ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ № 5 «Логарифмічні рівняння з параметром»

1. Розв'язати приклад:

1) За якого найбільшого значення a рівняння $\dfrac{\log_3^2 x+\log_3 \dfrac{x}{81}-2}{54x+5a}=0$ має єдиний корінь?

Розв'язання. Спочатку знайдемо ОДЗ рівняння:

$$\begin{cases} x>0, \\ \dfrac{x}{81}>0, \\ 54x+5a\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ 54x+5a\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\neq -\dfrac{5a}{54}. \end{cases}$$

Переходимо до розв'язування заданого рівняння: дріб дорівнює нулю, коли чисельник рівний нулю, а знаменник ні (враховано в ОДЗ), тому маємо:

$$\log_3^2 x+\log_3 \frac{x}{81}-2=0.$$

До другого доданку в лівій частині застосуємо властивість логарифма, а саме «логарифм частки»:

$$\log_3^2 x+\log_3 x-\log_3 81-2=0,$$

$$\log_3^2 x+\log_3 x-4-2=0,$$

$$\log_3^2 x+\log_3 x-6=0.$$

Отримали квадратне рівняння відносно $\log_3 x$, його корені знайдемо за допомогою теореми Вієта:

$$\log_3 x_1=-3 \quad \text{або} \quad \log_3 x_2=2,$$

$$x_1=3^{-3}, \qquad x_2=3^2,$$

$$x_1=\frac{1}{27}. \qquad x_2=9.$$

Згідно з умовою, потрібно знайти найбільше значення параметра a, щоб рівняння мало єдиний корінь. А це можливо лише у видку, коли або перший корінь, або другий корінь не належить ОДЗ. Оскільки вони обидва додатні, то не належати ОДЗ вони будуть лише у тому випадку, коли будуть рівними $-\dfrac{5a}{54}$. Отже,

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{27}=-\dfrac{5a}{54}, \Big| :\left(-\dfrac{5}{54}\right) \\ 9=-\dfrac{5a}{54}\Big| :\left(-\dfrac{5}{54}\right) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-\dfrac{2}{5}=-0{,}4; \\ a=-\dfrac{486}{5}=-97{,}2. \end{array}\right.$$

З двох отриманих значень a обираємо найбільше – $(-0{,}4)$.

Відповідь. $a=-0{,}4$.

2) За якого найменшого значення a рівняння $\dfrac{\sqrt{3x+4}-x+12}{\log_5(x-2a)}=0$ не має коренів?

Розв'язання. Знаходимо ОДЗ:

$$\begin{cases} 3x+4\ge 0, \\ x-2a>0, \\ \log_5(x-2a)\ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{4}{3}, \\ x>2a, \\ x-2a\ne 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{4}{3}, \\ x>2a, \\ x\ne 1+2a. \end{cases}$$

Дріб дорівнює нулю, коли чисельник рівний нулю, а знаменник ні, тому прирівнюємо чисельник заданого рівняння до нуля:

$$\sqrt{3x+4}-x+12=0,$$
$$\sqrt{3x+4}=x-12.$$

Отримали ірраціональне рівняння, яке еквівалентне наступній системі:

$$\begin{cases} x-12\ge 0, \\ 3x+4=(x-12)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 12, \\ 3x+4=x^2-24x+144 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\ge 12, \\ x^2-\overset{+27}{27}\,x+\overset{\times 140}{140}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 12, \\ \left[\begin{array}{l} x_1=20, \\ x_2=7 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x=20.$$

За умовою потрібно визначити найменше значення параметра a, за якого задане рівняння не має коренів. Отже, знайдений корінь $x=20$ не повинен належати ОДЗ, а це можливо, якщо

$$\left[\begin{array}{l} 20\le 2a, \\ 20=1+2a \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a\ge 10, \\ a=\dfrac{19}{5}=9{,}5. \end{array}\right.$$

З отриманих значень обираємо найменше: $a=9{,}5$.

Відповідь. $a=9{,}5$.

3) Знайти суму всіх цілих значень a, за кожного з яких рівняння $\dfrac{\log_3\left(x^2+3x-1\right)-2}{\sqrt{x+a}+\sqrt{10-a}}=0$ має два різні корені.

