існує таке n, що $\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$. Дійсно, $a^2 + 2a\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < a^2 + 2a\frac{1}{n} + \frac{1}{n}$. Нерівність $a^2 + 2a\frac{1}{n} + \frac{1}{n} < 2$ справедлива для натуральних $n > \left[\frac{2a+1}{2-a^2}\right] + 1$. Значить, при таких n виконується і нерівність $\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$. Це означає, що число $a + \frac{1}{n}, n \in N$ належить до класу A, але, оскільки воно більше числа $a > 0$, то $a > 0$ не є найбільшим в класі A.

Припустимо тепер, що число b найменше в класі B. Розглянемо число $b-\frac{1}{n}, n\in N$ та покажемо, що існує n таке, що $\left(b-\frac{1}{n}\right)^2>2$. Оскільки $b^2-2b\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}>b^2-2b\frac{1}{n}$, то нерівність $b^2-2b\frac{1}{n}>2$ справедлива для натуральних $n>\left[\frac{2b}{b^2-2}\right]+1$. Значить при таких n виконується і нерівність $\left(b-\frac{1}{n}\right)^2>2$. Це означає, що число $b-\frac{1}{n}, n\in N$ належить до класу B, але, оскільки воно менше числа b, то b не є найменшим в класі B.

Висновок: побудований переріз є перерізом третього виду.

Тема 3. Огляд і порівняння різних аксіоматичних теорій дійсних чисел.

Мета. Розглянути різні підходи до означення дійсного числа, ознайомитись із властивістю неперервності множини дійсних чисел.

План.

1. Огляд побудов теорії дійсного числа. Перші наслідки з аксіом.
2. Побудова теорії дійсного числа за Дедекіндом.
3. Роль аксіоми неперервності в побудові математичного аналізу.

Ключові поняття: дійсне число, послідовність, система вкладених відрізків, переріз у множині дійсних чисел.

1. Огляд побудов теорії дійсного числа.

Теорію дійсних чисел теж можна будувати аксіоматично.

Означення. Сукупність R елементів називається множиною дійсних чисел, якщо на ній уведені операції додавання і множення елементів, відношення порядку, які задовольняють системі аксіом (наприклад, із **Додатку Ґ).**

Історично відомі кілька аксіоматичних означень множини дійсних чисел. Принципово системи аксіом в цих означеннях відрізняються лише тим, як в них постулюється властивість неперервності множини дійсних чисел. У аксіоматичному підході неперервність дійсних чисел виділена явно в окрему аксіому.

Неперервність множини дійсних чисел в сенсі Кантора вводиться шляхом означення поняття вкладених відрізків і формулювання відповідної аксіоми 5.1 (**Додаток Ґ**).

Іншим варіантом формулювання неперервності множини дійсних чисел є **аксіома про верхню грань:** будь-яка обмежена зверху підмножина A множини R має точну верхню грань [18].

Відмітимо, що прийняття одного з можливих підходів для формулювання аксіоми неперервності множини дійсних чисел вимагає, згідно із сутністю аксіоматичного методу, доведення тверджень, які є іншими формулюваннями цієї аксіоми.

З системи аксіом множини дійсних чисел із Додатку Ґ виведемо, наприклад, такі твердження.

Теорема. $\forall a,b,c \in R \quad a(b-c)=ab-ac$.

Дійсно, доведенням теореми є система перетворень $a(b-c)=a(b-c)+ac-ac=a(b-c+c)-ac=ab-ac$, які можна виконати на основі аксіом 1.3, 1.4, 2.5, 1.4, 1.3.

Теорема. $\forall a \in R \quad a \cdot 0 = 0$.

За аксіомою 1.4 $\forall b \quad b-b=0$. За попередньою теоремою і аксіомою 1.4 отримаємо $a \cdot 0 = a(b-b) = ab-ab=0$, що і треба довести.

Теорема. Обернений до елемента xy дорівнює $x^{-1}y^{-1}$.

Знайдемо добуток $\left(x^{-1}y^{-1}\right)(xy)=\left(x^{-1}x\right)\left(y^{-1}y\right)=1\cdot 1=1$, отже, $(xy)^{-1}=x^{-1}y^{-1}$, що і треба було довести.

Теорема. Якщо $x \le y$, то для будь-якого $z>0$ виконується нерівність $xz \le yz$.

Доведемо, що $yz-xz \ge 0$. Дійсно, за першою з доведених теорем $yz-xz=(y-x)z$. Враховуючи умову і аксіому 3.5, робимо висновок $yz-xz \ge 0$. Залишилось додати до обох частин цієї нерівності число xz, протилежне до числа $-xz$, і застосувати аксіому 1.4.

Теорема. Для будь-яких $x>0,\ y \in R$ існує ціле n таке, що $y<nx$.

Дійсно, оскільки $x \ne 0$, то існує частка $\frac{y}{x}$, і тоді за аксіомою Архімеда існує таке ціле n, що $n > \frac{y}{x}$, звідки $y<nx$ за попередньою теоремою.

2. Побудова теорії дійсного числа за Дедекіндом.

Неперервність в сенсі Дедекінда пов'язана з поняттям перерізу множини.

Всі аксіоми перших трьох груп системи із Додатку Ґ залишимо без зміни.

Означення. Перерізом впорядкованої множини M є представлення цієї множини у вигляді $M=A\bigcup B$, де підмножини A,B називають класами і вони мають властивості:

1) кожний клас непорожній;
2) кожний елемент множини M належить тільки одному з класів;
3) якщо $a \in A, \quad b \in B$, то $a<b$.

Переріз позначають символом $A\,|\,B$, клас A називається лівим, клас B – правим.

Доповнимо систему з перших трьох груп такою аксіомою.

Аксіома (Дедекінда). Кожне число з множини R визначає переріз множини R і для всякого перерізу цієї множини існує число α, яке і здійснює цей переріз. Це число є або найбільшим у лівому класі (і тоді у правому класі немає найменшого), або найменшим у правому класі (і тоді у лівому класі немає найбільшого).

Отримаємо ще одну систему аксіом множини дійсних чисел, наслідками якої є всі відомі властивості дійсних чисел. В цій аксіоматичній теорії можна отримати як теореми твердження про вкладенні відрізки, аксіому Архімеда.

Ми ж зупинимось на одному з конструктивних підходів до теорії дійсного числа – побудові дійсних чисел за допомогою Дедекіндових перерізів. При цьому підході властивість неперервності (у наведеному вище формулюванні) доводиться в якості теореми.

Доведення побудуємо, спираючись на систему аксіом з **Додатку Ґ.** З вимоги 3) означення перерізу випливає, що множини A,B не перетинаються. Якщо вибрати будь-яке дійсне число α і до класу A віднести всі числа, менші за α, до класу B – всі числа, більші за α, а саме число α – до будь-якого з цих двох класів. Тоді можемо говорити, що число α здійснює переріз і позначати $A\,|\,B \sim \alpha$, тобто перше твердження доведене.

Нехай тепер $A\,|\,B$ – деякий переріз множини дійсних чисел. За другою вимогою означення, якщо $x \in A,\, y \in B$, то $x < y$. Таким чином, $\forall y \;\sup A \le y$, звідки $\sup A \le \inf B$. Рівність неможлива, тому що в противному випадку $\exists \xi \;\; \sup A < \xi < \inf B$, причому ξ не належить жодному з класів, що неможливо. Отже, число $\alpha = \sup A = \inf B$ здійснює заданий переріз $A\,|\,B$ [14]. Можливі два випадки: $\alpha \in A$ або $\alpha \in B$.

Покажемо, що неможливий переріз третього типу. Нехай $X\,|\,X'$ – переріз в R. Позначимо символом A множину раціональних чисел, що належать X, A' – множину раціональних чисел, що належать X'. Нехай $A\,|\,A' \sim \alpha$.

1) якщо $\alpha \in X$, те воно найбільше в цьому класі. Припустимо противне. Нехай існує $\beta > \alpha$ і $\beta \in X$. Існує раціональне число $r : \alpha < r < \beta$. Оскільки $r < \beta$, то $r \in A$. Оскільки $r > \alpha$, то $r \in A'$. Отримали протиріччя.

2) якщо $\alpha \in X'$, то воно найменше в цьому класі. Припустимо противне. Нехай існує $\beta < \alpha$ і $\beta \in X'$. Існує раціональне число $r : \alpha > r > \beta$. Оскільки $r < \alpha$, то $r \in A'$. Оскільки $r > \beta$, то $r \in A$. Отримали протиріччя.

Таким чином, в R немає "щілин", як у множині раціональних чисел. Ця властивість і називається неперервністю множини дійсних чисел.

3. Роль аксіоми неперервності в побудові математичного аналізу.

Значення аксіоми неперервності для побудови теорії дійсного числа ми вже розглянули. Але без неї неможлива і строга побудова математичного аналізу. Тривалий історичний проміжок часу математики доводили теореми з аналізу, посилаючись в "тонких місцях" на геометричне обґрунтування, а іноді й зовсім посилаючись на очевидність. Лише в останній третині XIX століття німецький математик Карл Вейєрштрас здійснив арифметизацію аналізу, побудувавши першу строгу теорію дійсних чисел як нескінченних десяткових дробів. Він запропонував класичне визначення границі на мові $\varepsilon - \delta$, довів ряд тверджень, які до нього вважалися очевидними, і тим самим завершив побудову фундаменту математичного аналізу.

Наведемо декілька фундаментальних тверджень аналізу, доведення яких спирається на властивість неперервності дійсних чисел.

Теорема Вейєрштраса. Будь-яка обмежена монотонно зростаюча послідовність є збіжною.

Теорема Больцано-Коші. Неперервна на відрізку функція, яка на кінцях цього відрізку приймає значення різних знаків, приймає значення 0 в деякій внутрішній точці відрізка.

Теореми про існування степеневої, показникової, логарифмічної та трансцендентних функцій.

Тема 4. Сучасні аксіоматичні теорії евклідової геометрії.

Мета: Порівняти аксіоматичні теорії евклідової геометрії, побудовані на базі систем аксіом Вейля та Гільберта.

План:

1. Побудова аксіоматичної теорії Вейля.

а) Наслідки з аксіом групи скалярного добутку. Означення довжини вектора, кута між векторами, ортогональних векторів. Існування ортонормованого базису.

б) Наслідки з аксіом п’ятої групи.

в) Введення прямокутної декартової системи координат. Відстань між двома точками в декартових координатах.

г) Означення основних понять в аксіоматичній теорії Вейля.

2. Побудова евклідової геометрії на базі системи аксіом Гільберта.

а) Огляд системи аксіом Гільберта евклідової геометрії.

б) Наслідки з аксіом перших трьох груп.

в) Обґрунтування теорії вимірювання відрізків за допомогою аксіом четвертої групи. Поняття абсолютної геометрії.

г) Сутність проблеми 5 постулату Евкліда. Еквівалентність аксіоми паралельності та п’ятого постулату Евкліда. Інші еквіваленти п’ятого постулату.

3. Доведення несуперечливості системи аксіом Гільберта. Арифметична модель.

Ключові поняття: евклідова геометрія, абсолютна геометрія, аксіоматична теорія Вейля, аксіоматична теорія Гільберта, довжина відрізка, величина кута, проблема 5 постулату Евкліда.

1. Побудова аксіоматичної теорії Вейля.

а) Наслідки з аксіом групи скалярного добутку.

Довжиною вектора називається квадратний корінь з його скалярного квадрату: $|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x}^2}$.

Кутом між векторами $\bar{x}$ та $\bar{y}$ називається число φ, що визначається формулою $\cos\varphi = \dfrac{(\bar{x}, \bar{y})}{|\bar{x}||\bar{y}|}$.

Два вектора $\bar{x}$ та $\bar{y}$ називаються *ортогональними*, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ називається *ортонормованим*, якщо виконується умова $(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \delta_{ij}$. Існування ортонормованого базису випливає з третьої та четвертої груп аксіом Вейля.

б) Наслідки з аксіом п'ятої групи.

Теорема. Довести, що $\overline{AA} = \overline{BB} = ... = \bar{0}$.

Дійсно, запишемо аксіому 5.2 для набору точок A, A, C, отримаємо $\overline{AA} + \overline{AC} = \overline{AC}$, звідки за аксіомами 1.1 та 1.3 можемо записати $\overline{AA} = \bar{0}$.

Теорема. $\overline{AB} = -\overline{BA}$.

Із запису аксіоми 5.2 для набору точок A, B, A отримаємо $\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA}$. За попередньою теоремою та за аксіомою 1.4 можемо записати $\overline{BA} = -\overline{AB}$, що і доводить теорему.

Теорема. Якщо $\overline{AB} = \bar{0}$, то точки A та B співпадають.

Дійсно, з рівності $\overline{CA} + \overline{AB} = \overline{CB}$ отримаємо $\overline{CA} = \overline{CB}$. За аксіомою 5.1 точки A та B співпадають.

в) Введення прямокутної декартової системи координат. Відстань між двома точками в декартових координатах.

Нехай $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ – ортонормований базис. Зафіксуємо точку O і розглянемо репер $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$. Будь-якій точці M евклідового простору відповідає радіус-вектор $\overline{OM} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$, тобто точці M відповідає впорядкована трійка чисел (x_1, x_2, x_3), і навпаки.

Таким чином, встановлюється взаємно однозначна відповідність між впорядкованими трійками дійсних чисел та точками простору. Назвемо цю відповідність декартовою системою координат.

В декартових координатах вектор, що задається точками $A(a_1,a_2,a_3)$ та $B(b_1,b_2,b_3)$, має координати $\overline{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$.

Відстанню d між точками $A(a_1,a_2,a_3)$ та $B(b_1,b_2,b_3)$ називається довжина вектора $\overline{AB}$, тобто $d=\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{\overline{AB}^2}$.

В декартових координатах довжина вектора $\overline{AB}$, а, отже, і відстань між точками $A(a_1,a_2,a_3)$ та $B(b_1,b_2,b_3)$, обчислюється за формулою

$$d=\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}.$$

г) Означення основних понять в аксіоматичній теорії Вейля

Означення. Нехай дано точку A і ненульовий вектор $\overline{p}$. Прямою $l=\left(A,\overline{p}\right)$ називається множина таких точок M, що $\overline{AM}=t\cdot\overline{p}$, де $t\in R$. Точка A називається початковою, вектор $\overline{p}$ – напрявляючим вектором прямої.

Очевидно, точка A належить прямій, оскільки при $t=0$ маємо вірну векторну рівність $\overline{AA}=0\cdot\overline{p}$.

Теорема. Будь-яка точка прямої $l=\left(A,\overline{p}\right)$ може бути взята в якості початкової.

Теорема. Нехай дано точку A і ненульовий вектор $\overline{p}$. Існує єдина пряма, для якої точка A є початковою, а вектор $\overline{p}$ – напрямним.

Наслідок. Через будь-які різні точки A та B проходить єдина пряма.

Теорема. Через точку B, яка не належить прямій $l=\left(A,\overline{p}\right)$, проходить єдина пряма, паралельна прямій l.

2. Побудова евклідової геометрії на базі системи аксіом Гільберта.

а) Огляд системи аксіом Гільберта евклідової геометрії.

Аксіоматичне обґрунтування геометрії вперше було дано Гільбертом в 1899 р. після того, як була відкрита неевклідова геометрія. Невдовзі після цього з'явилися системи аксіом Пеано. Кагана, Шура та ін. Система аксіом Гільберта складається з 20 аксіом, які розбиті на п'ять груп.

В першій групі містяться вісім *аксіом приналежності (інцидентності)*. Вони описують властивості основних об'єктів – *точок, прямих, площин*, пов'язаних основним відношенням – *відношенням інцидентності*. З аксіом 1.7.-1.8. випливає, що розмірність простору дорівнює трьом.

Друга група аксіом містить чотири *аксіоми порядку.* Основне відношення – *лежати між* – формулюється для трьох точок, інцидентних одній прямій.

Аксіоми третьої групи називаються *аксіомами конгруентності*. Вони описують властивості основного відношення цієї групи – *відношення конгруентності*. Воно задається на множинах відрізків та кутів.

Четверта група аксіом називається групою *аксіом неперервності*. В ній немає основного відношення. Дві аксіоми цієї групи описують властивості неперервності розташування точок на прямій (взаємно однозначна відповідність між множиною точок прямої і множиною дійсних чисел) і є базою для введення понять довжини відрізка та величини кута. Обидві ці аксіоми можна замінити одним твердженням – аксіомою Дедекінда (**Додаток Б**).

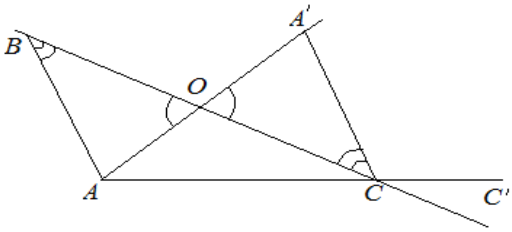
П’ята група складається з однієї аксіоми – *аксіоми паралельності.* Ця аксіома відіграє ключову роль в побудові саме евклідової геометрії, без неї неможливо довести такі важливі теореми: сума кутів будь-якого трикутника дорівнює 180^0; навколо кожного трикутника можна описати коло; вписаний в коло кут, що спирається на його діаметр, є прямим; в будь-якому прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів його катетів та ін..

б) Наслідки з аксіом перших трьох груп.

Зауваження. Прослідкуємо лише за побудовою аксіоматичної теорії евклідової планіметрії. Її система аксіом включає аксіоми 1.1-1.3 системи Гільберта та всі аксіоми інших груп цієї системи.

Послідовність введення означень понять і доведення теорем про властивості цих понять можна прослідкувати в Додатку Г. Зокрема, після формулювання аксіом перших трьох груп можна дати означення відрізка, кута, трикутника. Серед наслідків з аксіом перших трьох груп особливу роль відіграє теорема про зовнішній кут трикутника. Наведемо її з доведенням, а наслідки з неї можна знайти в практичних заняттях.

Теорема 30. Зовнішній кут трикутника більший за кожний внутрішній кут, не суміжний із ним**.**



Доведення. Розглянемо трикутник ABC. За теоремою 23 існує єдина точка O така, що $BO = OC$. На промені $[AO)$ існує єдина точка A' така, що $AO = OA'$ (аксіома 3.1). Проведемо відрізок $A'C$. Далі розглянемо трикутники AOB та $A'OC$, які за теоремою 14 будуть рівні, отже $\angle ABO = \angle OCA' = \angle BCA'$. Розглянемо дві півплощини α та α' відносно прямої BC. Оскільки за побудовою відрізок AA' перетинається з BC в точці O, то за теоремою 10 точки A і A' лежать в різних півплощинах. Також, з того, що AC' перетинається з BC в точці C, випливає, що точки A і C' лежать різних півплощинах відносно прямої BC. Отже, точки A' і C' лежать в одній півплощині. Тоді промінь CA' є внутрішнім променем кута BCC', звідки $\angle ABC = \angle BCA' < \angle BCC'$. Аналогічно доводиться, що $\angle BAC < \angle BCC'$.

в) Обґрунтування теорії вимірювання відрізків за допомогою аксіом четвертої групи. Поняття абсолютної геометрії.

Дотепер ми порівнювали відрізки або кути за допомогою неозначуваного поняття третьої групи «конгруентність». Для введення поняття довжини відрізка аксіом перших трьох груп недостатньо. Аксіоми Архімеда і Кантора системи Гільберта дозволяють обґрунтувати теорію вимірювання відрізків і кутів. В системі аксіом Погорєлова евклідового простору (**додаток В**) в четвертій групі є лише одна аксіома – Дедекінда. Виявляється, що аксіома Дедекінда еквівалентна сукупності аксіом Архімеда і Кантора. Доведення відповідних теорем можна знайти, наприклад, в книзі [8].

Задача вимірювання довжин відрізків полягає в тому, щоб задати відношення будь-якого відрізка до деякого фіксованого відрізка дійсним числом. Цей фіксований відрізок називають *лінійною одиницею* (або одиницею вимірювання довжин).

Означення. Нехай задана відповідність, при якій кожному відрізку зіставляється певне додатне число так, що:

1. конгруентним відрізкам відповідають рівні числа;
2. якщо B – внутрішня точка відрізка AC та відрізку AB відповідає число a, а відрізку BC відповідає число b, то відрізку AC буде відповідати число $a+b$;
3. існує відрізок, якому відповідає число 1.

Тоді число, що відповідає відрізку, називається його *довжиною*.

Таке означення вимагає доведення його коректності. В аксіоматичній теорії за Гільбертом, викладеній в книзі [8] це зроблено наступним чином. Спочатку із припущення існування такої відповідності доводиться, що вона єдина, тобто доводиться

Теорема. Якщо вказана в означенні відповідність існує та задовольняє умовам 1, 2, 3, то вона єдина.

Далі доводиться

Теорема. Вказана у визначенні відповідність існує та задовольняє умовам 1, 2 та 3.

Важливим моментом в доведенні останньої теореми є використання аксіоми Архімеда. Фактично доведення є певною мірою конструктивним, оскільки містить описання процесу, який дозволяє для обраного відрізка знаходити відповідне йому додатне дійсне число.

Але відомий в евклідовій геометрії факт, що довжини всіх відрізків вичерпують всі додатні дійсні числа, не випливає з аксіом перших трьох груп і аксіоми Архімеда. Тому далі доводиться

Теорема. Для будь-якого дійсного числа $a > 0$ існує відрізок, довжина якого дорівнює a.

При доведенні цієї теореми використовується друга з аксіом неперервності – аксіома Кантора.

Аналогічні міркування потрібні для введення поняття величини кута. Якщо одиницю вимірювання кутів вибрати так, щоб прямому куту відповідало число $d > 0$, то між множиною всіх кутів і множиною всіх дійсних чисел з інтервалу $(0,2d)$ встановлюється взаємно однозначна відповідність. Прийнято одиницю вимірювання кутів вибирати так, щоб прямому куту відповідало дійсне число $\frac{\pi}{2}$.

Після обґрунтування процесу вимірювання відрізків і кутів з'являється можливість користуватись в геометрії алгеброю. Зокрема, можна ввести систему координат на прямій, на площині, в просторі. А введення координат на прямій, в свою чергу, дозволяє сформулювати наступну важливу теорему.

Теорема. Між впорядкованою множиною всіх точок прямої і впорядкованою множиною всіх дійсних чисел існує така взаємно однозначна відповідність, при якій відповідні елементи знаходяться у відповідних відношеннях порядку.

Зауваження. Вказана властивість прямої називається *неперервністю.* Також ця теорема показує ізоморфізм двох моделей однієї математичної структури, яку називають *лінійним порядком.*

Абсолютною геометрією називається аксіоматична теорія, побудована на перших чотирьох групах аксіом Гільберта.

Прикладами теорем абсолютної геометрії є всі теореми з номерами 1– 46 аксіоматичної теорії, викладеної в книзі [8] (див. також **Додаток Г**). Наведемо ще список важливих теорем абсолютної геометрії, які були доведені в роботах Саккері, Лежандра, Ламберта в ході їх досліджень, пов'язаних з проблемою п'ятого постулату.

Теорема. Сума всіх внутрішніх кутів довільного трикутника не перевищує 180^0.

Теорема. Якщо сума кутів хоча б одного трикутника дорівнює двом прямим кутам, то сума кутів будь-якого трикутника дорівнює двом прямим кутам.

Теорема. Якщо в даному трикутника сума всіх внутрішніх кутів дорівнює 180^0 і цей трикутник ділиться трансверсаллю на два трикутники, то сума внутрішніх кутів кожного з цих трикутників теж дорівнює 180^0.

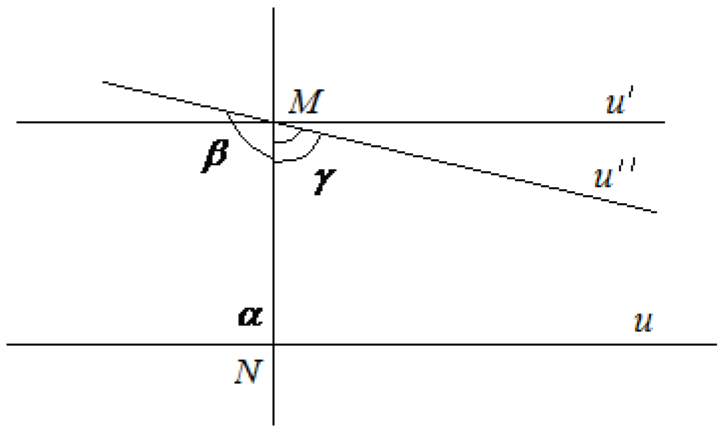
Теорема. Якщо існує трикутник, в якому сума всіх внутрішніх кутів не перевищує 180^0, то і в будь-якому трикутнику сума внутрішніх кутів не перевищує 180^0.

г) Сутність проблеми 5 постулату Евкліда. Еквівалентність аксіоми паралельності та п'ятого постулату Евкліда. Інші еквіваленти п'ятого постулату.

5 п. Якщо при перетині двох прямих третьою сума двох внутрішніх односторонніх кутів менша за 180^0, то ці прямі перетинаються з тієї сторони, з якої ця сума менша за 180^0.

5 п. $\Rightarrow$**V.** Якщо має місце 5 постулат Евкліда, то через кожну точку, яка не належить довільно заданій прямій, проходить не більше однієї прямої, що не перетинає дану пряму.

Доведення. Нехай u - дана пряма, $M \notin u$ і $MN \perp u$, $N \in u$



1).За теоремою 44 існує пряма u', $M \in u'$, яка паралельна прямій u.

2) Доведемо, що будь-яка інша пряма $u'', M \in u'', u' \neq u''$ не може бути паралельною прямій u.

3) Нехай півпрямі прямої u'' утворюють з перпендикуляром MN суміжні кути β та γ. Оскільки $u' \neq u''$, то має місце одна з нерівностей $\beta < \gamma$ або $\beta > \gamma$. Пари кутів $\alpha = 90^0$ і β, $180^0 - \alpha$ і γ є внутрішніми односторонніми при перетині прямих u та u'' прямою MN. Ми довели, що одна із сум $90^0 + \beta$ і $90^0 + \gamma$ менша за 180^0.

4) За умовою має місце 5 постулат Евкліда. Отже, прямі u та u'' перетинаються в тій півплощині відносно прямої MN, яка містить внутрішні односторонні кути з меншою за 180^0 сумою.

Ми довели, що пряма u' єдина, тобто має місце аксіома паралельності V.

V $\Rightarrow$ **5 п.** Якщо через кожну точку, що не належить довільно заданій прямій, проходить рівно одна пряма, паралельна даній, то має місце 5 постулат Евкліда.

Доведення. Нехай u - дана пряма, $M \notin u$.

1) За умовою через точку M проходить лише одна пряма, паралельна u, позначимо її u'. Отже, будь-яка пряма v, $M \in v$ перетинає пряму u.

2) Нехай півпрямі прямої v утворюють з довільною півпрямою MN, $N \in u$ кути β та γ, причому нехай для визначеності $\beta < \gamma$. Тоді одна з півпрямих прямої u' є внутрішньою півпрямою кута γ.

3) Позначимо символом γ' кут між цією півпрямою та півпрямою MN, а рівний йому навхрест лежачий кут при перетині прямих u та u' прямою MN – символом α. Тоді $\alpha + \beta = \gamma' + \beta < \gamma + \beta = 180^0$.

4) Нехай пряма v перетинає пряму u в півплощині, яка містить кут γ і O – точка перетину. Тоді для трикутника MNO кут γ є внутрішнім, а кут α – несуміжним із ним зовнішнім кутом. Оскільки $\alpha = \gamma' < \gamma$, то маємо протиріччя із теоремою про зовнішній кут трикутника.

Отже, пряма v перетинає пряму u в півплощині, яка містить кути β та α, що і доводить справедливість 5 постулату Евкліда.

Наведемо список еквівалентів 5 постулату Евкліда в тій послідовності, в якій їх зручно доводити, посилаючись на попередні.

П.1. Перпендикуляр і похила, проведені до однієї прямої в одній площині, обов'язково перетинаються (твердження Лежандра).

П.2. Два серединних перпендикуляри до сторін трикутника завжди перетинаються.

П.3. Навколо кожного трикутника можна описати коло (твердження Ф. Бойяї).

П.4. Сума внутрішніх кутів будь-якого трикутника дорівнює 180^0.

П.5. Сума внутрішніх кутів будь-якого трикутника одна і та сама.

П.6. Існують два подібних і не конгруентних трикутники.

П.7. Існують принаймні один прямокутник і один квадрат.

П.8. Існує принаймні один опуклий чотирикутник із рівною 180^0 сумою внутрішніх кутів.

П.9. Сторона правильного вписаного в коло шестикутника дорівнює радіусу цього кола.

П.10. Три різні точки, рівновіддалені від даної прямої і розташовані в одній півплощині відносно цієї прямої, належать одній прямій (колінеарні).

3. Доведення несуперечливості системи аксіом Гільберта. Арифметична модель.

Побудуємо арифметичну модель системи аксіом Гільберта та перевіримо аксіоми планіметрії. Дамо такі означення неозначуваним поняттям:

«Точкою» назвемо впорядковану пару дійсних чисел: $A(x, y)$.

«Прямою» назвемо набір впорядкованих пропорційних трійок дійсних чисел: $a(u:v:w)$, в якому $u^2 + v^2 \neq 0$.

Будемо говорити, що «точка $A(x, y)$ належить прямій $a(u:v:w)$», якщо виконується умова $ux + vy + w = 0$.

Якщо три попарно різні точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ належать одній прямій $a(u:v:w)$, для якої $v \neq 0$, і виконується умова $x_1 < x_2 < x_3$ (або умова $x_1 > x_2 > x_3$), то будемо називати точку B такою, що «лежить між» точками A та C.

Два відрізка називаються «конгруентними», якщо існує ортогональне перетворення, яке відображає один відрізок на інший.

Два кути називаються «конгруентними», якщо існує ортогональне перетворення, яке відображає один кут на інший.

Перевірку аксіом системи Гільберта детально викладено в книзі [8].

Тема 5. Геометрія Лобачевського

Мета: Ознайомитися з основними фактами геометрії Лобачевського, значенням відкриття Лобачевського. Навчитися доводити прості теореми геометрії Лобачевського.

План:

1. Відкриття Лобачевського. Неевклідова геометрія.

2. Аксіоматична теорія геометрії Лобачевського.

а) Аксіома Лобачевського. Означення і властивості паралельних і розбіжних прямих в геометрії Лобачевського.

б) Основні факти геометрії Лобачевського.

3. Дослідження системи аксіом планіметрії Лобачевського. Інтерпретації Пуанкаре.

4. Значення геометрії Лобачевського.

Ключові поняття: аксіома Лобачевського, паралельні прямі, розбіжні прямі, функція Лобачевського, орицикл, еквідістанта.

1. Відкриття Лобачевського. Неевклідова геометрія.

У лютому 1826 професор Казанського університету М. І. Лобачевський виступив перед вченою радою фізико-математичного факультету з доповіддю, в якій виклав основи нової геометрії. Головна ідея полягала в тому, що аксіома Евкліда про паралельні незалежна від інших аксіом геометрії Евкліда і, отже, можна побудувати іншу геометрію, настільки ж несуперечливу, як і евклідова, якщо в системі аксіом евклідової геометрії замінити аксіому про паралельні на протилежне твердження. У наступні роки Лобачевський всебічно розвинув теорію нової геометрії і вказав ряд її додатків в області математичного аналізу. Одночасно з Лобачевским ті ж ідеї були розвинені молодим угорським математиком Яношем Больяї. Значення неевклідових геометрій полягає насамперед у тому, що їх побудова і доведення несуперечливості являє собою остаточне вирішення проблеми п'ятого постулату, що була нерозв'язаною протягом двох тисячоліть. Надалі ці геометрії знайшли найрізноманітніші застосування в задачах самої математики і в теоретичній фізиці. Вони стали великою подією в розвитку математики XIX ст., фактом, який суперечив всім сформованим на той час уявленням про природу математичного знання. Відкриття Лобачевского і Больяї привело математиків до корінного перегляду уявлень про власну науку, про її функції в системі знання, про методи побудови і обґрунтування математичних теорій.

Великий внесок у правильне розуміння неевклідових геометрій вніс видатний французький математик А. Пуанкаре. Він був одним з перших математиків, які побачили неспроможність чисто емпіричного розуміння геометрії. А. Пуанкаре винайшов модель геометрії Лобачевського на множині об'єктів евклідової геометрії, що доводило її несуперечливість. Вперше ж аксіоматику площини Лобачевського вдалося реалізувати італійському геометру Бельтрамі на спеціальній поверхні – псевдосфері – як внутрішню геометрію цієї поверхні.

2. Аксіоматична теорія геометрії Лобачевського.

а) Аксіома Лобачевського. Означення і властивості паралельних і розбіжних прямих в геометрії Лобачевського.

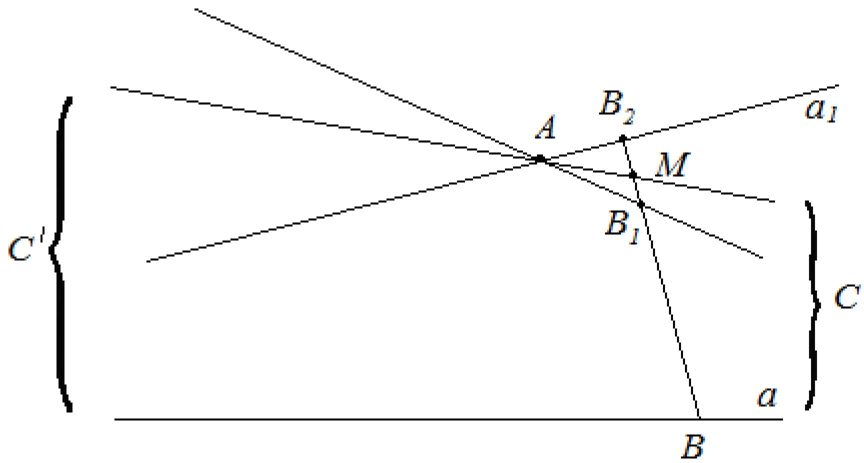
Аксіоматика геометрії Лобачевського складається з аксіом абсолютної геометрії та аксіоми Лобачевського

Аксіома Лобачевського. Існують принаймні одна пряма a і одна точка C поза нею такі, що в площині, яку вони визначають, через точку C проходить принаймні дві прямі, що не перетинають пряму a.

Аксіоматичні теорії евклідової геометрії та геометрії Лобачевського мають спільну частину – абсолютну геометрію.

Теорема. Через будь-яку точку, яка не належить довільній даній прямій, проходить принаймні дві прямі, що не перетинають дану пряму.

Теорема. Через точку, яка не належить даній прямій можна провести безліч прямих, що не перетинають дану пряму.

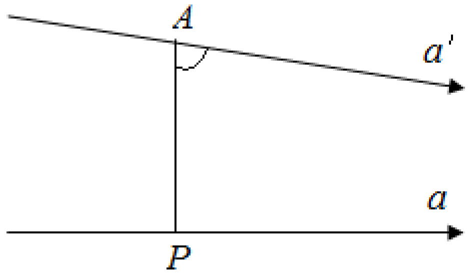


Далі будемо вважати всі прямі напрямленими. Тобто якщо використано символ AB для прямої, то це означає, що на ній точка A передує точці B. При цьому будемо вважати, що всі необхідні нам точки прямої AB лежать між точками A та B. Прямі AB та BA різні, або, інакше, два різні напрями на прямій, що проходить через точки A та B, визначаються різними порядками AB та BA цих точок.

Означення. Пряма AB називається паралельною прямій CD, якщо:

1) ці прямі не перетинаються;

2) для будь-яких точок $P \in AB$ і $Q \in CD$ кожен внутрішній промінь кута QBP перетинає промінь QD. Позначають $AB \parallel CD$.



Теорема (ознака паралельності). Якщо прямі AB та CD не мають спільних точок і існують такі точки $P \in AB$ і $Q \in CD$, що кожен внутрішній промінь кута QBP перетинає промінь QD, то $AB \parallel CD$.

Теорема (існування паралельних прямих). Нехай дано пряму AB і точку M, яка не лежить на ній. Тоді в площині, яку вони визначають, існує і лише одна пряма CD, яка проходить через точку M і паралельна прямій AB.

Наслідок. Нехай $AB \parallel CD$, $P \in AB$, $Q \in CD$ і $PQ \perp CD$. Нехай також пари точок A, A' та B, B' симетричні в осьовій симетрії відносно прямої PQ. Тоді пряма $A'B'$, яка буде симетричною прямій AB, паралельна прямій DC.

Остання теорема і наслідок з неї дають можливість сформулювати наступну теорему.

Теорема. Через точку, яка не належить заданій прямій, в даному на цій прямій напрямку можна провести тільки одну пряму, паралельну заданій. Через точку, яка не належить заданій прямій, можна провести дві прямі, паралельні заданій, але в різних напрямках.

Властивості відношення паралельності прямих:

1) (симетричність) якщо $AB \parallel CD$, то і $CD \parallel AB$.

2) (транзитивність) якщо $AB \parallel UV$ і $CD \parallel UV$, то $AB \parallel CD$.

Означення. Нехай $AB \parallel CD$, $P \in AB$, $Q \in CD$ і $PQ \perp CD$. Кут $QPB = \alpha$ називається *кутом паралельності*, що відповідає відрізку PQ, який називають *відрізком паралельності* (або *стрілкою*).

Теорема. Будь-який гострий кут може бути кутом паралельності. Або, інакше, яким би не був гострий кут, існує єдина пряма, яка перпендикулярна одній стороні кута і паралельна другій.

Лобачевський довів, що між множиною всіх гострих кутів α і множиною додатних дійсних чисел x існує бієктивна відповідність і знайшов її явний вигляд, який називають тепер функцією Лобачевського (або основною формулою Лобачевського) і позначають $\Pi(x) = \alpha(x)$. Вона має вигляд

$$\Pi(x) = 2arctg\, e^{-\frac{x}{k}} \text{ або } tg\frac{\Pi(x)}{2} = e^{-\frac{x}{k}},$$

де $k = const$ називається константою Лобачевського або радіусом кривини. З рівностей $\lim\limits_{x\to\infty}\Pi(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\Pi(x)=\frac{\pi}{2}$ випливає, що зі збільшенням відрізка паралельності відмінність геометрії Лобачевського від геометрії Евкліда стає все більшою, і, навпаки, в достатньо малому околі площини Лобачевського виконується геометрія Евкліда (або, геометрія Евкліда є граничним випадком геометрії Лобачевського).

Теорема. Нехай $AB \parallel CD$ і $P \in AB$. Якщо точка P рухається по прямій в сторону паралельності, то її відстань до прямої CD прямує до нуля. Якщо ж точка P рухається по прямій AB в протилежному напрямку, то її відстань до прямої CD необмежено збільшується.

Доведення складається з двох частин. Спочатку доводиться, що при умові $\overset{*}{PP'B}$, де P' - нове положення точки P виконується $d(P',CD) < d(P,CD)$, а потім – що $d(P,CD)$ може стати менша за будь-яке як завгодно мале додатне дійсне число ε.

Наслідок. Будь-яка пара паралельних прямих може за допомогою руху накладена на іншу пару паралельних прямих.

Означення. Дві різні прямі називаються розбіжними, якщо вони не перетинаються і не паралельні.

Теорема. Розбіжні прямі існують.

Наприклад, розбіжними є два перпендикуляри до однієї прямої.

Теорема (ознаки розбіжності прямих). Дві різні прямі є розбіжними тоді і тільки тоді, коли при перетині цих прямих третьою утворюються або рівні відповідні кути, або рівні навхрест лежачі кути, або внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює 180^0.

б) Основні факти геометрії Лобачевського.

Оскільки аксіома Лобачевського є запереченням аксіоми паралельності Евкліда, то побудувавши заперечення еквівалентів 5 постулату Евкліда, ми отримаємо твердження, справедливі в геометрії Лобачевського. Наведемо кілька таких тверджень.

Теорема. Перпендикуляр і похила, проведені до однієї прямої в одній площині, не завжди перетинаються.

Доведення. Припустимо супротивне, тобто нехай в площині Лобачевського виконується твердження Лежандра. Але його наслідком є аксіома паралельності Евкліда, що неможливо в аксіоматичній теорії Лобачевського.

Теорема. Існують трикутники, навколо яких не можна описати коло.

Доведення. Аналогічно методом від супротивного, використовуючи еквівалентність твердження Ф. Бойяї та аксіоми паралельності Евкліда.

На практичному занятті буде побудовано трикутник, що задовольняє теоремі, тобто трикутник, навколо якого не можна описати коло.

Теорема. Сума внутрішніх кутів будь-якого трикутника менша за 180^0.

Доведення. За теоремою абсолютної геометрії в кожному трикутнику сума внутрішніх кутів будь-якого трикутника не більша (менша або дорівнює) 180^0. Якщо припустити, що існує хоча б один трикутник, в якому сума внутрішніх кутів дорівнює 180^0, то як наслідок отримаємо, що сума внутрішніх кутів будь-якого трикутника дорівнює 180^0. Це твердження є еквівалентним аксіомі паралельності Евкліда, що і говорить про те, що наше припущення невірне. Отже, сума внутрішніх кутів будь-якого трикутника менша за 180^0.

Наслідок. Сума внутрішніх кутів опуклого чотирикутника менша за 360^0.

Теорема. Сума внутрішніх кутів трикутника є непостійною величиною.

Доведення. Методом від супротивного проведенням трансверсалі.

ΔABC, $\alpha + \beta + \gamma = x = const$, CD - транверсаль. $\beta = \beta_1 + \beta_2$, $180^0 = \delta_1 + \delta_2$ як суміжні. Тоді з припущення $\alpha + \beta_1 + \delta_1 = x$, $\gamma + \beta_2 + \delta_2 = x$. Тоді $x = \delta_1 + \delta_2 = 180^0$, а з іншого боку $x < 180^0$ за попередньою теоремою.

Означення. Еквідистантою називається множина точок, рівновіддалених від даної прямої.

Теорема. Еквідистанта є кривою.