Розв'язання. Спочатку знаходимо ОДЗ: підлогарифмічний вираз додатній, підкореневі вирази невід'ємні та одночасно нерівні нулю:

$$\begin{cases} x^2+3x-1>0, \\ x+a\ge 0, \\ 10-a\ge 0, \\ (x+a)^2+(10-a)^2\ne 0 \end{cases} \left\| \begin{array}{l} x^2+3x-1=0, \\ D=9-4\cdot 1\cdot(-1)=13, \\ x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2} \end{array} \right\| \Rightarrow \begin{cases} x\in\left(-\infty;\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2};+\infty\right), \\ x\ge -a, \\ a\le 10, \\ (x+a)^2+(10-a)^2\ne 0. \end{cases}$$

Після того, як ОДЗ знайдено, переходимо до розв'язування заданого дробово-раціонального рівняння: дріб дорівнює нулю, коли чисельник рівний нулю, а знаменник ні (враховано в ОДЗ):

$$\log_3\left(x^2+3x-1\right)-2=0,$$
$$\log_3\left(x^2+3x-1\right)=2,$$
$$x^2+3x-1=3^2,$$
$$x^2+\overset{+(-3)}{3}x-\overset{\times(-10)}{10}=0,$$

$$x_1 = -5 \text{ або } x_2 = 2.$$

Знайдені корені повинні задовольняти ОДЗ:

$$\begin{cases} -5 \ge -a, \\ 2 \ge -a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \ge 5, \\ a \ge -2 \end{cases} \Rightarrow a \ge 5 \Rightarrow \bigcap \text{ОДЗ: } a \in [5;10].$$

Сума цілих значень з цього проміжку

$$5+6+7+8+9+10 = 45.$$

Відповідь. 45.

4) Знайти суму всіх цілих значень a, за кожного з яких корінь рівняння $\dfrac{\log_5(4x-2a+1)-2}{\sqrt{x^2-a^2}} = 0$ є цілим числом.

Розв'язання. ОДЗ даного рівняння:

$$\begin{cases} x^2 - a^2 > 0, \\ 4x - 2a + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - a^2 > 0, \\ x > \dfrac{2a-1}{4}. \end{cases}$$

Для розв'язування заданого рівняння прирівняємо чисельник до нуля (знаменник при цьому нерівний нулю):

$$\log_5(4x-2a+1) - 2 = 0,$$

$$\log_5(4x-2a+1) = 2,$$

$$4x - 2a + 1 = 5^2 \text{ або } 4x = 24 + 2a.$$

Звідси маємо, що

$$x = 6 + \frac{a}{2}.$$

Отримане значення x буде цілим, коли a буде цілим парним.

Знайдемо такі значення параметра a, при яких $x \in$ ОДЗ:

$$\begin{cases} \left(6+\dfrac{a}{2}\right)^2 - a^2 > 0, \\ \left|6+\dfrac{a}{2} > \dfrac{2a-1}{4}\right| \times 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36 + 6a + \dfrac{a^2}{4} - a^2 > 0, \Big| \times 4 \\ 24 + 2a > 2a - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 144 + 24a - 3a^2 > 0, \Big| : (-3) \\ 24 > -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - 8a - \overset{+8 \quad \times(-48)}{48} < 0, \\ a \in (-\infty; +\infty) \end{cases} \Rightarrow (a-12)(a+4) < 0 \Rightarrow a \in (-4;12).$$

Оскільки a повинно бути цілим парним числом з проміжку $(-4;12)$, то шукана сума

$$-2+0+2+4+6+8+10 = 28.$$

Відповідь. 28.

5) Визначити суму всіх цілих значень a, за кожного з яких добуток різних коренів рівняння $\log_3(|x-2|+2a-11)-2=0$ є більшим за – 40.

Розв'язання. Знаходимо ОДЗ: Підлогарифмічний вираз додатній:

$$|x-2|+2a-11 > 0 \text{ або } |x-2| > 11-2a.$$

Зведемо задане рівняння до найпростішого та розв'яжемо його:

$$\log_3(|x-2|+2a-11) = 2,$$

$$|x-2|+2a-11 = 3^2,$$

$$|x-2| = 20-2a;$$

$$\bigcap \text{ОДЗ: } 20-2a > 11-2a,$$

$$20>11.$$

Остання нерівність виконується для будь-якого дійсного значення a.

У результаті прийшли до рівняння з модулем, кількість коренів якого залежить від знаку правої частини:

$20-2a>0$	або	$20-2a=0$	або	$20-2a<0$
$\Downarrow$		$\Downarrow$		$\Downarrow$
$a<10$		$\begin{cases} a=10, \\ x-2=0 \end{cases}$		коренів немає
$x-2=20-2a$ або $x-2=2a-20$		$\Downarrow$		$\Downarrow$
$x_1=22-2a$ $\quad$ $x_2=2a-18$		$\begin{cases} a=10, \\ x=2. \end{cases}$		не задовольняє умову
два корені, задовольняють умову		$\Downarrow$		
		один корінь, не задовольняє умову		

Добуток знайдених коренів повинен бути більшим за – 40, тобто маємо нерівність

$(22-2a)(2a-18)>-40$ при умові, що $a<10$;

$$44a-396-4a^2+36a+40>0,$$

$$-4a^2+80a-356>0, \Big| :(-4)$$

$$a^2-20a+89<0,$$

$$D=20^2-4\cdot 89=400-356=44,$$

$$\sqrt{D}=2\sqrt{11},$$

$$\begin{cases} a\in\left(10-\sqrt{11};10+\sqrt{11}\right), \\ a<10 \end{cases} \Rightarrow a\in\left(10-\sqrt{11};10\right).$$

Сума всіх цілих значень a з отриманого проміжку

$$7+8+9=24.$$

Відповідь. 24.

6) Визначити кількість усіх цілих значень a, за кожного з яких рівняння $\sqrt{2x-a}[\log_3(x-4)-2]=0$ має два різні корені.

Розв'язання. ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x-a\geq 0, \\ x-4>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq \dfrac{a}{2}, \\ x>4. \end{cases}$$

Переходимо до розв'язання заданого рівняння: добуток дорівнює нулю, коли хоча б один із співмножників дорівнює нулю. Отже, рівняння розпадається на два:

$\sqrt{2x-a}=0,$	або	$\log_3(x-4)-2=0,$
$2x-a=0,$		$\log_3(x-4)=2,$
$x_1=\dfrac{a}{2}.$		$x-4=9$ або $x_{12}=13.$

Рівняння буде мати два різні корені, якщо вони обидва будуть належать ОДЗ і не будуть рівні один одному, тобто якщо буде мати місце система:

$$\begin{cases} \frac{a}{2} \ge \frac{a}{2}, \\ \frac{a}{2} > 4, \\ \frac{a}{2} \ne 13, \\ 13 \ge \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 8, \\ a \ne 26, \\ a \le 26 \end{cases} \Rightarrow a \in (8; 26).$$

Тобто нам потрібно знайти кількість цілих чисел з проміжку $(8; 25)$. Всі вони утворюють арифметичну прогресію, для якої $a_1 = 9, a_n = 25, d = 1$. Тоді шукана кількість

$$k = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{25-9}{1} + 1 = 17.$$

Відповідь. 17 штук.

7) Визначити найменше ціле значення a, для якого рівняння $\frac{x + a + \sqrt{x+a} - 12}{2 + \lg^2\left(2x - a^2\right)} = 0$ має корені.

Розв'язання. Знаходимо ОДЗ:

$$\begin{cases} x + a \ge 0, \\ 2x - a^2 > 0, \\ \underbrace{2 + \lg^2\left(2x - a^2\right)}_{\ge 2 > 0} \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -a, \\ x > \frac{a^2}{2}. \end{cases}$$

Для розв'язування заданого рівняння використаємо правило, що дріб дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли чисельник рівний нулю, а знаменник ні (останнє враховано в ОДЗ):

$$x + a + \sqrt{x+a} - 12 = 0.$$

Отримали квадратне рівняння відносно $\sqrt{x+a}$, корені якого знайдемо за допомогою теореми Вієта:

$$\sqrt{x+a}^2 + \overset{+(-1)}{\sqrt{x+a}} - \overset{\times(-12)}{12} = 0,$$

$$\sqrt{x+a} = 3 \quad \text{або} \quad \sqrt{x+a} = -4$$

$$x + a = 9, \qquad \varnothing$$

$$x = 9 - a.$$

Дане значення x буде коренем, якщо воно буде належати ОДЗ:

$$\begin{cases} 9 - a \ge -a, \\ 9 - a > \frac{a^2}{2} \end{cases} \times 2 \Rightarrow \begin{cases} 9 \ge 0, \\ 18 - 2a > a^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + 2a - 18 < 0,$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18) = 4 \cdot 19,$$

$$\sqrt{D} = 2\sqrt{19},$$

$$a_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{19}}{2 \cdot 1} = -1 \pm \sqrt{19}.$$

Отже, $a \in \left(-1-\sqrt{19}; -1+\sqrt{19}\right)$. Найменше ціле значення a, що належить цьому проміжку – $a = -5$.

Відповідь. $a = -5$.

8) Визначити найменше ціле значення a, за якого рівняння $\dfrac{\log_9(2x-4a+3)-2}{\sqrt{a^2-x^2}} = 0$ має корінь.

9) Знайти значення a, за якого рівняння $\dfrac{\sqrt{x^2-10x}-\sqrt{36-5x}}{x-2\log_2 a} = 0$ не має коренів.

10) Визначити кількість усіх цілих значень a з проміжку $[-11;11]$, за кожного з яких рівняння $\sqrt{2x-a+4}(\log_2 x-2) = 0$ має два різних кореня.

11) Знайти суму всіх цілих значень a з проміжку $[-7;5]$, за кожного з яких рівняння $\dfrac{\sqrt{5x+2a}-3}{\lg x} = 0$ має корені.

12) Визначити кількість усіх від'ємних цілих значень a, за кожного з яких рівняння $\left(\sqrt{4x-2a-4}-3\right)\left(\lg^2 x+1\right) = 0$ має корінь.