Доведення. Розглянемо на еквідистанті 3 різні точки A, B, C і припустимо, що вони колінеарні. Опустимо з них перпендикуляри на дану пряму і позначимо основи перпендикулярів через A_1, B_1, C_1 відповідно. Отримані чотирикутники A_1B_1BA, B_1C_1CB і A_1C_1CA є чотирикутниками Саккері. Кути при верхній основі чотирикутника Саккері повинні бути рівними. Отже, $\alpha = \beta$ і $\alpha + \beta = 180^0$ як суміжні. Ці рівності дають $\alpha = \beta = 90^0$, звідки сума внутрішніх кутів опуклого чотирикутника дорівнює 360^0, що неможливо в геометрії Лобачевського.

Теорема. Дві розбіжні прямі мають єдиний спільний перпендикуляр, по обидві сторони від якого вони необмежено віддаляються одна від одної.

Теорема (четверта ознака рівності трикутників). Якщо три кути одного трикутника рівні відповідним кутім іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

Наслідок. Не існують не конгруентні подібні трикутники. На площині Лобачевського немає відношення подібності фігур.

Теорема. Кут при верхній основі чотирикутника Саккері гострий.

Теорема. Середня лінія трикутника має довжину, меншу за половину довжини основи.

Теорема. Сторона правильного шестикутника більша за радіус описаного кола.

3. Дослідження системи аксіом планіметрії Лобачевського. Інтерпретації Пуанкаре.

Побудуємо модель неевклідової планіметрії на множині об’єктів евклідової площини, що була запропонована А.Пуанкаре. Розглянемо на евклідовій площині деяку пряму x (наприклад, горизонтальну). Ця пряма визначає дві півплощини. Одну з них назвемо «верхньою». Будемо називати *неевклідовими точками* точки верхньої півплощини (без точок прямої x), *неевклідовими прямими* – евклідові півкола, що знаходяться в верхній півплощині та ортогональні до прямої x (тобто мають центри на прямій x), а також евклідові півпрямі, що спираються на пряму x та утворюють з нею прямий кут. Ці півпрямі будемо називати півколами нескінченно великого радіусу

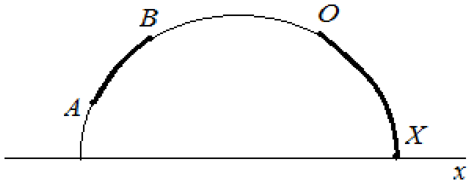
Далі визначимо поняття: «точка належить прямій» або «пряма проходить через точку». Нехай A – неевклідова точка, a – неевклідова пряма, яка є деяким півколом (яке теж будемо позначати буквою a). Будемо говорити, що точка A знаходиться на (неевклідовій) прямій a, якщо ця точка розташована на евклідовому півколі a в сенсі тих відношень, які мають місце в евклідовій геометрії. Те, що для неевклідових точок та прямих справедливі аксіоми 1.1–1.3, легко перевіряється засобами евклідової геометрії.

Насправді, аксіома 1.1 виконується, оскільки через дві точки A і B верхньої півплощини завжди можна провести півколо, ортогональне до прямої x.

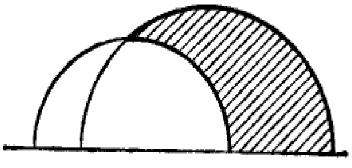
Аксіома 1.2 виконується, оскільки два півкола, що зображають неевклідові прямі, можуть мати не більше однієї спільної точки.

Аксіома 1.3. виконується, оскільки на півколі існує нескінченно багато точок і в верхній півплощині існує нескінченно багато точок, що не належать вибраному півколу.

Далі визначимо поняття «лежати між» по відношенню до неевклідових точок на неевклідових прямих. Нехай A, B, C – три точки неевклідової прямої, яка зображується півколом a. Будемо говорити, що точка B (в неевклідовому сенсі) лежить між точками A і C, якщо на півколі a вона розташована між точками A і C в тому сенсі, як це розуміється в евклідовій геометрії . Інакше кажучи, порядок точок на неевклідовій прямій співпадає з порядком точок на евклідовому півколі, що зображає цю пряму в верхній півплощині.



Тому неевклідів відрізок AB зображується дугою півкола з кінцями A, B; неевклідова півпряма, що виходить з точки O, зображується дугою OX, кінець X якої знаходиться на прямій x. Точка X при цьому не повинна зараховуватись до точок неевклідової півпрямої.



Неевклідовим кутом будемо називати сукупність двох неевклідових півпрямих, що виходять з однієї неевклідової точки.

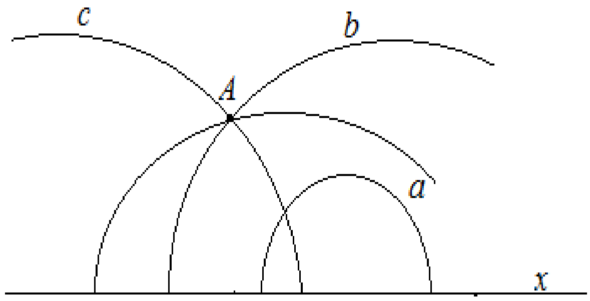
В цій моделі роль рухів відіграють інверсії з центрами на прямій x. Тому для неозначуваного поняття «конгруентність» дамо такі означення.

Назвемо неевклідів відрізок AB *конгруентним* неевклідову відрізку $A'B'$, якщо існує така послідовність інверсій, що їх добуток відображає евклідову кругову дугу AB в кругову дугу $A'B'$.

Аналогічно, назвемо неевклідів $\angle(h,k)$ *конгруентним* неевклідовому куту $\angle(h',k')$, якщо існує така послідовність інверсій, що їх добуток відображає сторони першого кута на сторони другого кута.

Можна перевірити, що аксіоми другої, третьої та четвертої груп теж виконуються.

Перевіримо, чи виконується на цій моделі аксіома Лобачевського.



Візьмемо будь-яке півколо a верхньої півплощини, ортогональне до прямої x (неевклідову пряму). Нехай A – деяка точка верхньої півплощини, яка не належить цьому півколу. Легко перевірити що через точку A проходить нескінченно багато різних півкіл, ортогональних до прямої x, які не мають спільних точок з півколом a. Іншими словами можна сказати: через довільну неевклідову точку, що лежить поза даною неевклідовою прямою, проходить нескінченно багато різних неевклідових прямих, які не перетинають дану пряму. Отже, в системі об'єктів, що розглядаються, має місце постулат Лобачевського. Таким чином, ця система представляє собою модель геометрії Лобачевського.

Тема 6. Інші неевклідові геометрії.

Мета: Ознайомитись з елементами сферичної геометрії, еліптичної геометрії Рімана, псевдоевклідової геометрії.

План:

1. Елементи сферичної геометрії. Точки і прямі в сферичній геометрії. Відстань між точками і кут між прямими.
2. Сферичні двокутники та трикутники. Сферичний надлишок. Сферична тригонометрія.
3. Аксіоматична теорія псевдоевклідової геометрії. Класифікація прямих і площин псевдоевклідового простору. Основні координатні формули.
4. Сфери псевдоевклідового простору. Сферична тригонометрія.
5. Інтерпретація планіметрії Лобачевського на сфері уявного радіусу псевдоевклідового простору. Евклідова геометрія як граничний випадок геометрії Лобачевського.

Ключові поняття: точка, пряма, сферичний двокутник, сферичний трикутник, теореми косинусів, ізотропні об'єкти, сфера уявного радіуса.

1. Елементи сферичної геометрії. Точки і прямі в сферичній геометрії. Відстань між точками і кут між прямими.

Нехай в евклідовому просторі задано сферу радіусу r. В геометрії на сфері, як і в геометрії на евклідовій площині, основними об'єктами є точки і прямі. «Точкою» називається будь-яка точка сфери, «прямою» – будь-яке велике коло сфери.

Означення. Нехай a – деяка пряма в сферичній геометрії. Кінці A_1, A_2 діаметра сфери, перпендикулярного евклідовій площині, яка містить a, називаються полюсами цієї прямої. Кожна точка прямої a називається полярно спряженою з кожним із її полюсів.

Через будь-які дві не діаметрально протилежні точки проходить єдина пряма сферичної геометрії.

Означення. Відстанню між точками називається довжина меншої з двох дуг великого кола, що проходить через ці точки.

З означення випливає обмеженість сферичної площини – відстань між будь-якими двома точками не перевищує числа π.

Крім основних об'єктів в сферичній геометрії можна розглядати і інші фігури. Наприклад, Коло на сфері, яке не є великим, задовольняє означення кола з евклідової геометрії.

Означення. Кутом α між двома прямими в сферичній геометрії називається двогранний кут, який утворюють евклідові площини, що містять ці прямі.

Засобами евклідової геометрії отримується формула

$$\alpha = \frac{\widetilde{MN}}{r},$$

де точки $M \in a, N \in b$ – полярно спряжені з точкою перетину прямих.

2. Сферичні двокутники та трикутники. Сферичний надлишок. Сферична тригонометрія.

Будь-які дві прямі сферичної геометрії розбивають сферу на чотири області, кожна з яких називається сферичним двокутником. Двокутник є аналогом многокутника, а саме, це многокутник, який має дві сторони. Таких фігур на евклідовій площині не існує. Двокутник повністю визначається кутом між прямими (відрізки яких є його сторонами).

Має місце наступна формула для площі двокутника

$$S_{A_1 A_2} = 2r^2 A_1^2,$$

де A_1, A_2 – вершини двокутника.

Три попарно різні великі кола сфери розбивають її на 8 областей, кожна з яких називається сферичним трикутникам. Будемо розглядати лише ті з них, які мають менші за $\frac{\pi}{2}$ довжини сторін і менші за π величини кутів (ейлерові трикутники).

Нехай ΔABC – ейлерів. Якщо O – центр сфери, то геометрію тригранного кута $OABC$ доцільно використати для вивчення геометрії сферичного трикутника. Наведемо деякі формули цієї геометрії.

Позначимо $\widetilde{B}C = a, \widetilde{C}A = b, \widetilde{A}B = c$. Пари точок A, A_1, B, B_1, C, C_1 - діаметрально протилежні. Між площами сфери, сферичного трикутника і сферичних двокутників можна встановити такий зв'язок:

$$S_{сф} = 2\left(S_{AA_1} + S_{BB_1} + S_{CC_1}\right) - 4S_{\Delta ABC},$$

тоді формула площі сферичного трикутника має вигляд

$$S_{\Delta ABC} = r^2\left(A + B + C - \pi\right),$$

звідки випливає, що в сферичній геометрії сума кутів трикутника більша за π.

Далі, для зручності, позначимо $\overline{OA} = \overline{A}, \overline{OB} = \overline{B}, \overline{OC} = \overline{C}$. Для сторін ΔABC маємо

$$\cos\frac{a}{r} = \frac{1}{r^2}\left(\overline{B}, \overline{C}\right),\ \cos\frac{b}{r} = \frac{1}{r^2}\left(\overline{A}, \overline{C}\right), \cos\frac{c}{r} = \frac{1}{r^2}\left(\overline{B}, \overline{A}\right),$$

а для кутів –

$$\cos A = \frac{\left(\left[\overline{A}, \overline{B}\right], \left[\overline{A}, \overline{C}\right]\right)}{\left\|\left[\overline{A}, \overline{B}\right]\right\| \cdot \left\|\left[\overline{A}, \overline{C}\right]\right\|},\ \cos B = \frac{\left(\left[\overline{B}, \overline{C}\right], \left[\overline{B}, \overline{A}\right]\right)}{\left\|\left[\overline{B}, \overline{C}\right]\right\| \cdot \left\|\left[\overline{B}, \overline{A}\right]\right\|},\ \cos C = \frac{\left(\left[\overline{C}, \overline{B}\right], \left[\overline{C}, \overline{A}\right]\right)}{\left\|\left[\overline{C}, \overline{B}\right]\right\| \cdot \left\|\left[\overline{C}, \overline{A}\right]\right\|}.$$

Для елементів сферичного трикутника виконується перша теорема косинусів

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r} \cdot \cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos A,$$

друга теорема косинусів

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \sin C \cos\frac{a}{r},$$

теорема синусів

$$\frac{\sin A}{\sin\frac{a}{r}} = \frac{\sin B}{\sin\frac{b}{r}} = \frac{\sin C}{\sin\frac{c}{r}}.$$

Для прямокутного сферичного трикутника формула з першої теореми косинусів отримаємо аналог теореми Піфагора у вигляді

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r} \cdot \cos\frac{c}{r}$$

3. Аксіоматична теорія псевдоевклідової геометрії. Класифікація прямих і площин псевдоевклідового простору. Основні координатні формули.

Псевдоевклідів тривимірний простір індексу 1, який будемо позначати символом ${}^1R_3$, можна визначити як множину елементів двох родів, які називаються точками і векторами, з уведеними операціями додавання векторів, множення вектора на дійсне число, відкладання вектора від точки і скалярного добутку векторів, що задовольняють аксіомам I-IV груп, V_1, V_2, V_3 аксіоматика Вейля (Додаток А) і аксіомі V_4^*.

Аксіома. V_4^*. Існують три попарно ортогональних вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ такі, що $\bar{a}_1^{\,2} < 0, \bar{a}_2^{\,2} > 0, \bar{a}_3^{\,2} > 0$.

Домовимось, як і в евклідовому просторі, називати два вектора ортогональними, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Означення. Вектори простору ${}^1R_3$, скалярні квадрати яких додатні, називаються *евклідовими* векторами. Вектори з від'ємними скалярними квадратами називаються *псевдоевклідовими* векторами. Ненульові вектори, скалярні квадрати яких дорівнюють 0, називаються *ізотропними* векторами. Згідно з визначенням ізотропних векторів два колінеарних ізотропних вектора ортогональні.

Довжину вектора будемо визначати, як і в евклідовому просторі, формулою $|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x}^2}$. Так як в просторі ${}^1R_3$ скалярні квадрати векторів можуть бути додатними, від'ємними та рівними нулю, то з формули довжини вектора випливає, що ненульові вектори в цьому просторі можуть мати дійсну довжину (якщо $\bar{x}^2 > 0$), уявну довжину (якщо $\bar{x}^2 < 0$) та нульову довжину (якщо $\bar{x}^2 = 0$).

У псевдоевклідовому просторі при нормуванні евклідового вектора будемо використовувати формулу $\bar{x}_0 = \dfrac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2}}$, а при нормуванні псевдоевклідового вектора – формулу $\bar{x}_0 = \dfrac{\bar{x}}{\sqrt{-\bar{x}^2}}$.

Нормовані евклідові вектори прийнято називати одиничними, а нормовані псевдоевклідові вектори – уявно одиничними. Всі ізотропні вектори будемо вважати нормованими.

Із аксіоми V_4^* випливає, що в просторі ${}^1R_3$ завжди існує ортонормований базис, який складається з одного уявно одиничного і двох одиничних векторів. Умовимося уявно одиничний вектор вибирати першим вектором базису. Неважко показати, що всі ортогональні базиси простору складаються з одного псевдоевклідового і двох евклідових векторів, тобто має місце закон інерції ортогональних базисів.

Координати векторів в ортонормованому базисі будемо так само, як і в евклідовому просторі, називати декартовими. Скалярний добуток векторів $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)$ і $\bar{y}=(y_1,y_2,y_3)$, заданих декартовими координатами, має вигляд: $(\bar{x},\bar{y})=-x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$, а скалярний квадрат вектора $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)$:

$$\bar{x}^2=-x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2.$$

Перейдемо до питання про класифікацію площин простору ${}^1R_3$. Її зручно проводити з використанням поняття ізотропного конуса. Відкладемо всі вектори простору ${}^1R_3$ від початку координат. Тоді кінці ізотропних векторів будуть лежати на поверхні

$$-x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2=0,$$

яку називають *ізотропним конусом*. Кінці евклідових радіус-векторів лежать у зовнішній області ізотропного конуса, а кінці псевдоевклідових радіус-векторів – в його внутрішній області.

Прямі псевдоевклідового простору ${}^1R_3$ діляться на три типи:

– евклідові, якщо довжина направляючого вектора дійсна;

– псевдоевклідові, якщо довжина напрямного вектора уявна;

– ізотропні, якщо довжина напрямного вектора дорівнює 0.

Для класифікації двовимірних площин дослідимо властивості ортогональних векторів. У просторі ${}^1R_3$ ортогональними можуть бути пара евклідових векторів, евклідів і псевдоевклідів вектори, евклідів і ізотропний вектори. Неважко навести приклади таких пар.

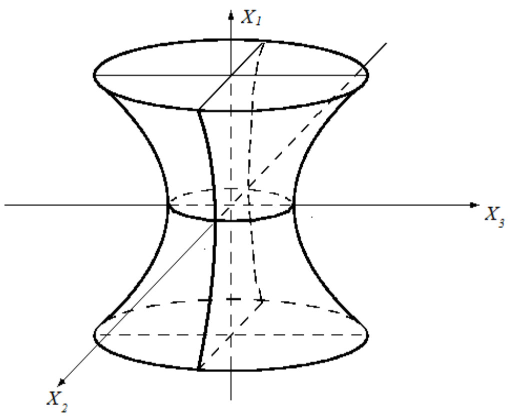
Розглянемо в просторі ${}^1R_3$ двовимірні площини (далі площині), в яких всі вектори евклідові і площини, в яких є вектори всіх трьох типів. Називатимемо їх відповідно *евклідовими* і *псевдоевклідовими* площинами. Евклідові та псевдоевклідові площині називаються неізотропними. У просторі ${}^1R_3$ можливі також площини, в яких є тільки евклідові та ізотропні вектори. Вони називаються ізотропними площинами. Розглянемо два неколінеарних вектори $\bar{a}_1,\bar{a}_2$ в просторі ${}^1R_3$. Вони утворюють направляючий підпростір деякої двовимірної площини. Щоб визначити тип цієї площини, потрібно розглядати всілякі лінійні комбінації векторів. Але якщо на базі цих векторів побудувати ортогональну систему векторів, то в разі евклідової площини, ця система обов'язково складається з евклідових векторів, у разі псевдоевклідової площини – з псевдоевклідового і евклідового векторів, у випадку ізотропної площини – з ізотропного і евклідового векторів. Тобто тип площини легко розпізнавати по набору з двох ортогональних направляючих векторів.

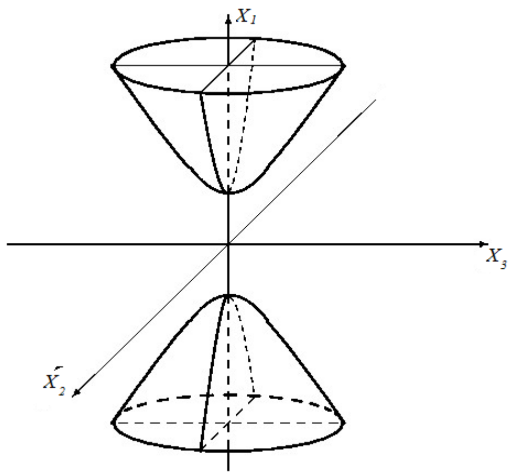
Зауважимо, що площина, яка містить вершину ізотропного конуса і не має з ізотропним конусом інших спільних точок, є евклідовою. Якщо ж вона перетинає ізотропний конус по двом твірним, то така площина псевдоевклідова. Площина, яка дотикається ізотропного конуса по твірній, є ізотропною.

4. Сфери псевдоевклідового простору. Сферична тригонометрія.

Визначення сфери в псевдоевклідовому просторі залишимо таким самим, як і в евклідовому просторі, тобто як множину точок, що знаходяться на однаковій відстані від фіксованої точки. У зв'язку з тим, що відстань в просторі ${}^1R_3$ обчислюється за іншою формулою, то рівняння сфери псевдоевклидового простору з центром у початку координат і радіусом r буде мати вигляд $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$. Будемо розглядати сфери дійсного та уявного радіуса.

Сфера дійсного радіусу псевдоевклідового простору зображується в евклідовому просторі однопорожнинним гіперболоїдом





Сфера уявного радіуса псевдоевклідового простору зображується в евклідовому просторі двопорожнинним гіперболоїдом.

Формули сферичної геометрії в евклідовому і псевдоевклідовому просторах однакові, але зміст їх різний. Крім того, сфера уявного радіусу несе на собі геометрію Лобачевського.

5. Інтерпретація планіметрії Лобачевського на сфері уявного радіусу псевдоевклідового простору. Евклідова геометрія як граничний випадок геометрії Лобачевського

Встановимо наступний словник. Під «точкою» будемо розуміти дві діаметрально протилежні точки сфери. Або можна поступити інакше. Другу порожнину сфери уявного радіусу не розглядати та інтерпретувати геометрію Лобачевського на півсфері. «Пряма» – це лінія перетину півсфери з площиною, що проходить через початок координат. Оскільки вся півсфера лежить у внутрішній області ізотропного конуса, то для кожної точки півсфери її радіус-вектор є псевдоевклідовим, тобто $\bar{r}^2 < 0$.

Покажемо, що при цих домовленостях про зміст точок та прямих півсфера уявного радіусу псевдоевклідового простору несе на собі геометрію площини Лобачевського. Для того, щоб упевнитися в цьому, треба перевірити виконання всіх аксіом планіметрії Лобачевського. Обмежимось перевіркою аксіоми паралельності. Передусім треба встановити зміст термінів «прямі, що перетинаються», «прямі, що розходяться» та «паралельні прямі» для даної інтерпретації.

Оскільки прямі, які перетинаються, повинні мати спільну точку, то площини зв'язки з центром в точці О, які їх визначають, повинні перетинатися по прямій, яка проектує цю точку, але така пряма є псевдоевклідовою, тому що лежить всередині ізотропного конусу.

У відповідності з визначенням паралельних прямих по Лобачевському проектуючі їх площини зв'язки повинні перетинатися по ізотропній прямій, тобто по твірній ізотропного конуса.

Прямі, що розходяться, належать двома площинам, які перетинаються по евклідовій прямій.

Перевірка аксіоми паралельності Лобачевського дає позитивну відповідь, аксіома виконується на сфері уявного радіусу псевдоевклідового простору.

Розглянемо деякі формули геометрії Лобачевського. Оскільки вона реалізується на сфері, то можна використовувати формули сферичної геометрії. В сферичній геометрії відстань між двома точками A і B знаходиться за формулою

$$\cos\frac{\omega}{r}=\left|\frac{\overline{A}\cdot\overline{B}}{\sqrt{\overline{A}^2}\sqrt{\overline{B}^2}}\right|,$$

де $\overline{A}$ і $\overline{B}$ – радіус-вектори цих точок. Застосуємо її до сфери уявного радіусу $r=k\cdot i$, тоді $\sqrt{\overline{A}^2}=\sqrt{\overline{B}^2}=k\cdot i$, $\cos\frac{\omega}{r}=\mathrm{ch}\frac{\omega}{k}$ і формула має вигляд

$$\mathrm{ch}\frac{\omega}{k}=\frac{1}{k^2}\left|-x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\right|.$$

Оскільки площа трикутника на сфері обчислюється за формулою $S=r^2(A+B+C-\pi)$, то при $r=k\cdot i$ ця формула буде мати вигляд

$$S=-k^2(A+B+C-\pi).$$

Звідси отримуємо важливий і вже відомий нам висновок для суми внутрішніх кутів трикутника:

$$(A+B+C)<\pi.$$

Різницю $\pi-(A+B+C)$ називають дефектом трикутника та позначають δ. Тоді $S=k^2\delta$, тобто площа трикутника пропорційна його дефекту.

Нагадаємо, що перша теорема косинусів для сфери має вигляд $\cos\frac{a}{r}=\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}+\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos A$. Якщо $r=k\cdot i$, то $\sin\frac{a}{k\cdot i}=-i\cdot sh\frac{a}{k}$. Тоді теорема косинусів для сфери уявного радіусу має вигляд

$$ch\frac{a}{r}=ch\frac{b}{r}ch\frac{c}{r}-sh\frac{b}{r}sh\frac{c}{r}\cos A.$$

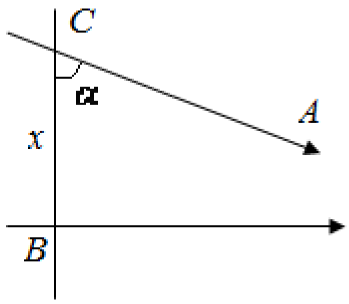
З другої теореми косинусів на сфері отримаємо другу терему косинусів на площині Лобачевського:

$$cosA = -\cos B \cos C + \sin B \sin C ch\frac{a}{k}$$

Теорема синусів на площині Лобачевського запишеться у вигляді

$$\frac{sh\frac{a}{k}}{\sin A} = \frac{sh\frac{b}{k}}{\sin B} = \frac{sh\frac{c}{k}}{\sin C}.$$

Виведемо основну формулу геометрії Лобачевського. Розглянемо трикутник.



Застосуємо до нього другу терему косинусів, враховуючи, що $C = \alpha$, $A = 0$, $B = \frac{\pi}{2}$, $a = x$. Отримаємо $1 = 1 \cdot \sin\alpha\, ch\frac{x}{k}$, звідки $\sin\alpha = \frac{1}{ch\frac{x}{k}}$ та $\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{ch^2\frac{x}{k}}} = \frac{\sqrt{ch^2\frac{x}{k} - 1}}{ch\frac{x}{k}}$. Після застосування формули $ch^2\frac{x}{k} - sh^2\frac{x}{k} = 1$ ця рівність набуде вигляду $\cos\alpha = \frac{sh\frac{x}{k}}{ch\frac{x}{k}} = th\frac{x}{k}$. Далі запишемо

$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1 - th\frac{x}{k}}{1 + th\frac{x}{k}}$. Відомі також формули $th\frac{x}{k} = \frac{sh\frac{x}{k}}{ch\frac{x}{k}} = \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}}$. Тоді

$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{e^{-\frac{x}{k}}}{e^{-\frac{x}{k}}} = e^{-2\frac{x}{k}}$, звідки $tg\frac{\alpha}{2} = e^{-\frac{x}{k}}$ – основна формула геометрії Лобачевського.

2 ЗМІСТ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Тема 1: Загальні питання аксіоматики. Вимоги до системи аксіом.

Мета: Навчитися перевіряти виконання вимог для систем аксіом математичних структур.

Методичні рекомендації. Важливо навчитися будувати моделі систем аксіом. Зверніть увагу на той факт, що коли модель будується на скінченій множині, то перевірка аксіом може бути виконана методом повної індукції. Перевіряючи систему аксіом на незалежність, доведеться окремо перевіряти кожну аксіому на незалежність. При доведенні повноти системи аксіом треба пам'ятати, що відношення ізоморфності є відношенням еквівалентності, тобто має властивості рефлективності, симетричності і транзитивності.

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Дано математичну структуру $M = \{T, G, \rho, A_1, A_2, A_3, A_4\}$, де T – множина точок, G – множина прямих, ρ – відношення приналежності таке, що виконуються аксіоми:

A_1: для будь-яких двох різних точок існує пряма, що містить кожну з них.

A_2 : для будь-яких двох різних точок існує не більше однієї прямої, що містить кожну з них.

A_3: на кожній прямій існує принаймні дві точки.

A_4: існує трійка точок, що не належать одній прямій.

Дослідити систему аксіом на несуперечність, на незалежність і повноту.

Розв'язання. Для перевірки системи аксіом на несуперечність побудуємо модель цієї системи. Визначимо основні поняття даної структури: "точка" – будь-яка з трьох точок A, B, C евклідової площини, "пряма" – будь-яка з невпорядкованих пар $\{A,B\},\{B,C\},\{A,C\}$, "належати" – як елемент множині $A \in \{A,B\}$, $A \notin \{B,C\}$. Перевіримо, чи виконуються аксіоми.

A_1 : Візьмемо, наприклад, точки A і B, для них існує пряма $\{A,B\}$, якій вони належать. Для інших двох пар точок висновок такий самий.

A_2: Для кожної з трьох можливих пар точок існує єдина пряма, якій вони належать.

A_3: На кожній з трьох означених прямих існують по дві точки.

A_4:Існують три точки A, B, C, що одночасно не належать жодній із означених прямих $\{A,B\},\{B,C\},\{A,C\}$.

Таким чином, побудовано модель цієї системи аксіом, а значить вона є несуперечливою.

Перевіримо аксіому A_1 на незалежність. Розглянемо систему $\Sigma_1 = \{\overline{A_1}, A_2, A_3, A_4\}$, де аксіома $\overline{A_1}$: «Існує принаймні дві різні точки, для яких не існує прямої, якій обидві ці точки належать» є запереченням аксіоми A_1. Треба перевірити систему Σ_1 на несуперечливість. Розглянемо наступну модель цієї системи. "Точкою" назвемо будь-яку з трьох точок A, B, C евклідової площини, "прямою" – будь-яку з невпорядкованих пар $\{A, B\}, \{A, C\}$, "належати" – в теоретико-множинному сенсі (елемент належить множині). Перевіримо, чи виконуються аксіоми.

$\overline{A_1}$: Для точок B і C не існує прямої, якій обидві ці точки належать.

Очевидно, що і аксіоми A_2, A_3, A_4 виконуються, отже система Σ_1 – несуперечлива. Значить аксіома A_1 не залежить від аксіом A_2, A_3, A_4.

Далі перевіримо незалежність аксіоми A_2. Розглянемо систему $\Sigma_2 = \{A_1, \overline{A_2}, A_3, A_4\}$, де $\overline{A_2}$: «Існують принаймні дві різних точки, для яких існують принаймні дві різні прямі, що містять ці точки». Визначимо поняття: "точка" – будь-яка з трьох точок A, B, C евклідової площини, "пряма" – будь-яка з впорядкованих пар $(A, B), (A, C), (B, C), (C, B)$, "належати" – як елемент множині. Легко бачити, що аксіоми A_1, A_3, A_4 виконуються. Для доведення аксіоми $\overline{A_2}$ розглянемо точки B та C. Для них існують дві різні прямі (B, C) і (C, B), що їх містять. Отже, система Σ_2 – несуперечлива, а значить,. аксіома A_2 не залежить від аксіом A_1, A_3, A_4.

Аналогічно доводиться незалежність аксіом A_3, A_4 (самостійно). Доведено незалежність заданої системи аксіом.

Дана система аксіом не буде повною, бо існують не ізоморфні моделі цієї системи. Наприклад, модель M_1, в якій три точки A, B, C та три прямі $\{A, B\}, \{B, C\}, \{A, C\}$ та модель M_2, в якій чотири точки A, B, C, D та шість прямих $\{A, B\}, \{B, C\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, D\}, \{C, D\}$ пов'язані відношенням приналежності в зазначеному вище сенсі, не ізоморфні.

Задача 2. Дано математичну структуру $M = \{T, G, \rho, A_1, A_2, A_3, A_4\}$, де T – множина точок, G – множина прямих, ρ – відношення приналежності таке, що виконуються аксіоми:

A_1 : для будь-яких двох різних точок існує єдина пряма, що містить кожну з них.

A_2 : на кожній прямій існує принаймні дві точки.

A_3: існує трійка точок, що не належать одній прямій.

A_4: через будь-яку точку, що не належить даній прямій, проходить єдина пряма, що не перетинає дану пряму.

Дослідити систему аксіом на несуперечність, аксіому A_4 на незалежність.

Розв'язання. Визначимо поняття: "точка" – будь-яка з чотирьох точок A, B, C, D евклідової площини, "пряма" – будь-яка з невпорядкованих пар

$\{A,B\},\{B,C\},\{C,D\},\{A,D\},\{A,C\},\{B,D\}$, "належати" – як елемент множині: $A \in \{A,B\}$, "паралельні прямі" – ті, що не мають спільних точок із точок A,B,C,D.

Дослідження систему аксіом на несуперечність проводиться аналогічно задачі 1. Очевидно, що аксіоми A_1, A_2, A_3 виконуються. Доведемо аксіому A_4. Нехай $\{A,B\}$ – дана пряма, а C – точка, що їй не належить. Тоді серед прямих $\{A,C\},\{B,C\},\{C,D\}$, що містять точку C, лише одна пряма $\{C,D\}$ паралельна прямій $\{A,B\}$. Так само для інших п'яти прямих.

Для перевірки аксіоми A_4 на незалежність треба дослідити систему аксіом $\Sigma' = \{A_1, A_2, A_3, \overline{A_4}\}$ на несуперечливість.

Задача 3. Довести, що система аксіом метричної структури залежна.

Доведення. Нагадаємо означення метрики: Метрикою (або відстанню) на довільній непорожній множині M називається така дійсна функція $\rho(x,y)$, визначена для всіх $x,y \in M$, яка задовольняє наступним аксіомам:

A_1. Для будь-яких $x,y \in M$ $\rho(x,y) \geq 0$ (аксіома невід'ємності);

A_2. $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксіома тотожності);

A_3. Для будь-яких $x,y \in M$ $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (аксіома симетрії);

A_4. Для будь-яких $x,y,z \in M$ $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z)$ (нерівність трикутника).

Доведемо, що досить прийняти лише аксіоми 2 і 4, а аксіоми 1 і 3 отримати як наслідки. Запишемо аксіому A_4 для набору x,x,z, отримаємо

$$\rho(x,x) \leq \rho(x,z) + \rho(x,z) = 2\rho(x,z),$$

звідки, з урахуванням аксіоми A_2

$$\rho(x,z) \geq 0,$$

тобто виконується аксіома A_1.

Далі, для набору x,z,x аксіома A_4 прийме вигляд

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,x) + \rho(z,x), \text{ або } \quad \rho(x,z) \leq \rho(z,x),$$

а для набору z,x,z –

$$\rho(z,x) \leq \rho(z,z) + \rho(x,z), \text{ або } \quad \rho(z,x) \leq \rho(x,z).$$

Отже, $\rho(x,z) = \rho(z,x)$, тобто аксіома A_3 теж доведена.

Задача 4. Довести незалежність аксіоми 4.4 системи аксіом Вейля.

Розв'язання. Для доведення незалежності аксіоми 4.4 від інших аксіом системи аксіом Вейля розглянемо систему $\Sigma' = \{1.1 - 4.3, 5.1, 5.2, \overline{4.4}\}$, де

$\overline{4.4}$: «Існують принаймні два таких ненульових вектора $\bar{x}, \bar{y}$, що $(\bar{x},\bar{x}) > 0,\ (\bar{y},\bar{y}) < 0$».

Побудуємо модель. Основні поняття «точка», «вектор», «сума векторів», «добуток вектора на число» та «відкладання вектора від точки» означимо так само як і при побудові арифметичної моделі. Скалярний добуток векторів $\overline{a}=(a_1,a_2,a_3)$ та $\overline{b}=(b_1,b_2,b_3)$ означимо формулою

$$(\overline{a},\overline{b})=a_1b_1+a_2b_2-a_3b_3 .$$

Очевидно, що аксіоми 4.1, 4.2, 4.3 виконуються. Для перевірки аксіоми 4.4 розглянемо вектори $\overline{a}=(1{,}0{,}0)$ та $\overline{b}=(0{,}0{,}1)$ і знайдемо їх скалярні квадрати:

$$\overline{a}^2=1^2+0^2-0^2=1>0,\ \overline{b}^2=0^2+0^2-1^2=-1<0 .$$

Таким чином, система Σ' – несуперечлива, отже , аксіома 4.4 не залежить від інших аксіом системи Вейля.

Задача 5. Довести, не використовуючи комутативність додавання векторів, наступні твердження:

1). $0\cdot\overline{x}=\overline{0}$.

2). $(-1)\cdot\overline{x}=-\overline{x}$.

3). $-\overline{x}+\overline{x}=\overline{0}$.

4). $\overline{0}+\overline{x}=\overline{x}$.

5). $-(-\overline{x})=\overline{x}$.

6). $-(\overline{x}+\overline{y})=-\overline{x}-\overline{y}$.

Розв'язання. Над знаками «=» будемо інколи записувати номер аксіоми або доведеного твердження

1). $\overline{x}+0\cdot\overline{x}\overset{2.4}{=}1\cdot\overline{x}+0\cdot\overline{x}\overset{2.2}{=}(1+0)\cdot\overline{x}=1\cdot\overline{x}\overset{2.4}{=}\overline{x}$. З аксіоми 1.3 випливає, що $0\cdot\overline{x}=\overline{0}$.

2). $\overline{x}+(-1)\cdot\overline{x}\overset{2.4}{=}1\cdot\overline{x}+(-1)\cdot\overline{x}\overset{2.2}{=}(1-1)\cdot\overline{x}=0\cdot\overline{x}\overset{1)}{=}0$, отже $(-1)\cdot\overline{x}=-\overline{x}$.

3). $-\overline{x}+\overline{x}\overset{2.4}{=}(-1)\cdot\overline{x}+1\cdot\overline{x}\overset{2.2}{=}(-1+1)\cdot\overline{x}=0\cdot\overline{x}=\overline{0}$.

4). $\overline{0}+\overline{x}\overset{1.4}{=}(\overline{x}-\overline{x})+\overline{x}\overset{1.2}{=}\overline{x}+(-\overline{x}+\overline{x})=\overline{x}+\overline{0}\overset{3)}{=}\overline{x}$.

5). $-(-\overline{x})\overset{2)}{=}(-1)\cdot(-\overline{x})\overset{2)}{=}(-1)\cdot((-1)\cdot\overline{x})\overset{2.3}{=}(-1)\cdot(-1)\cdot\overline{x}=\overline{x}$.

6). $-(\overline{x}+\overline{y})\overset{2)}{=}(-1)\cdot(\overline{x}+\overline{y})\overset{2.1}{=}(-1)\cdot\overline{x}+(-1)\cdot\overline{y}\overset{2)}{=}-\overline{x}-\overline{y}$.

Задача 6. Довести залежність аксіоми 1.1: $\forall\overline{a},\overline{b}\quad \overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ комутативності суми векторів від аксіом перших двох груп аксіоматики Вейля.

Розв'язання. Почнемо з лівої частини рівності і застосуємо аксіоми та доведені в попередній задачі властивостями, записуючи їх номери над знаками рівності, отримаємо

$$\bar{a}+\bar{b}\overset{1.3}{=}\bar{a}+\bar{b}+\bar{0}\overset{3)}{=}(\bar{a}+\bar{b})-(\bar{b}+\bar{a})+(\bar{b}+\bar{a})\overset{6)}{=}(\bar{a}+\bar{b})+(-\bar{b}-\bar{a})+(\bar{b}+\bar{a})\overset{1.2}{=}$$

$$=\bar{a}+(\bar{b}-\bar{b})-\bar{a}+(\bar{b}+\bar{a})\overset{1.4}{=}\bar{a}+\bar{0}-\bar{a}+(\bar{b}+\bar{a})\overset{1.3}{=}$$

$$=\bar{a}-\bar{a}+(\bar{b}+\bar{a})\overset{1.4}{=}\bar{0}+(\bar{b}+\bar{a})\overset{1.3}{=}\bar{b}+\bar{a}$$

Висновок. Система аксіом Вейля залежна.

Задачі для самостійного розв'язання.

1. Точкою назвемо будь-яку точку площини, окрім однієї точки (точки *O*), прямою назвемо будь-яку пряму цієї площини, що проходить через точку *O*, або будь-яке коло, що проходить через точку *O*. Відношення «належати» розуміємо в теоретико-множинному сенсі. Дві прямі одного типу будемо називати паралельними, якщо вони не перетинаються. Показати, що наведений опис дає модель системи аксіом із **задачі 2**.

2. Які з наступних тверджень справедливі для вказаних множин точок і прямих і відношення належності:

1) «Точка» - довільна внутрішня точка круга на евклідовій площині, «пряма» - довільна хорда цього круга (без кінців), «належить», «перетинаються» - в теоретико-множинному сенсі.

2) «Точка» - довільне коло радіуса r на евклідовій площині, «пряма» - довільна пара паралельних прямих, евклідова відстань між якими дорівнює $2r$, «точка належить прямій» - коло дотикається до пари паралельних прямих, «перетинаються» - в теоретико-множинному сенсі

3) «Точка» - довільна сфера радіуса r в евклідовому просторі, «пряма» - довільний круговий циліндр радіуса r, «точка належить прямій» - сфера дотикається до поверхні циліндра, «перетинаються» - в теоретико-множинному сенсі.

4) «Точка» - довільна пряма зв'язки прямих з центром О в евклідовому просторі, «пряма» - довільна площина цієї зв'язки, «точка належить прямій» - пряма зв'язки належить площині зв'язки, «перетинаються» - в теоретико-множинному сенсі. (зв'язка – множина прямих і площин, що проходять через одну точку).

Твердження:

A_1: для будь-яких двох різних точок існує єдина пряма, якій належить кожна з точок.

A_2: для будь-яких двох різних прямих існує єдина точка, яка належить кожній з прямих.

A_3: кожній прямій належать принаймні дві точки.

A_4: існує трійка точок, що не належать одній прямій.

A_5: через будь-яку точку, що не належить цій прямій, проходить єдина пряма, що не перетинає цю пряму.

A_6: через будь-яку точку, що не належить цій прямій, проходить дві прямі, що не перетинають цю пряму.

A_7: існує чотири точки, ніякі три з яких не належать одній прямій

Тема 2: Аксіоматичні теорії натуральних, цілих, раціональних та дійсних чисел

Мета: Прослідкувати логічний зв'язок між першими теоремами аксіоматичних теорій числових систем і відповідними аксіомами.

Методичні рекомендації. Зверніть увагу на необхідність дотримуватись математичної строгості при доведенні перших теорем аксіоматичних теорій. Бажано вказувати номери аксіом при обґрунтуванні кроків доведення. При доведенні властивостей цілих і раціональних чисел на мові пар ефективним буде використання факту, що при такому підході ціле число і, так само, раціональне число – це цілий клас попарно рівних між собою чисел.

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Довести, що $\forall a,b \in N \;\; a \le ab$, вважаючи, що властивості числових нерівностей вже доведено.

Розв'язання. Розглянемо очевидну для будь-якого натурального числа нерівність $1 \le b$. За властивістю монотонності відносно множення для довільного $\forall a \in N$ отримаємо нерівність $a \le ab$.