Розв'язання. Знаходимо ОДЗ:

$$\begin{cases} 4x-2a-4 \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{a}{2}+1, \\ x > 0. \end{cases}$$

При розв'язуванні рівняння враховуємо той факт, що добуток дорівнює нулю, коли хоча б один із співмножників дорівнює нулю. Тобто задане рівняння розпадається на два:

$$\sqrt{4x-2a-4}-3=0, \quad \text{або} \quad \underbrace{\lg^2 x}_{\geq 0} + \underbrace{1}_{\geq 1} = 0, \quad \geq 1 > 0$$

$$\sqrt{4x-2a-4}=3, \qquad x \in \varnothing.$$

$$4x-2a-4=9,$$

$$4x=2a+13,$$

$$x=\frac{a}{2}+\frac{13}{4}.$$

Рівняння має корінь $x=\dfrac{a}{2}+\dfrac{13}{4}$, якщо він належить ОДЗ, тобто виконуються умови

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2}+\dfrac{13}{4} \geq \dfrac{a}{2}+1, \\ \dfrac{a}{2}+\dfrac{13}{4} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{13}{4} \geq 1, \\ \dfrac{a}{2} > -\dfrac{13}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in R, \\ a > -\dfrac{13}{2} \end{cases} \Rightarrow a \in (-6{,}5; +\infty).$$

Кількість цілих від'ємних значень a з цього проміжку дорівнює

$$k = \frac{-1-(-6)}{1}+1 = 6.$$

Відповідь. 6 штук.

13) Визначити кількість усіх цілих значень a на проміжку $[-8;8]$, за кожного з яких рівняння $\left(\ln^2 x+2\right)\left(\sqrt{2x-3a+2}-5\right) = 0$ має корінь.

14) Визначити кількість усіх додатних цілих значень a, за кожного з яких рівняння

$(3x-a-2)\log_2(2x-a+1)=0$ має два різні корені.

15) Знайти найменше значення a, за якого рівняння $\dfrac{x^2+(a-2)x-2a}{\log_2 x-3}=0$ має один корінь.

16) Визначити суму всіх цілих значень a, за кожного з яких рівняння $\lg(2ax+5-a)=\lg(4x)$ не має коренів.

Розв'язання. Спочатку знаходимо ОДЗ:

$$\begin{cases}2ax+5-a>0,\\4x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2ax>a-5,\\x>0.\end{cases}$$

Переходимо до розв'язування заданого логарифмічного рівняння: рівні логарифми, тоді рівні й під логарифмічні функції. Тобто приходимо до рівняння

$$2ax+5-a=4x,$$
$$2ax-4x=a-5,$$
$$2(a-2)x=a-5,$$
$$(a-2)x=\frac{a-5}{2}.$$

Розглянемо два випадки щодо старшого коефіцієнта останнього рівняння:

$a-2\neq 0\Rightarrow a\neq 2$ $\Downarrow$ $x_1=\dfrac{a-5}{2(a-2)}$ або $a-2=0\Rightarrow a=2$ $\Downarrow$ $0\cdot x=-\dfrac{3}{2}$ $\Downarrow$ $x\in\varnothing$, a задовольняє умову

Вихідне рівняння не буде мати коренів, якщо значення x_1 не буде належати ОДЗ, тобто якщо

$$\begin{cases}2a\cdot\dfrac{a-5}{2(a-2)}\le a-5,\\\dfrac{a-5}{2(a-2)}\le 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a(a-5)}{a-2}-(a-5)\le 0,\\\dfrac{a-5}{a-2}\le 0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{(a-5)(a-a+2)}{2(a-2)}\le 0,\\a\in(2;5]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2(a-5)}{2(a-2)}\le 0,\\a\in(2;5]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\in(2;5],\\a\in(2;5]\end{cases}\Rightarrow a\in(2;5].$$

Тоді сума всіх цілих значень a, при яких задане рівняння не має коренів, дорівнює

$$2+3+4+5=14.$$

Відповідь. 14.

17) Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння $\lg^2\left(1+x^2\right)+(3a-2)\lg\left(1+x^2\right)+a^2=0$ не має коренів.

Розв'язання. ОДЗ: $1+x^2>0\Rightarrow x\in R$.

Задане рівняння є квадратним відносно $\lg\left(1+x^2\right)$. Воно не буде мати розв'язки, якщо його дискримінант буде від'ємним:

$$D=(3a-2)^2-4\cdot 1\cdot a^2=(3a-2)^2-4a^2=$$

$$= (3a-2-2a)(3a-2+2a) = (a-2)(5a-2) = 5(a-2)\left(a-\frac{2}{5}\right) < 0.$$

Отже, $a \in \left(\frac{2}{5}; 2\right)$ або $a \in (0{,}4; 2)$.

Відповідь. $a \in (0{,}4; 2)$.