Задача 2. Теорема (Архімеда). $\forall a,b \in N \; \exists n \in N \; a < bn$.

Доведення. Зрозуміло, що треба розглянути лише випадок $a > b$. За означенням відношення порівняння натуральних чисел в цьому випадку існує натуральне число k таке, що $a = b + k$. Візьмемо $n = (k')'$ і застосуємо означення множення. Тоді $b(k')' = bk' + b = (bk + b) + b$. Отже, треба порівняти числа k і $bk + b$. За попередньою теоремою $k \le bk$, а значить при будь-якому натуральному b отримаємо $k < bk + b$, звідки випливає нерівність, що доводиться.

Задача 3. Довести, що $\forall a,b,c \in N \;\; a + c = b + c \Rightarrow a = b$.

Доведення. Застосуємо принцип індукції по c. При $c = 1$ одержимо

$$a + 1 = b + 1 \Rightarrow a' = b' \Rightarrow a = b.$$

Припустимо, що для натурального k вірна імплікація

$$a + k = b + k \Rightarrow a = b.$$

Для k' отримаємо $a+k'=b+k' \Rightarrow (a+k)'=(b+k)' \Rightarrow (a+k)=(b+k)$. За індуктивним припущенням маємо наслідок $a=b$. Отже, $\forall a,b,c \in N \;\; a+c=b+c \Rightarrow a=b$.

Задача 4. Показати, що між довільними двома різними раціональними числами існує принаймні одне раціональне число.

Вказівка. Розгляньте півсуму даних чисел.

Задача 5. Показати, що в множині раціональних чисел не існує такого перерізу, що в класі *A* є найбільший, а в класі *B* є найменший елемент.

Доведення. Нехай *а* - найбільший в *A*, *в* - найменший в *B*. Тоді *а*<*в*. Існує раціональне *с* таке, що *а*<*с*<*в*. Оскільки *с*>*а*, то *с* не належить до класу *A*, оскільки *с*<*в*, то *с* не належить до *B*. Отримали протиріччя з означенням перерізу.

Задача 6. Довести властивість різниці: $m-n=(m+k)-(n+k)$.

Розв'язання. Нехай $m=(m_1,m_2)$, $n=(n_1,n_2)$, $k=(k_1,k_2)$. Тоді

$$m-n=(m_1,m_2)-(n_1,n_2)=(m_1+n_2,m_2+n_1),$$

і

$$(m+k)-(n+k)=(m_1+k_1,m_2+k_2)-(n_1+k_1,n_2+k_2)=$$
$$=(m_1+n_2+k_1+k_2,m_2+n_1+k_1+k_2).$$

Цілі числа в правих частинах останніх двох рівностей належать одному класу, або, інакше, рівні між собою.

Задачі для самостійного розв'язання.

1. Впорядкувати цілі числа
$(7,10),(1,5),(11,3),(4,9),(20,3),(0,3),(5,4),(8,1)$.
2. Впорядкувати раціональні числа:
$(7,10),(1,5),(11,3),(4,9),(20,3),(0,3),(5,4),(8,1)$.
3. Порівняти цілі числа і знайти їх суму та різницю: $(1,7),(5,11)$.
4. Порівняти раціональні числа і знайти їх суму та різницю: $(1,7),(5,11)$
5. Довести властивості різниці
   1). $a-b-c=a-(b+c)$,
   2). $(a-b)-(c-d)=(a+d)-(b+c)$,
   3). $a-(b-c)=(a-b)+c$.
6. Довести рівності $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(a,a+\dfrac{y}{n}\right]=\varnothing$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left[a-\dfrac{y}{n},a\right)=\varnothing$.

7. На множині R операція додавання визначена наступним чином: $(\forall a,b \in R)\, a \oplus b=\sqrt[3]{a^3+b^3}$. Операція множення звичайна. Перевірити, чи для

цих операцій виконуються аксіоми системи дійсних чисел. Виразити похідну, задану формулою $f^*(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x\oplus\Delta x)-^* f(x)}{\Delta x}$, через звичайну похідну.

8. Довести наслідки з аксіом множини дійсних чисел:
   1) для будь-яких $x, y \in R$ має місце лише одне із співвідношень: $x<y$, $x>y$, $x=y$.
   2) для будь-яких $x, y, z \in R$ виконується імплікація: $(x<y)\wedge(y\le z)\Rightarrow(x<z)$.
   3) для будь-якого x виконується імплікація $(0\le z)\Rightarrow(-x<0)$.
   4) $0<1$.

Тема 3: Системи аксіом евклідової геометрії. Еквівалентність систем аксіом Вейля та Гільберта

Мета: Порівняти аксіоматичні теорії евклідової геометрії, побудовані на базі систем аксіом Вейля та Гільберта.

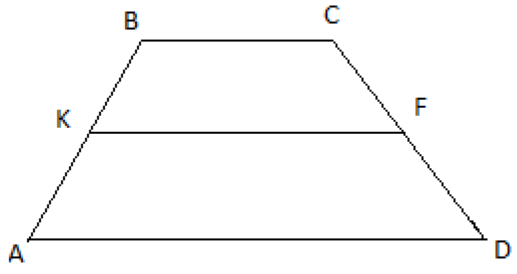
Методичні рекомендації. Математична структура «**евклідова геометрія»** може бути побудована на базі різних систем аксіом. Порівняння різних аксіоматичних теорій евклідової геометрії є важливим для розуміння аксіоматичного методу як засобу для її обґрунтування. Доведення еквівалентності систем Вейля і Гільберта підкреслює той факт, що такі різні системи аксіом дозволяють побудувати теорію однієї математичної структури.

Приклади розв'язання задач

Розв'язати задачі в аксіоматичній теорії Вейля:

Задача 1. Довести, що середня лінія трапеції паралельна її основам та дорівнює їх півсумі.

Розв'язання.



Розглянемо трапецію $ABCD$ з основами AD і BC та середньою лінією KF. Доведемо, що

1. $\overline{KF} \parallel \overline{AD}, \overline{KF} \parallel \overline{BC}$

2. $\overline{KF}=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})$.

Користуючись аксіомами 1.3, 1.4, 2.3, 5.2, можна записати

$\overline{KF} = \overline{KA} + \overline{AD} + \overline{DF}$ та $\overline{KF} = \overline{KB} + \overline{BC} + \overline{CF}$. Або $\begin{cases} \overline{KF} = \overline{KA} + \overline{AD} + \overline{DF} \\ \overline{KF} = -\overline{KA} + \overline{BC} - \overline{DF} \end{cases}$. Сума отриманих векторних рівностей дає векторну рівність $2\overline{KF} = \overline{AD} + \overline{BC}$. З визначення трапеції випливає, що $\overline{AD} = \alpha \overline{BC}$, тобто $2\overline{KF} = \alpha \overline{BC} + \overline{BC} = \overline{BC}(\alpha + 1)$ або $\overline{KF} = \frac{(\alpha + 1)}{2}\overline{BC}$. З цього випливає, що $\overline{KF} \parallel \overline{AD}, \overline{KF} \parallel \overline{BC}$.

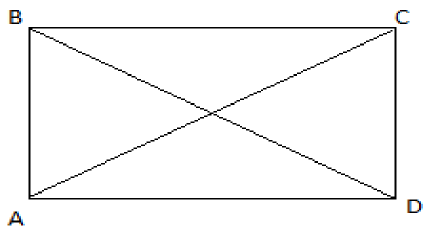
Доведемо другу властивість середньої лінії трапеції. Для цього треба скористатись такою властивістю векторів:

якщо $\overline{a} \parallel \overline{b}$, то $\left|\overline{a} + \overline{b}\right| = \left|\overline{a}\right| + \left|\overline{b}\right|$. Оскільки $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, то з векторної рівності $\overline{KF} = \frac{(\alpha + 1)}{2}\overline{BC} = \frac{\alpha \overline{BC} + \overline{BC}}{2} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$ отримаємо скалярну рівність

$$KF = \frac{AD + BC}{2},$$

яку і требі було довести.

Задача 2. Довести, що діагоналі прямокутника рівні між собою.



Доведення. Розглянемо прямокутник $ABCD$ з діагоналями AC та BD. Доведемо, що $AC = BD$.

Виразимо вектори діагоналей через вектори сторін прямокутника за аксіомою 5.2:

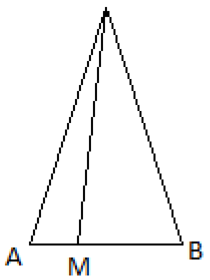
$$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} \text{ та } \overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD}.$$

Знайдемо скалярні квадрати обох векторів, отримаємо

$$AC^2 = \overline{AD}^2 + 2(\overline{AD}, \overline{DC}) + \overline{DC}^2 \text{ та } \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + 2(\overline{BC}, \overline{CD}) + \overline{CD}^2.$$

Оскільки $ABCD$ – прямокутник, то $(\overline{AD}, \overline{DC}) = 0$, $(\overline{BC}, \overline{CD}) = 0$, $AD = BC$ та $AB = CD$. З цього випливає, що знайдені скалярні квадрати векторів рівні, а значить і довжини цих векторів рівні, тобто $AC = BD$. Доведено.

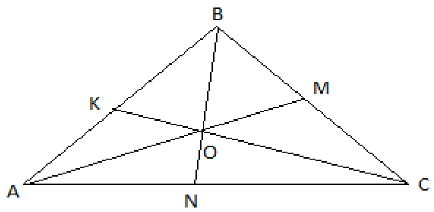
Задача 3. Довести, що медіани трикутника перетинаються в одній точці.



Доведення. Спочатку визначимо положення точки, що ділить відрізок в даному відношенні.

Умова ділення рівносильна векторній рівності $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$, $\lambda > 0$. За аксіомою 5.2 $\overline{AM} = \overline{AO} + \overline{OM}$, $\overline{MB} = \overline{MO} + \overline{OB}$, і рівність набуває вигляду $\overline{AO} + \overline{OM} = \lambda(\overline{MO} + \overline{OB})$ або $-\overline{OA} + \overline{OM} = -\lambda \overline{OM} + \lambda \overline{OB}$, звідки $\overline{OM} = \frac{\overline{OA} + \lambda \overline{OB}}{1 + \lambda}$.

Далі розглянемо трикутник ABC. Проведемо в ньому медіани AM, BN та CK. Доведемо, що всі вони перетинаються в одній точці.



Нехай медіани AM та BN перетинаються в точці O. Запишемо векторне співвідношення для третьої медіани $\overline{CK} = \dfrac{\overline{CA} + \overline{CB}}{2}$. Нехай $\overline{AO} = \lambda \overline{OM}$,

тоді $\overline{CO} = \dfrac{\overline{CA} + \lambda \overline{CM}}{1+\lambda} = \dfrac{\overline{CA} + \lambda \dfrac{\overline{CB}}{2}}{1+\lambda} = \dfrac{2\overline{CA} + \lambda \overline{CB}}{2(1+\lambda)}$.

Аналогічно, якщо $\overline{BO} = \mu \overline{ON}$, тоді $\overline{CO} = \dfrac{\overline{CB} + \mu \overline{CN}}{1+\mu} = \dfrac{\overline{CB} + \mu \dfrac{\overline{CA}}{2}}{1+\mu} = \dfrac{2\overline{CB} + \mu \overline{CA}}{2(1+\mu)}$.
За теоремою про однозначність розкладу вектора по одним і тим же лінійно незалежним векторам отримаємо $\dfrac{2\overline{CA} + \lambda \overline{CB}}{2(1+\lambda)} = \dfrac{2\overline{CB} + \mu \overline{CA}}{2(1+\mu)}$, що рівносильне системі рівнянь відносно невідомих λ, μ, з якої $\lambda = \mu = 2$. Таким чином, $\overline{CO} = \frac{1}{3}(\overline{CA} + \overline{CB}) = \frac{2}{3}\overline{CK}$. Остання векторна рівність дає висновок про належність точки O медіані CK.

Задача 4. Користуючись системою аксіом Вейля евклідової планіметрії довести, що для будь-яких трьох точок A, B, C справедлива нерівність трикутника: $|AB| \le |AC| + |CB|$.

Доведення. За аксіомою 5.2 для будь-яких точок A, B, C вірна рівність $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$. Тоді $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + 2(\overline{AC}, \overline{CB}) + \overline{CB}^2$. За нерівністю Коші-Буняковського для будь-яких векторів маємо $(\overline{AC}, \overline{CB}) \le |\overline{AC}| \cdot |\overline{CB}|$. Отже,

$$|\overline{AB}|^2 = |\overline{AC}|^2 + 2(\overline{AC}, \overline{CB}) + |\overline{CB}|^2 \le |\overline{AC}|^2 + 2|\overline{AC}| \cdot |\overline{CB}| + |\overline{CB}|^2 = \left(|\overline{AC}| + |\overline{CB}|\right)^2,$$

звідки і отримаємо $|AB| \le |AC| + |CB|$.

Задачі для самостійного розв’язання

Довести наступні теореми евклідової геометрії за допомогою системи аксіом Вейля:

1. Для будь-яких двох різних точок існує пряма, якій кожна з точок належить (аксіома 1.1 системи Гільберта).
2. Для будь-яких двох різних точок існує єдина пряма, якій кожна з точок належить (аксіома 1.2 системи Гільберта).
3. Паралельні прямі або не перетинаються, або співпадають.
4. Через будь-яку точку, яка не належить даній прямій, проходить лише одна пряма, що паралельна даній (твердження про єдність такої прямої є аксіомою паралельності в системі Гільберта).

5. В трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона.(в двох трикутниках з двома парами рівних сторін і різними кутами між цими сторонами проти більшого кута лежить більша сторона).

6. Знайти місце теореми Піфагора в аксіоматичній теорії Вейля.

7. Зовнішній кут трикутника більший за будь-який внутрішній кут цього трикутника, не суміжний з ним.

8. Медіана рівнобедреного трикутника є його бісектрисою і висотою.

Тема 4: Наслідки з аксіом перших трьох груп аксіоматики Гільберта. Співвідношення між кутами і сторонами трикутника. Логічний аналіз математичних тверджень.

Мета: Ознайомитися із аксіоматичною теорією Гільберта, викладеною в книзі [8], навчитися проводити логічний аналіз означень понять та доведень теорем.

Методичні рекомендації. При ознайомленні з аксіоматичною теорією слід звернути увагу на теореми, які наведено без доведення, спробувати їх самостійно довести і оформити доведення, використовуючи математичну символіку. При проведенні логічного аналізу означень можна його результати подавати у вигляді блок-схеми. При проведенні логічного аналізу доведення теореми важливо прослідкувати шлях від аксіом системи Гільберта до тверджень, що доводяться. Номери теорем в посиланнях співпадають із номерами теорем з Додатку Г.

Зверніть увагу на теорему 30 та наслідки з неї (задачі 5-8). При доведенні теореми 26 легко допустити помилку. Одне з помилкових доведень наведено в матеріалах для самостійної роботи.

Слід також звернути увагу на те, що за допомогою аксіом перших трьох груп на множині відрізків можна ввести відношення «менше» («більше»), використовуючи лише неозначуване поняття «конгруентність», тобто без вимірювання довжин відрізків. Можна також дати означення суми та різниці відрізків.

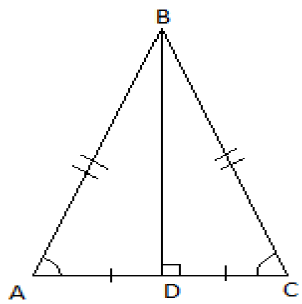
Приклади розв’язання задач

Користуючись аксіомами 1.1-1.3 аксіоматики Гільберта довести твердження.

Задача 1. Будь-які дві різні прямі мають не більше однієї спільної точки.

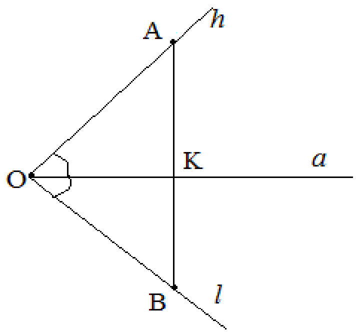
Розв’язання. Скористаємось методом від супротивного. Нехай a і b – різні прямі, які мають дві спільні точки: $a \cap b = \{M, N\}$, тобто $M \in a, N \in a$ та $M \in b, N \in b$. Тоді через дві різні точки M, N проходить дві прямі, що суперечить аксіомі 1.2.

Задача 2. (Th. 17 bis з додатку Г) В рівнобедреному трикутнику медіана основи є висотою та бісектрисою кута при вершині.



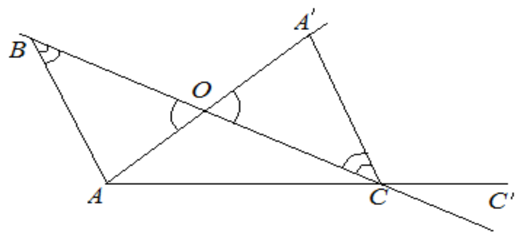
Доведення. Розглянемо рівнобедрений трикутник ABC, в якому проведена медіана BD. За умовою задачі $AB \equiv BC$, $AD \equiv DC$. За теоремою 17 $\angle BAD \equiv \angle BCD$, а, з теореми 14 випливає, що $\Delta BAD \equiv \Delta BCD$. З рівності цих трикутників випливає, що $\angle ABD \equiv \angle CBD$, тобто BD – бісектриса $\angle B$. Також з рівності $\angle BDA \equiv \angle BDC$ суміжних кутів випливає, що кожен з них прямий, отже BD – висота.

Задача 3. (Th. 25) Довести, що з будь-якої точки можна опустити на пряму один і тільки один перпендикуляр.



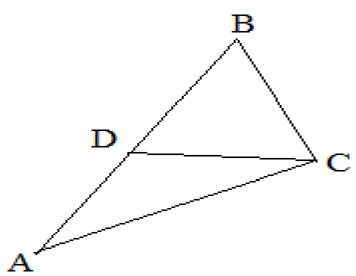
Доведення. На прямій a візьмемо точку O. Через точку $A \notin a$ та точку O проведемо пряму h. За аксіомою 3.4. існує єдина пряма l така, що $\angle(l,a) \equiv \angle(h,a)$. За аксіомою 3.1. існує єдина точка $B \in l$: $OB \equiv OA$. Оскільки точки A і B лежать в різних півплощинах, то за теоремою 10 прямі AB та a перетинаються. Розглянемо трикутник AOB. За побудовою $AO \equiv BO$, OK – бісектриса AOB. Отже, OK – висота (за теоремою 17 bis).

Задача 4. (Th. 30) Зовнішній кут трикутника більший за кожний внутрішній кут, не суміжний із ним**.**



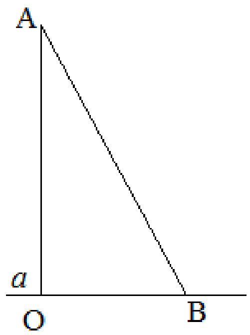
Доведення цієї теореми наведене в теоретичній частині.

Задача 5. (Th. 32)**.** В трикутнику більша сторона лежить навпроти більшого кута і навпаки.



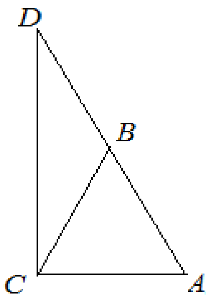
Доведення. Розглянемо трикутник ABC, в якому $AB > BC$. За аксіомою 3.1 існує єдина точка $D \in [BA]$ така, що $BD = BC$. Отриманий трикутник DBC – рівнобедрений, а значить $\angle CDB = \angle DCB$ (за теоремою 17). З теореми 30 випливає, що $\angle BDC > \angle BAC$, а значить і $\angle BCD > \angle BAC$. Оскільки $\angle BCA > \angle BCD$, то в трикутнику ABC маємо $\angle C > \angle A$.

Задача 6. (Th. 33**)** Довести, що перпендикуляр менший за похилу, які проведені до прямої з однієї точки.



Доведення. На пряму a з точки $A \notin a$ опустимо перпендикуляр AO та похилу AB. Розглянемо трикутник AOB, в якому кут O прямий, а $\angle A$ і $\angle B$ – гострі (за теоремою 31). Оскільки $\angle O > \angle A$, то $AB > AO$ (за теоремою 32).

Задача 7. (Th. 34) Довести, що кожна сторона трикутника менша суми та більша різниці інших його сторін**.**



Доведення. Розглянемо трикутник ABC. Доведемо, що $AC < AB + BC$ та $AC > AB - BC$. З аксіоми 3.1 випливає, що існує єдина точка $D \in [AB)$ така, що $BD = BC$. Утворився рівнобедрений трикутник BDC, в якому $\angle C = \angle D$ (за теоремою 17). Очевидно, що $\angle BCD < \angle ACD$, тоді $\angle ACD > \angle ADC$, звідки $AD = AB + BD = AB + BC > AC$.

Задача 8. Зробити логічний аналіз означення поняття «паралелограм».

Розв'язання. Означення поняття паралелограм відноситься до типу означень «через найближчий рід і видову ознаку». Найближчим родом для поняття паралелограм є поняття чотирикутника, для поняття чотирикутник – многокутник і так далі, поки не дійдемо до неозначуваних понять «точка», «пряма», «лежати між» (дивись блок-схему).

Задачі для самостійної роботи.

Користуючись аксіомами перших трьох груп аксіом системи Гільберта, довести твердження:

1. Перша ознака рівності трикутників.
2. Кути при основі рівнобедреного трикутника рівні.
3. Усі прямі кути конгруентні між собою.
4. Кожен кут можна розділити навпіл, причому єдиним чином.
5. У будь-якому трикутнику принаймні два кути є гострими.
6. З кожної точки на прямій можна відновити до цієї прямої єдиний перпендикуляр.

Тема 5: Абсолютна геометрія. Доведення тверджень абсолютної геометрії про суму кутів трикутника. Еквіваленти аксіом неперервності. Чотирикутник Саккері

Мета: Ознайомитися з аксіоматичною теорією математичної структури «абсолютна геометрія».

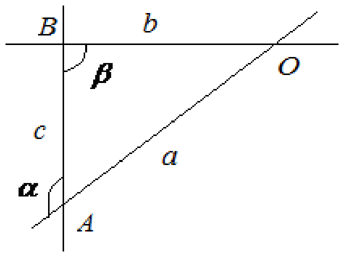
Методичні рекомендації. В аксіоматичній теорії абсолютної геометрії зверніть увагу на доведення серії теорем про суму кутів трикутника та на роль аксіом неперервності в обґрунтуванні теорії вимірювання величин (довжин відрізків, величин кутів). Для самостійного опрацювання рекомендується огляд теорії вимірювання площ многокутників та об'ємів многогранників та ознайомлення з третьою проблемою Гільберта (завдання 4).

Зверніть увагу на те, що означення паралельних прямих належить до абсолютної геометрії.

В деяких задачах для позначення міри прямого кута використовується символ d, який був введений ще в стародавні часи і використовується дотепер, особливо в літературі з основ геометрії.

Приклади розв'язання задач

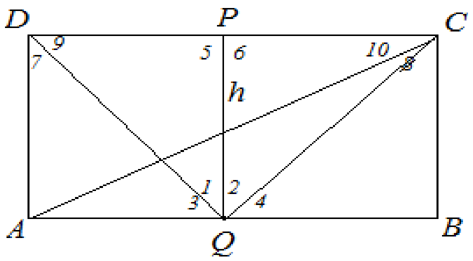
Задача 1. Довести що коли прямі a,b і c лежать в одній площині і пряма c, яка перетинає прямі a і b, утворює з ними рівні внутрішні навхрест лежачі кути, то прямі паралельні.



Доведення. Нехай пряма c перетинає пряму a в точці A, а пряму b – в точці B. Скористаємося методом від супротивного. Припустимо, що існує така точка O, що прямі a і b перетинаються в ній. В утвореному трикутнику AOB кут $\angle\beta$ – внутрішній кут при вершині B, кут $\angle\alpha$ – зовнішній кут при вершині A і $\angle\beta=\angle\alpha$ (за умовою). Отримали протиріччя з теоремою 30, отже наше припущення невірне, тобто прямі a і b не перетинаються.

Задача 2. Довести, що для чотирикутника Саккері виконуються наступні твердження:

1. серединний перпендикуляр до нижньої основи перетинає верхню основу;
2. серединний перпендикуляр до нижньої основи є серединним перпендикуляром до верхньої основи;
3. Кути при верхній основі рівні.



Доведення.

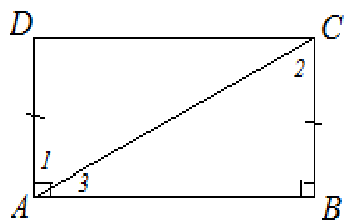
1. У чотирикутнику Саккері розглянемо трикутник ACB і серединний перпендикуляр h до нижньої основи. Пряма h за умовою перетинає відрізок $[AB]$, пряма h і відрізок $[BC]$ не перетинаються за теоремою 45. Отже, пряма h і відрізок $[AC]$ перетинаються (за аксіомою Паша). Далі розглянемо трикутник ADC. З того, що h і $[AC]$ перетинаються, а h і $[AD]$ не перетинаються, випливає, що h і $[DC]$ перетинаються.

2. Розглянемо трикутники ADQ і BCQ. За умовою $AD=CD$, $\angle A=\angle B$, $AQ=BQ$, а значить $\Delta ADQ=\Delta BCQ$ (за теоремою 14). З рівності трикутників

випливає, що $\angle 3 = \angle 4$, $DQ = CQ$. Оскільки $\angle AQP = \angle BQP$, то $\angle 1 = \angle 2$. За теоремою 14 виконується також рівність трикутників PQD і PQC, а значить $DP = CP$, $\angle 5 = \angle 6 = 90^0$ (як суміжні). Отже, h – серединний перпендикуляр до DC.

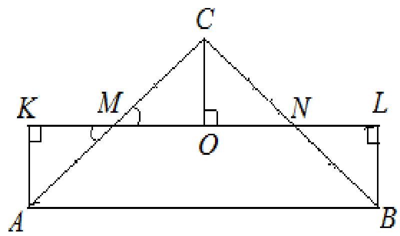
3. З рівності $\Delta ADQ = \Delta BCQ$ випливає, що $\angle 7 = \angle 8$, а з $\Delta PQD = \Delta PQC$ випливає, що $\angle 9 = \angle 10$. Тому $\angle C = \angle 8 + \angle 10 = \angle 7 + \angle 9 = \angle D$.

Задача 3. Довести, що верхня основа чотирикутника Саккері не менша за нижню.



Доведення. В чотирикутнику $ABCD$ позначимо кути: $\angle DAC = \angle 1$, $\angle CAB = \angle 3$, $\angle ACB = \angle 2$. В абсолютній геометрії має місце теорема: сума кутів трикутника не більша ніж $2d$. Тому можна записати наступні співвідношення $\angle 1 + \angle 3 = d$, $\angle 2 + \angle 3 \le d$,з яких слідує $\angle 3 = d - \angle 1$ і $\angle 2 \le \angle 1$. З останньої нерівності посилаючись на теорему 32 робимо висновок, що $AB \le DC$.

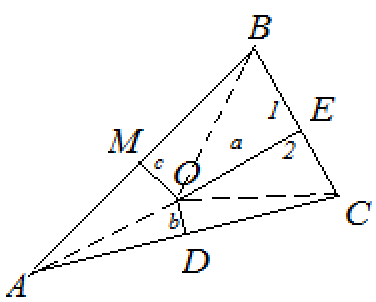
Задача 4. Довести, що середня лінія трикутника не більша за половину основи.



Доведення. Нехай в трикутнику ABC побудована середня лінія MN. На пряму MN опустимо перпендикуляри з вершин трикутника Трикутники AKM і COM рівні, тому $AK = CO$. Також виконується рівність $\Delta CON = \Delta BLN$, а значить $CO = BL$, отже $AK = BL$. Отриманий чотирикутник $ABLK$ є чотирикутником Саккері, а тому $KL \le AB$ за попередньою задачею. З рівності вказаних пар трикутників випливають рівності $KM = MO$, $ON = LN$ відповідних сторін цих трикутників.

Таким чином, $2MN \le AB$, або $MN \le \frac{1}{2} AB$, що і треба було довести.

Задача 5. Довести, якщо два серединних перпендикуляра до сторін трикутника перетинаються в точці O, то і третій серединний перпендикуляр проходить через цю точку.



Доведення. Розглянемо трикутник ABC, в якому a – серединний перпендикуляр до сторони BC, b – серединний перпендикуляр до сторони AC та прямі a і b перетинаються в точці O Проведемо серединний перпендикуляр c до сторони AB. Розглянемо трикутники BOE та COE, вони рівні за першою ознакою рівності трикутників. Аналогічно $\Delta AOD = \Delta COD$. З цих рівностей випливає, що

$OB = OA$, а значить трикутник AOB – рівнобедрений. Нехай OM – медіана цього трикутника, тоді за теоремою 17 bis OM та AB перпендикулярні, тобто OM співпадає з серединним перпендикуляром c.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Довести, що якщо існує трикутник із сумою внутрішніх кутів, рівною двом прямим кутам, то сума внутрішніх кутів довільного трикутникам дорівнює двом прямим кутам.
2. Довести, що якщо існує прямокутний трикутник із сумою внутрішніх кутів, рівною двом прямим кутам, то сума внутрішніх кутів довільного прямокутного трикутникам дорівнює двом прямим кутам.
3. Довести, що вписаний в коло кут, що спирається на діаметр, не більший за прямий кут.
4. Знайти залежність між стороною правильного вписаного в коло шестикутника і радіусом кола.

Тема 6: Наслідки з аксіоми паралельності. Еквіваленти п'ятого постулату.

Мета: Сформувати вміння знаходити і доводити еквівалентність твердження евклідової геометрії і п'ятого постулату Евкліда

Методичні рекомендації. Важливо зрозуміти, якими є перші твердження, доведення яких неможливе без використання аксіоми паралельності. Треба повторити, які твердження називаються еквівалентними. Зверніть увагу на еквівалентність аксіоми паралельності та п'ятого постулату Евкліда. Буде корисним проаналізувати, як зміниться послідовність тверджень, якщо в системі аксіом Гільберта замінити аксіому паралельності одним із її еквівалентів.

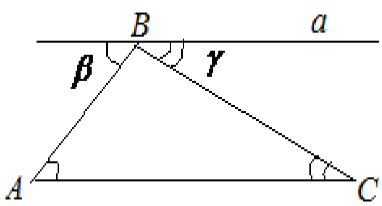
Приклади розв'язання задач

Задача 1. Довести, що при перетині двох паралельних прямих третьою утворюються рівні навхрест розташовані кути.

Доведення. Сформульоване твердження в «Началах» Евкліда було теоремою 29 і це була перша теорема, в доведенні якої використовувався 5 постулат.

Паралельні прямі a і b утворюють з їх січною 2 пари навхрест розташованих кутів, які позначимо 1 і 4, 2 і 3, а пари 1 і 2, 3 і 4 – пари односторонніх кутів, 1 і 3 – суміжні. Припустимо, що кут 1 не дорівнює куту 4, і для визначеності, нехай кут 1 більше за кут 4. Тоді сума кутів 3 і 4 менша за розгорнутий кут, а отже за 5 постулатом прямі a і b перетинаються. Отримане протиріччя доводить теорему.

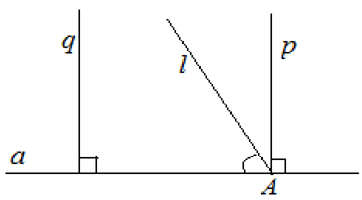
Задача 2. Довести, що сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює сумі двох прямих кутів.



Доведення. Розглянемо трикутник ABC. Проведемо пряму $a \parallel AC$. З теореми 47 випливає, що $\angle A = \angle\beta$, $\angle C = \angle\gamma$. Оскільки кути β, B, γ утворюють розгорнутий кут, то для суми кутів трикутника отримаємо $\angle A + \angle B + \angle C = \angle\beta + \angle B + \angle\gamma = 180^0$, що і треба було довести.

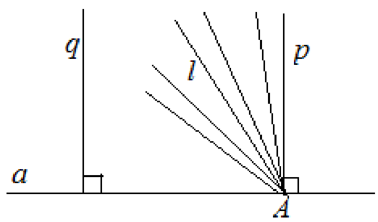
Довести еквівалентність п'ятого постулату та наступних тверджень:

Задача 3. Перпендикуляр і похила, проведені в одній площині до даної прямої, перетинаються.



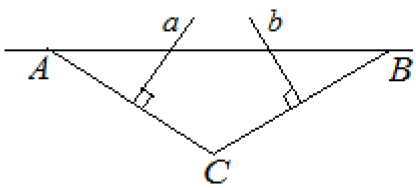
Доведення. 1) Покажемо, що це твердження випливає з п'ятого постулату. До прямої a в точці A проведемо перпендикуляр p та похилу l. Проведемо ще один перпендикуляр q до прямої a. За теоремою 45 p і q паралельні. Приспустимо, що l і q не перетинаються, тоді отримаємо протиріччя з аксіомою паралельності, яка еквівалентна п'ятому постулату.

2) Покажемо, що з твердження випливає аксіома паралельності.



Розглянемо пучок прямих, що проходять через точку A. В цьому пучку є єдина пряма, яка не є похилою, це пряма p, перпендикулярна до прямої a. За умовою кожна похила перетинає перпендикуляр q. Отже, через точку A, яка не належить прямій q, проходить єдина пряма p, яка не перетинає пряму q, тобто виконується аксіома паралельності.

Задача 4. Навколо кожного трикутника можна описати коло.

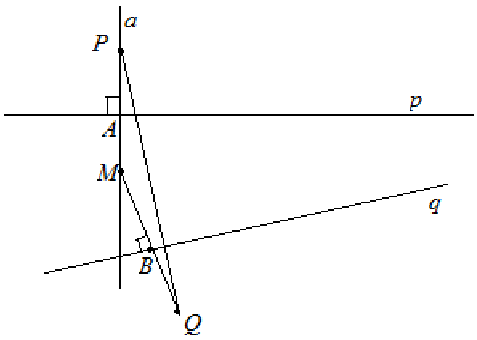


Доведення. 1) Покажемо, що з аксіоми паралельності випливає твердження: Два серединних перпендикуляра до двох сторін трикутника завжди перетинаються.

В трикутнику ABC проведемо серединні перпендикуляри a і b до сторін AC і CB відповідно. Припустимо, що прямі a і b не перетинаються, тобто паралельні. Проведемо через точку $D = AC \cap a$ пряму p, перпендикулярну до CB. За теоремою 45 прямі p і b не перетинаються. Таким чином, через точку D проходить дві різні прямі, які не перетинають CB. Отримали протиріччя з аксіомою паралельності, значить наше припущення невірне.

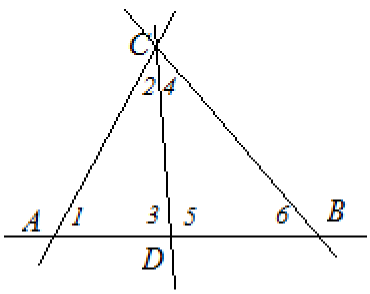
Точка перетину серединних перпендикулярів і є центром описаного навколо трикутника кола.

2) Тепер покажемо, що з цього твердження випливає аксіома паралельності.



До прямої a проведемо перпендикуляр p та похилу q. На прямій a візьмемо точку M, симетричну їй відносно прямої p точку P та симетричну їй відносно прямої q точку Q. Очевидно, що точки P,Q,M не належать одній прямій, тобто утворюють трикутник. За побудовою p і q – серединні перпендикуляри до двох сторін цього трикутника. За умовою, навколо ΔPQM можна описати коло, а значить p і q, а значить перпендикуляр і похила до однієї прямої перетинаються. В попередній задачі було доведено, що з цього факту випливає аксіома паралельності.

Задача 5.Сума внутрішніх кутів в кожному трикутнику одна і та сама.



Доведення. 1) В задачі 2 цієї теми показано, що з аксіоми паралельності випливає, що в кожному трикутнику сума внутрішніх кутів дорівнює двом прямим кутам, тобто одна і та сама.

2) Покажемо як з твердження випливає п’ятий постулат. В трикутнику ABC позначимо кути так, як показано на рисунку. Можна записати такі рівності:

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3=\angle 4+\angle 5+\angle 6=x,$$

$$\angle 4+\angle 5+\angle 6=\angle 1+(\angle 2+\angle 4)+\angle 6,$$

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3=\angle 1+(\angle 2+\angle 4)+\angle 6=x,$$

Запишемо вирази $\angle 3=x-(\angle 1+\angle 2)$ та $\angle 5=x-(\angle 4+\angle 6)$. Знайдемо суми правих та лівих частин двох останніх рівностей

$$\angle 3+\angle 5=2x-(\angle 1+\angle 2)-(\angle 4+\angle 6),$$

звідки

$$\angle 3+\angle 5=x=180^0.$$

Твердження про те, що в кожному трикутнику сума внутрішніх кутів дорівнює 180^0, еквівалентне п’ятому постулату.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 1. Довести, що п'ятий постулат Евкліда еквівалентний твердженням:

1. Існують два подібних, але не рівних трикутника.
2. Існує принаймні один чотирикутник з чотирма прямими кутами.
3. Існує принаймні один прямокутник і принаймні один квадрат.
4. Існує принаймні один опуклий чотирикутник із сумою кутів $4d$.
5. Сторона правильного вписаного в коло шестикутника дорівнює радіусу кола.
6. Три точки, розташовані в одній півплощині відносно даної прямої, і рівновіддалені від неї, належать одній прямій.
7. Існують два подібних і не конгруентних трикутника
8. Існує принаймні один чотирикутник з чотирма прямими кутами.

Задача 2. Чи використовується п'ятий постулат Евкліда при доведенні наступних теорем

- середня лінія трикутника паралельна основі і дорівнює половині основи;
- теорема косинусів;
- теореми Піфагора;
- при перетині двох паралельних прямих третьою відповідні кути рівні між собою;
- при перетині двох прямих третьою сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює $2d$.

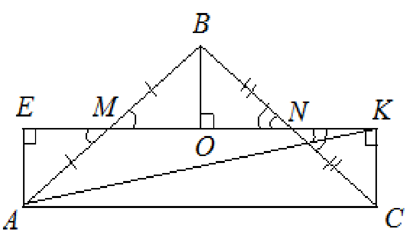
Тема 7: Планіметрія Лобачевського.

Мета: Сформувати навички доведення основних теорем планіметрії Лобачевського.

Методичні рекомендації. При доведенні теорем планіметрії Лобачевського часто використовуються теореми абсолютної геометрії.

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Довести справедливість твердження в геометрії Лобачевского: «Середня лінія трикутника менша половини його основи».

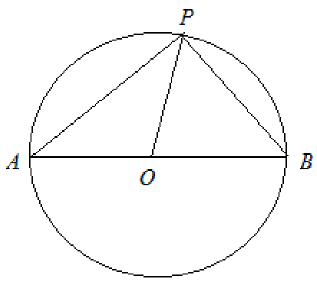


Доведення. Розглянемо трикутник ABC, MN – середня лінія. Доведемо, що $MN < \frac{1}{2}AC$.

Через середини сторін AB і BC проведемо пряму і опустимо на неї перпендикуляри з вершин трикутника. Рівності $\angle EMA = \angle BMO$ та $\angle BNO = \angle KNC$ для пар вертикальних кутів і рівність за умовою відмічених пар відрізків дає можливість зробити висновок $\Delta MBO = \Delta MAE$ та $\Delta BON = \Delta NCK$ про рівність прямокутних трикутників (за гіпотенузою та гострим кутом). З цього випливає, що $BO = AE$ та $BO = KC$, тобто $AE = KC$. Отриманий чотирикутник $AEKC$ є чотирикутником Саккері. В цьому чотирикутнику $\angle AKC + \angle AKE = \frac{\pi}{2}$, тобто $\angle AKE = \frac{\pi}{2} - \angle AKC$. В трикутнику AEK: $\angle EAK + \angle AKE + \frac{\pi}{2} < \pi$, тобто $\angle EAK < \angle AKC$, звідки $EK < AC$.

З того, що $EM = MO$ та $ON = NK$ випливає, що $EK = 2MO + 2ON = 2MN$. Таким чином, $2MN < AC \Rightarrow MN < \frac{1}{2}AC$.

Задача 2. Довести справедливість твердження в геометрії Лобачевского: «Кут, під яким діаметр кола видно з будь-якої точки цього кола, відмінної від кінців діаметра, – гострий»



Доведення. Розглянемо коло з центром в точці O та діаметром AB. Візьмемо на колі довільну точку P та розглянемо утворений трикутник APB. З того, що $OA = OP = OB$ як радіуси випливає, що $\angle PAO = \angle APO$ та $\angle PBO = \angle BPO$. Сума кутів трикутника в геометрії Лобачевского менша π, тому

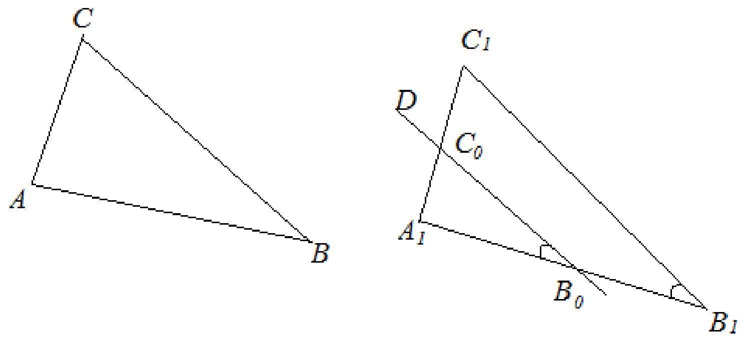
$$\angle PAO + \angle APO + \angle BPO + \angle PBO < \pi,$$

Або $2(\angle APO + \angle BPO) < \pi$. Отже, $\angle APB < \frac{\pi}{2}$, тобто він гострий. Доведено.

Задача 3. Довести справедливість твердження в геометрії Лобачевского: «В прямокутному трикутнику величина хоча б одного з його кутів менше $\frac{\pi}{4}$».

Доведення. В прямокутному трикутнику один з кутів дорівнює $\frac{\pi}{2}$. Якщо припустити, що кожен з останніх двох кутів не менший за $\frac{\pi}{4}$, то їх сума буде більшою за $\frac{\pi}{2}$. Ми отримали суперечність, оскільки в геометрії Лобачевского сума внутрішніх кутів трикутника менша за π.

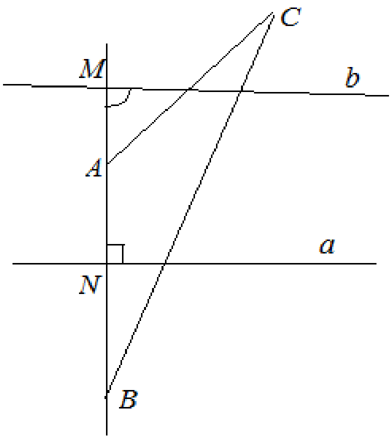
Задача 4. Довести твердження: «Якщо три кути одного трикутника дорівнюють відповідно трьом кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні» (четверта ознака рівності трикутників.)



Доведення. Розглянемо трикутники ABC та $A_1B_1C_1$, в яких $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$. Потрібно довести рівність відповідних сторін цих трикутників.

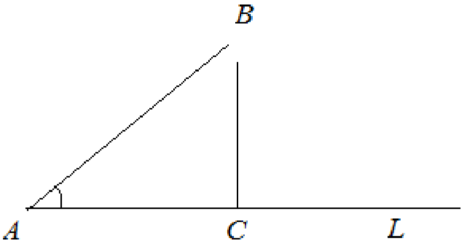
Припустимо, що $AB<A_1B_1$. Існує така точка $B_0\in[A_1B_1]$, що $[A_1B_0]\equiv[AB]$. Через точку B_0 проведемо півпряму $[B_0D)$ так, що $\angle A_1B_0D=\angle B_1$. За теоремою 46 пряма B_0D паралельна стороні B_1C_1. За аксіомою Паша промінь $[B_0D)$ перетинає відрізок $[A_1C_1]$, позначимо точку перетину C_0. Трикутники $A_1C_0B_0$ і ACB конгруентні (за теоремою 15). Ми довели, що трикутники $A_1C_1B_1$ і $A_1C_0B_0$ подібні та не конгруентні. Але твердження про існування подібних не конгруентних трикутників є еквівалентом п'ятого постулату Евкліда. Отже, отримали протиріччя, а значить $AB=A_1B_1$, звідки за теоремою 15 можемо зробити висновок про рівність даних трикутників.

Задача 5. Довести, що існують такі трикутники, навколо яких не можна описати коло.



Доведення. На площині Лобачевського проведемо прямі $b\parallel a$. Через точку $M\in b$ проведемо пряму $MN\perp a$, яка з прямою b утворює кут α – кут паралельності . Візьмемо точку $A\in MN$, побудуємо точку C, яка симетрична точці A відносно прямої b та точку B, яка симетрична точці A відносно прямої a. Точки A,B,C не належать одній прямій, оскільки в противному випадку $\angle\alpha=90^0$, що неможливо для кута паралельності. Розглянемо трикутник ABC. В ньому пряма a є серединним перпендикуляром до сторони AB, пряма b є серединним перпендикуляром до сторони AC та $b\parallel a$ за умовою, тому навколо цього трикутника не можна описати коло.

Задача 5. Довести, що ортогональна проекція однієї зі сторін гострого кута на іншу сторону є півінтервалом.



Доведення. Розглянемо гострий кут BAL. Відомо, що яким би не був гострий кут, завжди існує єдина пряма, перпендикулярна до сторони

AL цього кута і паралельна стороні AB. Отже, точка C не є ортогональною проекцією жодної з точок прямої AB на сторону AL кута, а кожна з точок півінтервала $[AC)$ буде ортогональною проекцією деякої точки сторони AB.

Задачі для самостійного розв'язання.

Довести наступні твердження в геометрії Лобачевського:

1. Сума внутрішніх кутів будь-якого трикутника менша $2d$.
2. Сума внутрішніх кутів будь-якого опуклого чотирикутника менша за $4d$.
3. Для будь-яких двох паралельних прямих існує і тільки одна пряма, яка перпендикулярна одній із двох даних прямих і паралельна другій.
4. Будь-які дві паралельні прямі мають вісь симетрії.
5. Сума внутрішніх кутів трикутника не є постійною.
6. Множина точок площини, рівновіддалених від даної прямої є кривою (яка називається еквідистантою).
7. Ортогональна проекція однієї із сторін гострого кута на другу сторону є пів інтервалом.
8. Катет прямокутного трикутника, який є протилежним до кута з величиною $\frac{\pi}{6}$, менший за половину гіпотенузи.
9. Яким повинен бути гострий кут, щоб ортогональна проекція однієї із його сторін на іншу сторону була не більша за 1 (не менша за 1)?

3 ЗМІСТ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Континуум-гіпотеза

Континуум-гіпотеза ще відома як перша проблема Гільберта, її формулювання наступне:

З точністю до еквівалентності, існують тільки два типи нескінченних числових множин - зліченна множина і континуум.

Інакше кажучи, потрібно встановити, чи існує множина проміжної потужності, тобто така множина T, $N \subset T \subset R$, яка не еквівалентна ні N, ні R.

Довести континуум-гіпотезу – значить, вивести її з системи аксіом. Спростувати її – значить, показати, що якщо її додати до цієї системи аксіом, то вийде суперечливий набір тверджень. У теорії множин є загальновизнана система аксіом Цермело–Френкеля.

Цією проблемою займалися дуже багато математиків. Г. Кантор неодноразово заявляв, що довів цю гіпотезу, але всякий раз знаходив у себе помилку.

Вирішення проблеми

Виявилось, що перша проблема Гільберта має абсолютно несподіване рішення.

У 1963 році американський математик Паул Коен довів, що континуум-гіпотезу не можна ні довести, ні спростувати.

Це означає, що якщо узяти стандартну систему аксіом Цермело–Френкеля (*ZF*) і додати до неї континуум-гіпотезу як ще одну аксіому, то вийде несуперечлива система тверджень. Але якщо до *ZF* додати заперечення континуум-гіпотези (тобто протилежне твердження), то знову вийде несуперечлива система тверджень.

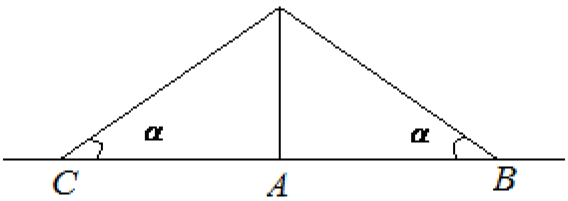
Таким чином, ні континуум-гіпотезу, ні її заперечення не можна вивести із стандартної системи аксіом.

Що ж робити з цією гіпотезою? Зазвичай її просто приєднують до системи аксіом *ZF*. Але кожного разу, коли використовують при доведенні якогось твердження континуум-гіпотезу, обов'язково указують на це.

2. Підготуватися до обговорення статі «Редукция аксиом линейного пространства» [19]. дати відповіді на такі запитання:

- В якому сенсі в назві статті використане слово «редукция»;
- Які висновки можна зробити відносно системи аксіом векторного простору, відомої з курсу лінійної алгебри;
- Як з використанням запропонованої в статті системи аксіом довести такі теореми (задача 5 теми 1).

3. Теорема 26 з Додатку Г. ***Через точку, що належить даній прямій, можна провести перпендикуляр і тільки один.*** **Яке з двох доведень підходить для розгляду цієї теореми після аксіом третьої групи системи Гільберта? В якому з доведень використовується 5 постулат?**



Доведення 1. Від даної точки A на кожній з півпрямих відкладемо рівні між собою відрізки AB і AC. Від півпрямої $[BA)$ відкладемо довільний гострий кут α. Від півпрямої $[CA)$ відкладемо кут, рівний α. Отримаємо рівнобедрений трикутник. Проведемо медіану до сторони BC, вона і буде перпендикуляром до даної прямої. Єдиність випливає із єдиності середини відрізка.

Доведення 2. Розглянемо будь-яку точку M, яка не належить заданій прямій. За теоремою 25 з неї можна опустити єдиний перпендикуляр на дану пряму, він утворює з даною прямою прямий кут. Всі прямі кути рівні між собою за теоремою 22. За аксіомо. 3.4 існує єдиний промінь з початком A, який утворює з променем даної прямої з початком A кут, рівний побудованому прямому куту.

4. Площі та об’єми. Третя проблема Гільберта.

5. Розбити наступні теореми на три групи: теореми абсолютної геометрії, наслідки аксіоми паралельності Евкліда, наслідки аксіоми паралельності Лобачевського.

1. Перпендикуляр і похила до однієї прямої, розташовані в одній півплощині відносно цієї прямої, не завжди перетинаються.
2. Існують трикутники, навколо яких не можна описати коло.
3. Сума внутрішніх кутів будь-якого трикутника не більша за $2d$.
4. Теорема синусів.
5. Теорема косинусів.
6. Теорема Піфагора.
7. Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.
8. Діагоналі прямокутника рівні між собою.
9. Точка перетину діагоналей трапеції, точка перетину продовжень її бічних сторін і середини основ трапеції належать одній прямій.
10. Сума квадратів сторін паралелограма дорівнює сумі квадратів його діагоналей.
11. Сума внутрішніх кутів трикутника не є постійною.
12. Множина точок площини, рівновіддалених від даної прямої є кривою.
13. Катет прямокутного трикутника, який є протилежним до кута з величиною $\frac{\pi}{6}$, більший за половину гіпотенузи.
14. Якщо сума внутрішніх кутів трикутника є постійною, то має місце 5 постулат Евкліда.
15. Якщо два серединних перпендикуляра до сторін трикутника перетинаються в деякій точці О, то третій серединний перпендикуляр теж проходить через точку О.

16. Якщо два серединних перпендикуляра до сторін трикутника перетинаються в деякій точці О, то навколо цього трикутника можна описати коло з центром в точці О.

17. Сума внутрішніх кутів будь-якого трикутника менша $2d$.

18. Сума внутрішніх кутів будь-якого опуклого чотирикутника не більша за $4d$.

19. Якщо три кути одного трикутника дорівнюють відповідно трьом кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

20. Для будь-яких двох паралельних прямих існує і тільки одна пряма, яка перпендикулярна одній із двох даних прямих і паралельна другій.

21. Ортогональна проекція однієї із сторін гострого кута на другу сторону є пвінтервалом.

22. Катет прямокутного трикутника, який є протилежним до кута з величиною $\frac{\pi}{6}$, не менший за половину гіпотенузи.

23. В прямокутному трикутнику величина хоча б одного з гострих кутів менша за $\frac{\pi}{4}$.

24. Середня лінія трикутника менша за половину його основи.

25. Будь-які дві паралельні прямі мають вісь симетрії.

6. Підготувати доповідь за темою:

- Історичний огляд обґрунтування геометрії. «Начала» Евкліда: зміст, структура, недоліки;
- Редукция аксиом линейного пространства;
- Перша проблема Гільберта;
- Дослідження Саккері, Ламберта, Лежандра;
- Проблема п’ятого постулату та історія її вирішення. Помилкові доведення п’ятого постулату Евкліда;
- Вимірювання площ простих многокутників. Рівновеликі та рівноскладені многокутники;
- Теорія об’ємів многогранників. Третя проблема Гільберта та її розв’язання. Рівновеликість і рівноскладенність многогранників. Теорема Бойяї-Гервіна. Теорема Дена-Кагана.

7. Впорядкованість на множині дійсних чисел

В аксіоматичній теорії, що будується на базі системи аксіом з Додатку Ґ, відношення порядку є основним, тобто його не треба означувати.

Інший варіант – за допомогою поняття перерізу множини, а саме:

Означення. Нехай $A|A' \sim \alpha, B|B' \sim \beta$. Тоді будемо говорити, що $\alpha = \beta$, якщо $A = B (A' = B')$, $\alpha < \beta$, якщо $A \subset B (A' \subset B')$, $\alpha > \beta$, якщо $A \supset B (A' \supset B')$.

Користуючись цим означенням, **доведіть такі твердження.**

Теорема. Для будь-яких дійсних α, β справедливе тільки одно із співвідношень: $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$.

Теорема. Між будь-якими двома дійсними числами існує скільки завгодно дійсних чисел.

8. Ознайомитись із доведенням незалежності аксіоми індукції системи аксіом множини натуральних чисел [14].

9. Побудувати ізоморфне відображення моделі Пуанкаре геометрії Лобачевського на евклідовій півплощині на модель геометрії Лобачевського в одиничному крузі.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

1. Користуючись системою аксіом Вейля планіметрії Евкліда довести, що:

1.1. Для будь-яких трьох точок A, B, C справедливе нерівність трикутника: $|AC| \le |AB| + |CB|$.

1.2. Точка B лежить між точками A і C, тоді і тільки тоді, коли $|AC| = |AB| + |CB|$.

1.3. Перша ознака рівності трикутників.

1.4. Друга ознака рівності трикутників.

1.5. Третя ознака рівності трикутників.

1.6. Якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі і гострому куту іншого прямокутного трикутника, то ці трикутники рівні між собою.

1.7. Якщо гіпотенуза і катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі і катету іншого прямокутного трикутника, то ці трикутники рівні.

1.8. Бісектриса кута є множина точок, рівновіддалених від сторін кута.

1.9. Кути при основі рівнобедреного трикутника рівні між собою.

1.10. Медіана рівнобедреного трикутника є його бісектрисою і висотою.

1.11. Зовнішній кут трикутника більший за кожен внутрішній, не суміжний з ним.

1.12. Середня лінія трикутника паралельна основі і дорівнює його половині.

1.13. У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут.

1.14. У трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона.

1.15. Бісектриси внутрішніх кутів трикутника перетинаються в одній точці.

2. Довести, що п'ятий постулат Евкліда еквівалентний твердженню

2.1. Існує трикутник, сума внутрішніх кутів якого дорівнює двом прямим кутам.

2.2. Існує чотирикутник з чотирма прямими кутами.

2.3. Кут, під яким з точки кола видно її діаметр, дорівнює прямому куту.

2.4. Якщо прямі a і b, які перетинаються, не перпендикулярні, то перпендикуляр, проведений у будь-якій точці прямої a, перетинає пряму b.

2.5.Перпендикуляри, проведені до середин сторін будь-якого трикутника, перетинаються в одній точці.

2.6. Біля довільного трикутника можна описати коло.

2.7. Відстань від змінної точки однієї з прямих до іншої прямої обмежена.

2.8. Перпендикуляр і похила до однієї прямої перетинаються.

2.9. Існує трикутник з сумою внутрішніх кутів, рівною двом прямим кутам.

2.10. Існує два подібні і нерівні трикутники.

2.11. Існує, принаймні, один квадрат.

2.12. Існує, принаймні, один опуклий чотирикутник з сумою внутрішніх кутів рівною чотирьом прямим кутам.

2.13. Сторона правильного шестикутника, вписаного в коло, дорівнює радіусу кола.

2.14. Три точки, рівновіддалені від цієї прямої і розташовані в одній півплощині відносно неї, належать одній прямій.

2.14. Теорема Піфагора.

2.15. Середня лінія трикутника паралельна основі і дорівнює його половині.

3. Довести справедливість тверджень в геометрії Лобачевского

3.1. Будь-які дві паралельні прямі мають вісь симетрії.

3.2. Якщо пряма U_1V_1 паралельна прямій U_2V_2, то пряма U_2V_2 паралельна прямій U_1V_1 (властивість симетричності відношення паралельності прямих на площині Лобачевского).

3.3. Якщо пряма UV лежить між паралельними прямими U_1V_1 і U_2V_2 і не перетинає жодну з них, то вона їм паралельна.

3.4. Нехай пряма U_3V_3 симетрична прямій U_1V_1 відносно прямої U_2V_2, а прямі U_1V_1 і U_2V_2 паралельні між собою. Тоді пряма U_3V_3 паралельна як прямій U_1V_1 так і прямий U_2V_2.

3.5. Якщо пряма U_1V_1 паралельна прямій U_2V_2 і пряма U_2V_2 паралельна прямій U_3V_3, причому U_1V_1 і U_3V_3 - різні прямі, то пряма U_1V_1 паралельна прямій U_3V_3 (властивість транзитивності відношення паралельності прямих на площині Лобачевского).

3.6. У прямокутному трикутнику величина хоч би одного з його гострих кутів менше $\frac{\pi}{4}$.

3.7. У прямокутному трикутнику катет, що лежить проти кута $\frac{\pi}{6}$, більше половини гіпотенузи.

3.8. Кут, під яким видно діаметр кола з будь-якої точки цього кола, не співпадаючого з кінцями діаметру, - гострий.

3.9. У рівносторонньому трикутнику пряма, на якій лежить його середня лінія, і пряма, що містить основу трикутника, розходяться.

3.10. Середня лінія трикутника менше половини його основи.

3.11. У чотирикутнику Саккері відрізок, що сполучає середини нижнього і верхнього підстав, менше бічної сторони.

3.12. У чотирикутнику Саккері кожна пара протилежних сторін належить прямим, що розходяться.

3.13. У довільному трикутнику пряма, що містить його середню лінію розходиться з прямою, що містить сторону, що не має загальних точок з цією середньою лінією;

3.14. У усіх трикутників, що мають цей кут α при вершині А, висоти ha обмежені нерівністю: $h_a < p$, де $\Pi(p) = \frac{\alpha}{2}$ – кут паралельності, що відповідає відрізку p.

3.15. Нехай $\angle ABC$ – довільний кут, менший розгорнутого. Довести, що завжди існує така пряма UV, що $UV \| BA$ і $VU \| AB$ (пряма, паралельна сторонам $\angle ABC$).

ПІДСУМКОВИЙ ТЕСТ

1. Сума внутрішніх кутів трикутника на площині Лобачевского
    a. дорівнює π ,
    b. менша π ,
    c. більша π .
2. Вектор є основним поняттям в системі аксіом
    a. Г. Вейля,
    b. А. В. Погорєлова,
    c. Д. Гільберта,
    d. А. Д. Олександрова.
3. На площині Лобачевського між собою рівні всі
    a. кола,
    b. еквідистанти,
    c. оріцикли.
4. Твердження «Через дану точку поза прямою можна провести не більше однієї прямої, що не перетинає дану» вірне в
    a. геометрії Евкліда,
    b. геометрії Лобачевского,
    c. абсолютній геометрії.
5 . Подібних трикутників не існує в
    a. геометрії Евкліда,
    b. геометрії Лобачевского,
    c. абсолютній геометрії.
6.У системі аксіом Вейля залежною є аксіома
    a. асоціативності додавання векторів,
    b. комутативності додавання векторів,
    c. комутативності скалярного добутку векторів,
    d. існування трьох лінійно незалежних векторів.
7. Відрізок є основним поняттям в системі аксіом
    a. Г. Вейля,
    b. А. В. Погорєлова,
    c. Д. Гільберта,
    d. А. Д. Олександрова.
8. В евклідовому просторі геометрія Лобачевського «в малому» реалізується на
    a. сфері,
    b. псевдосфері,
    c. гелікоїді,
    d. катеноїді.
9. Прямих, які не перетинаються, немає в
    a. геометрії Евкліда,
    b. геометрії Лобачевского,
    c. абсолютній геометрії,
    d. сферичній геометрії.

ЛІТЕРАТУРА

1. Александров А.Д. Геометрия / А.Д.Александров, С.К.Нецветаев. – М.: Наука, 1985. – 671 с.

2. Бакельман И.Я Высшая геометрия / И.Я.Бакельман. - М.: Просвещение, 1967. – 367 с.

3. Базылев В.Т. Сборник задач по геометрии / В.Т.Базылев, К.И.Дуничев, В.П.Иваницкая. - М.: Просвещение, 1980. – 238 с.

4. Беляев Е.А. Философские и методологические проблемы математики /Е.А.Беляев, В.Я.Перминов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 217 с.

5. Болибрух А.А. Проблемы Гильберта (100 лет спустя) / А.А. Болибрух. – М.: МЦНМО, 1999. – 24 с.

6. Гильберт Д. Основания геометрии / Д. Гильберт. - М.: ГИТТЛ, 1948. – 152 с.

7. Егоров И.П. Геометрия / И.П.Егоров. – М.: Просвещение, 1979. – 256 с.

8. Ефимов Н.В. Высшая геометрия / Н.В.Ефимов. – М.: Наука, 1978. –576 с.

9. Кадомцев С.Б. Геометрия Лобачевского и физика / С.Б. Кадомцев. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. — 72 с.

10. Клини С.К. Введение в метаматематику / С.К.Клини. – М.: Мир, 2008. – 480 с. / http://www.bookshop.ua/

11. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т.1 / Л.Д.Кудрявцев. – М.: Высшая школа, 1970. – 592 с.

12. Курант Р. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов / Р. Курант, Г. Роббинс, – М.: МЦНМО, 2001. – 568с.

13. Лакатос И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы / И. Лакатос. – М.: Наука, 2010. – 154 с.

14. Нечаев В.И. Числовые системы / В.И.Нечаев. – М.: Просвещение, 1975. – 199 с.

15. Прасолов В.В. Геометрия Лобачевского / В.В.Прасолов. – М.: Наука, 2004, - 88 с.

16. Перминов В.Я. Философия и основания математики / В.Я. Перминов. – Прогресс-Традиция, 2001. – 320 с. / http://www.knigka.info/2010/02/28/filosofija-i-osnovanija-matematiki.html

17. Франгулов С.А. Сборник задач по геометрии / С.А. Франгулов, П.И. Совертков, А.А. Фадеева, Т.Г. Ходот. – М.: Просвещение, 2002 – 263 с.

18. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного / Г.Е.Шилов. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

19.Lesniewicz R. Редукция аксиом линейного пространства / Вісник Харківського нац. ун-ту ім. В.Н.Каразіна. –серія «Математика, прикладна математика і механіка».- 2009.- №850. – С.78-82 / *vestnik-math.univer.kharkov.ua/Vestnik-Khnu-850-2009-lesh.pdf*

ПИТАННЯ ДО ЗАЛІКУ

1. Означення математичної структури, аксіоматичної теорії математичної структури, моделі системи аксіом.
2. Означення аксіоми, теореми, означення.
3. «Начала» Евкліда. Зміст, структура, недоліки. Проблема п’ятого постулату та історія її вирішення.
4. Огляд системи аксіом Вейля евклідової геометрії.
5. Огляд системи аксіом Гільберта евклідової геометрії.
6. Порівняння аксіоматичних теорій евклідової геометрії за Вейлем і за Гільбертом.
7. Сутність аксіоматичного методу побудови геометрії.
8. Вимога несуперечливості системи аксіом. Ідея доведення.
9. Вимога незалежності системи аксіом. Приклади доведення незалежності аксіом.
10. Вимога повноти системи аксіом. Приклади повних і неповних систем аксіом.
11. Перевірка несуперечливості аксіом I групи аксіоматики Гільберта на арифметичній моделі.
12. Перевірка несуперечливості аксіом II групи аксіоматики Гільберта на арифметичній моделі.
13. Перевірка несуперечливості аксіоми паралельності системи аксіом Гільберта на арифметичній моделі.
14. Обґрунтування теорії вимірювання відрізків за допомогою аксіом четвертої групи.
15. Поняття абсолютної геометрії. Приклади теорем абсолютної геометрії. Теорема про зовнішній кут трикутника.
16. Еквівалентність аксіоми паралельності та п’ятого постулату Евкліда. Інші еквіваленти п’ятого постулату.
17. Відкриття Лобачевського та його значення. Неевклідова геометрія.
18. Аксіоматика геометрії Лобачевського. Її несуперечливість.
19. Теорема про існування нескінченої множини прямих, які проходять через дану точку і не перетинають дану пряму на площині Лобачевського.
20. Основні факти геометрії Лобачевского (сума кутів трикутника, описане коло, четверта ознака рівності трикутників).
21. Відрізок та кут паралельності. Функція Лобачевського та її властивості.
22. Визначання паралельних прямих на площині Лобачевського.
23. Властивості паралельних прямих на площині Лобачевського.
24. Розбіжні прямі на площині Лобачевського.
25. Модель Пуанкаре геометрії Лобачевського.

Додаток А

Аксіоматика Вейля евклідового простору

Основні об'єкти: точка, вектор

1. Аксіоми додавання векторів

Основне відношення $\rho_1: \ \forall \overline{x}, \overline{y} \in V \to \overline{x} + \overline{y} \in V$

1.1. Додавання векторів комутативне.
1.2. Додавання векторів асоціативно.
1.3. Існує вектор $\overline{0} \in V$ такий, що для будь-якого $\overline{x} \in V$ виконано $\overline{x} + \overline{0} = \overline{x}$.
1.4. Для будь-якого $\overline{x} \in V$ існує вектор $\overline{x}' \in V$ такий, що $\overline{x} + \overline{x}' = \overline{0}$.

2. Аксіоми добутку вектора на число

Основне відношення $\rho_2: \ \forall \overline{x} \in V, \forall \lambda \in R \to \lambda \overline{x} \in V$

2.1. $(\forall \overline{x}, \overline{y} \in V)(\forall \lambda \in R)\, \lambda(\overline{x} + \overline{y}) = \lambda \overline{x} + \lambda \overline{y}$.
2.2. $(\forall \overline{x} \in V)(\forall \lambda, \mu \in R)\,(\lambda + \mu)\overline{x} = \lambda \overline{x} + \mu \overline{x}$.
2.3. $(\forall \overline{x} \in V)(\forall \lambda, \mu \in R)\,(\lambda \mu)\overline{x} = \lambda(\mu \overline{x})$.
2.4. $(\forall \overline{x} \in V)\, 1 \cdot \overline{x} = \overline{x}$.

3. Аксіома розмірності

3.1. Існує три лінійно незалежних векторів. Будь-які чотири вектори лінійно залежні.

$M = \{V, \rho_1, \rho_2, 1.1 - 3.1\}$ – структура тривимірного векторного простору

4. Аксіоми скалярного добутку

Основне відношення $\rho_3: \ \forall \overline{x}, \overline{y} \in V \to \overline{x}\,\overline{y} \in R$

4.1. $\forall \overline{x}, \overline{y} \in V \ \ \overline{x}\,\overline{y} = \overline{y}\,\overline{x}$.
4.2. $(\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in V)\,(\overline{x} + \overline{y})\overline{z} = \overline{x}\,\overline{z} + \overline{y}\,\overline{z}$.
4.3. $(\forall \overline{x}, \overline{y} \in V)(\forall \lambda \in R)\, \lambda(\overline{x}\,\overline{y}) = (\lambda \overline{x})\overline{y}$.
4.4. $\forall \overline{x} \in V, \ \overline{x} \neq \overline{0} \ \ \overline{x}\,\overline{x} > 0, \ \ \overline{x}\,\overline{x} = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$.

$M = \{V, \rho_1, \rho_2, \rho_3, 1.1 - 4.4\}$ – структура тривимірного векторного евклідового простору

5. Аксіоми відкладання векторів

Основне відношення : $\rho_4: \ \forall A, B \in T \to \overline{AB} \in V$

5.1. Для будь-якої точки $A \in T$ і будь-якого ненульового вектора $\overline{x} \in V$ існує єдина точка $B \in T$ така, що $\overline{AB} = \overline{x}$.
5.2. Аксіома трикутника. Для будь-яких трьох точок $A, B, C \in T$ справедлива рівність $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

$M = \{V, T, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, 1.1 - 5.2\}$- структура тривимірного точково-векторного евклідового простору

Додаток Б

Система аксіом Гильберта евклідового простору

I. Аксіоми приналежності

1.1. Для будь-яких двох різних точок існує пряма, що проходить через ці точки.

1.2. Для будь-яких двох різних точок існує не більше однієї прямої, що проходить через ці точки.

1.3. Для кожної прямої існує принаймні дві точки, які їй належать. Існує три точки, що не належать одній прямій.

1.4. Для будь-яких трьох точок, що не належать одній прямій, існує площина, що проходить через ці точки. Для кожної площини існує принаймні одна точка, що їй не належить.

1.5. Для будь-яких трьох точок, що не належать одній прямій, існує не більше однієї площини, що проходить через ці точки.

1.6. Якщо дві точки прямої належать площині, то кожна точка цієї прямої належить площини.

1.7. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони мають принаймні ще одну спільну точку.

1.8. Існує чотири точки, що не належать одній площині.

II. Аксіоми порядку

2.1. Якщо A, B, C – три точки однієї прямої і точка B лежить між точками A, C, то: а) точки A, B, C різні, б) точка B лежить між точками C, A.

2.2. Для будь-яких двох точок A, B прямої a існує точка C цієї прямої така, що точка B лежить між точками A, C.

2.3. Для трьох різних точок прямої не більше однієї з них лежить між двома іншими.

2.4. (Аксіома Паша). Нехай задано трикутник ABC і в його площині пряма a, що не проходить ні через одну з точок A, B, C. Якщо пряма a перетинає одну сторону AC трикутника, то вона перетинає також або другу сторону AB або третю сторону BC.

III. Аксіоми конгруентності

3.1. Якщо A, B - дві точки на прямій a і A' – точка на тій же прямій або на іншій прямій a', то завжди можна знайти на заданій півпрямій прямої a' з початком A' одну і тільки одну точку B' таку, що відрізок AB конгруентний відрізку $A'B'$ ($AB \equiv A'B'$). Для кожного відрізка AB має місце конгруентність $AB \equiv BA$.

3.2. Якщо $AB \equiv A''B''$, $A'B' \equiv A''B''$, то $AB \equiv A'B'$.

3.3. Нехай AB і BC – два відрізка на прямій a без спільних внутрішніх точок, і нехай $A'B'$ і $B'C'$ – два відрізка на тій же або інший прямий a', що також не мають спільних внутрішніх точок. Якщо $AB \equiv A'B'$ і $BC \equiv B'C'$, то $AC \equiv A'C'$.

3.4. Нехай дано $\angle(h,k)$ на площині α, пряма a' на цій же або іншій площині α' і одна з двох півплощин відносно прямої a'. Нехай h' - промінь прямої a', що виходить з точки O'. Тоді на площині α' існує один і тільки один промінь k' такий, що $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$ і при цьому всі внутрішні точки $\angle(h',k')$ лежать в вибраній півплощині відносно a'. Якщо $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$, то $\angle(k,h) \equiv \angle(k',h')$. Потрібно також, щоб $\angle(h,k) \equiv \angle(h,k)$ і $\angle(h,k) \equiv \angle(k,h)$.

3.5. Нехай A,B,C – три точки, що не лежать на одній прямій, і A',B',C' теж три точки, що не лежать на одній прямій. Якщо при цьому $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ і $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, тоді $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$.

IV. Аксіоми неперервності

4.1. (Аксіома Архімеда). Нехай дано два довільних відрізка AB і CD. Існує таке натуральне n, що $nCD > AB$.

4.2. (Аксіома Кантора). Нехай на прямій задано послідовність відрізків, які відповідають двом вимогам: 1) кожен наступний відрізок вкладений у попередній; 2) не існує відрізка, що належить усім відрізкам послідовності. Тоді існує точка, що належить кожному з відрізків послідовності.

V. Аксіома паралельності

Через будь-яку точку, яка не належить даній прямій, в площині, що визначається ними, можна провести не більше однієї прямої, що не перетинає дану пряму.

Додаток В

Система аксіом Погорєлова евклідового простору
Основні об'єкти: точка, пряма, площина

1. Аксіоми зв'язку:

1) Які б не були дві точки A і B, існує пряма c, що проходить через точку A і точку B.

2) Які б не були дві точки A і B, існує не більше однієї прямої, яка проходить через ці точки.

3) На кожній прямій лежать, принаймні, дві точки. Існують три точки, що не лежать на одній прямій.

4) Які б не були три точки A, B, C, існує площина α, що проходить через кожну з цих точок.. На кожній площині лежить хоча б одна точка.

5) Які б не були три точки A, B, C, що не лежать на одній прямій, існує не більше однієї площини, що проходить через кожну з цих точок.

6) Якщо дві точки A і B прямої a лежать в площині α, то пряма a лежить на площині.

7) Якщо дві площини α і β мають одну спільну точку C (точку, що лежить на кожній з цих площин), то вони мають ще принаймні одну спільну точку D.

8) Існують, принаймні, чотири точки не лежать в одній площині.

2. Аксіоми порядку:

1) Якщо $A < B$ в одному напрямку, то $B < A$ в протилежному напрямку.

2) В одному з двох напрямків $A < B$ виключає $B < A$.

3) В одному з двох напрямків, якщо $A < B$, а $B < C$, то $A < C$.

4) В одному з двох напрямків для кожної точки B найдуться точки A і C такі, що $A < B < C$.

5) Пряма a, що лежить у площині α, розбиває цю площину на дві частини (півплощини) так, що якщо X і Y – дві точки однієї півплощини, то відрізок XY не перетинається з прямою a, а якщо ж X і Y належать різним півплощинам, то відрізок XY перетинається з прямою a.

3. Аксіоми руху:

1) Кожне рух H зберігає відношення приналежності.

2) Кожний рух H зберігає відношення порядку на прямій.

3) Руху утворюють групу.

4) Якщо при русі H півпряма h, як ціле, та її початкова точка A залишаються нерухомими, то всі точки півпрямої h залишаються нерухомими.

5) Для кожної пари точок A і B існує рух H, яка переставляє їх місцями $HA = B$, $HB = A$.

6) Для кожної пари променів h і k (півпрямих), що виходять з однієї точки, існує рух H, що їх переставляє: $Hh = k$, $Hk = h$.

7) Нехай α і β – будь-які площині, a і b – прямі в цих площинах, A і B – точки на прямих a і b. Тоді існує і притому єдиний рух, що переводить точку A в B, задану півпряму прямої a, що визначається точкою A, - у задану півпряму прямій b, що визначається точкою B, задану півплощину площині α, що визначається прямою a, - у задану півплощину площині β, що визначається прямою b.

4. Аксіома неперервності:

Аксіома Дедекінда: Нехай точки прямої розбиті на два непустих класи так, що в одному із двох напрямків на прямій кожна точка першого класу передує кожній точці другого класу і обидва класу непусті. Тоді або в першому класі існує точка, наступна за всіма іншими точками першого класу, або в другому класі є точка, що передує всім іншим точкам другого класу.

5. Аксіома паралельності:

Через дану точку поза даною прямою можна провести на площині не більше однієї прямої, що не перетинає дану.

Додаток Г

Формулювання основних означень і теорем абсолютної геометрії (з книги Єфімова М.В. «Вища геометрія»)

Визначення 1. Пару точок A і B назвемо відрізком і будемо позначати $[AB]$. Точки, які лежать між A і B , назвемо внутрішніми точками цього відрізка, точки A і B – кінцями відрізка. Всі інші точки прямої AB будемо називати зовнішніми точками відрізка $[AB]$.

Теорема 4. Які б не були дві точки A і B, існує точка C, що лежить між *A і B.*

Теорема 6. Між будь-якими двома точками прямої існує нескінченна множина інших її точок.

Теорема 9. Точка O прямої a розділяє всі інші точки цієї прямої на два непустих класи так, що будь-які дві точки прямої a, що належать одному класу, лежать з одного боку від точки O, а дві точки, що належать різним класам, лежать по різні сторони від точки O.

Визначення 4. Ми говоримо, що точка O прямої a разом з деякою іншою точкою A цієї прямої визначає на ній напівпряму або промінь OA. Точки, що лежать з тієї ж сторони від точки O, що і точка A, називаються точками напівпрямої OA, точка O – початком цієї напівпрямої.

Теорема 10. Кожна пряма a розділяє точки площини, які не належать цій прямій, на два непустих класи так, що будь-які дві точки A і B, що належать одному класу, визначають відрізок, що не перетинає пряму a, а будь-які дві точки з різних класів визначають відрізок, що перетинає пряму a.

Визначення 7. Пара напівпрямих h і k, що виходять з однієї і тієї ж точки O і не належать одній прямій, називається кутом. Позначають $\angle(h,k)$ або $\angle(k,h)$. Напівпрямі називаються сторонами кута, а точка O – вершиною кута.

Визначення. Кажуть, що задано трикутник, якщо задані три точки, що не лежать на одній прямій, і три відрізка з кінцями у цих точках.

Визначення 8. Два трикутники називаються конгруентними, якщо всі їх відповідні сторони і всі відповідні кути конгруентні.

Теорема 14. (перша теорема о конгруентності трикутників). Якщо для двох трикутників ABC і $A'B'C'$ мають місце конгруентності $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ та $\angle A \equiv \angle A'$ то трикутник ABC конгруентний трикутнику $A'B'C'$.

Теорема 15. (друга теорема о конгруентності трикутників). Якщо для двох трикутників ABC і $A'B'C'$ мають місце конгруентності $AB \equiv A'B'$, $\angle A \equiv \angle A'$ та $\angle B \equiv \angle B'$ то трикутник ABC конгруентний трикутнику $A'B'C'$.

Теорема 17. Якщо в трикутнику ABC маємо $AC = CB$, то $\angle CAB \equiv \angle CBA$ та $\angle CBA \equiv \angle CAB$.

Теорема 18. (третя теорема о конгруентності трикутників). Якщо для двох трикутників ABC і $A'B'C'$ мають місце конгруентності $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ та $BC \equiv B'C'$ то трикутник ABC конгруентний трикутнику $A'B'C'$.

Визначення 9. Два кута зі спільною вершиною, спільною стороною і дві інші сторони яких складають пряму лінію, називаються суміжними. Два кута зі спільною вершиною, сторони яких попарно складають прямі лінії, називаються вертикальними кутами.

Теорема 21. Вертикальні кути конгруентні між собою.

Теорема 22. Усі прямі кути конгруентні між собою.

Визначення. Точка O називається серединою відрізка AB, якщо вона лежить на прямій AB і задовольняє умові $AO=OB$.

Теорема 23. Кожен відрізок має єдину середину. Середина відрізка є його внутрішньою точкою.

Теорема 17 bis. в рівнобедреному трикутнику медіана основи є в той же час висотою і бісектрисою кута при вершині.

Теорема 24. Кожен кут можна розділити навпіл і притому єдиним чином.

Теорема 25. З будь-якої точки можна опустити на дану пряму один і тільки один перпендикуляр.

Теорема 26. З кожної точки прямої можна відновити до цієї прямої єдиний перпендикуляр.

Визначення 10. Якщо дані два відрізка AB і CD и всередині відрізка AB існує така точка M, що $AM=CD$, то кажуть, що відрізок AB більше відрізка CD та позначають $AB>CD$.

Визначення 11. Якщо дані кути $\angle(h,k)$ і $\angle(h',k')$ та серед напівпрямих, що проходять через вершину всередині $\angle(h,k)$, існує напівпряма l така, що

$\angle(h,k)\equiv\angle(h',k')$, то кажуть, що $\angle(h,k)$ більше $\angle(h',k')$ або $\angle(h',k')$ менше $\angle(h,k)$.

Теорема 27. Для двох довільних відрізків *AB* и *CD* завжди виконується лише одне з трьох співвідношень: $AB=CD$, $AB>CD$, $AB<CD$, причому кожне з них виключає два інших.

Теорема 30. Зовнішній кут трикутника більше будь-якого внутрішнього, не суміжного з ним.

Теорема 31. В будь-якому трикутнику принаймні два кута гості.

Теорема 32. В трикутнику більша сторона лежить навпроти більшого кута, і навпаки, більший кут лежить навпроти більшої сторони.

Теорема 33. Перпендикуляр коротший за похилу.

Теорема 34. Кожна сторона трикутника менше суми двох інших сторін та більше їх різниці.

Додаток Ґ

Система аксіом множини дійсних чисел

1. Аксіоми додавання.

$\forall x, y \in R \ \rightarrow \ x + y \in R$ - основне відношення.

1.1 $\forall x, y \in R \quad x + y = y + x$.

1.2 $\forall x, y, z \in R \quad (x + y) + z = x + (y + z)$.

1.3 $\exists 0 \in R : \forall x \in R \quad x + 0 = 0 + x = x$ - існування нуля.

1.4. $\forall x \in R \ \exists (-x) \in R : x + (-x) = (-x) + x = 0$ - існування протилежного елемента.

2. Аксіоми множення.

$\forall x, y \in R \rightarrow x \cdot y$ - основне відношення.

2.1 $\exists 1 \in R : \forall x \in R \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ - існування одиниці.

2.2 $\forall x \in R \ \exists x^{-1} : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ - існування оберненого елемента.

2.3 $\forall x, y, z \in R \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

2.4 $\forall x, y \in R \quad x \cdot y = y \cdot x$.

2.5 $\forall x, y, z \in R \ \ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

3. Аксіоми порядку.

Для будь-якої пари $x, y \in R$ справедливе одне (або обидва) з висловлювань: $x \le y$ або $x \ge y$ - основне відношення.

3.1 $\forall x \in R \quad x \le x$.

3.2 Якщо $x \le y$ і $y \le x$, то $x = y$.

3.3 Якщо $x \le y$ і $y \le z$, то $x \le z$.

3.4 Якщо $x \le y$, то $x + z \le y + z, \ \ \forall z \in R$.

3.5 Якщо $0 \le x$ і $0 \le y$, то $0 \le x \cdot y$.

4. Аксіома Архімеда.

4.1 Яким би не було число $a \in R$, існує таке $n \in Z$, що $n \le a$.

5. Аксіома неперервності.

5.1. Нехай на множині R задано послідовність відрізків, які відповідають двом вимогам: 1) кожен наступний відрізок вкладений у попередній; 2) не існує відрізка, що належить усім відрізкам послідовності (система вкладених відрізків). Тоді існує точка, що належить кожному з відрізків послідовності.

Навчально-методичне видання
(українською мовою)

Стєганцева Поліна Георгіївна
Гречнєва Марина Олександрівна

ОСНОВИ МАТЕМАТИКИ

Навчально-методичний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти магістра
спеціальності «Математика»

Рецензент *І.В.Красікова*
Відповідальний за випуск *А.К. Приварников*
Коректор *М.О.Гречнєва*