Лекція 6

Аргументація. Доведення

Знати основи логіки важливо, тому що її роль у науці й науковому мисленні була вагомою протягом всього історичного періоду (починаючи зі стародавніх часів), а у XX столітті роль математичної логіки стала колоссальною для створення комп'ютерів та програмного забезпечення до них.

Знайомство з логікою, вміння застосовувати її закони забезпечує ясність думки, здатність цілеспрямовано організувати мислительний процес. Ясність думки забезпечує ясність її донесення, викладення. Це ***дуже важливо для тих,хто вивчає математики, але ще важливіше для тих, хто навчає математики.***

У шкільному курсі математична логіка не вивчається окремо, але її поняття та закони так чи інакше виникають в процесі навчання. Особливо у профільній школі є можливості реалізовувати різні форми й способи мислення. Слід заохочувати здобувачів освіти до усвідомлення структури математичної теорії, сутності фундаментальних понять – аксіом, теорем, доведень. Особливої уваги потребує аксіоматична побудова курсу геометрії. Вчитель математики буде озброєним, якщо досягне повного розуміння логічної структури кожного шкільного математичного курсу. Такий вчитель зможе сформувати уявлення про природу наукового знання, про принципи побудови математичних теорій, про наукову картину світу, про роль математики у розвитку цивілізацій, зможе забезпечити формування алгоритмічного мислення, важливість якого пояснюється сучасною комп'ютерізацією.

Система методичних поглядів учителя математики повинна базуватись на тому, що математика – строга наука, й гарантом строгості є міркування, засновані на законах логіки. Іноді в педагогічній діяльності вчителя й навіть у підручниках математики допускаються «послаблення» строгості в інтересах доступності викладення, необхідності враховувати вікові особливості учнів. Важливо, щоб учитель був здатний «бачити» порушення

строгості й причини цього порушення. Саме озброєний знаннями з логіки вчитель здатний до цього.

Усвідомлення структури математичної теореми забезпечує розуміння й обґрунтування методів її доведення. Доведення має таку загальну структуру: теза, аргументи (основа), демонстрація (рис. 1).

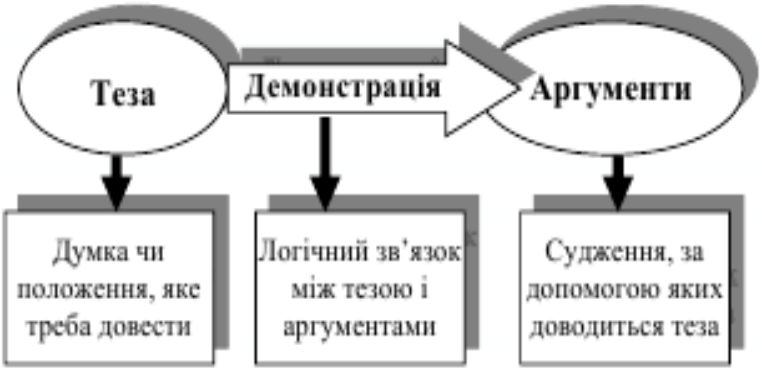


Рис. 1. Загальна структура доведення

Тезою називається твердження (думка, положення), яке потрібно довести. Як правило, теза має чітку й коротку форму викладу.

Аргументи являють собою судження (доводи, підстави), за допомогою яких доводиться теза. Необхідною умовою є істинність кожного аргументу, але слід зауважити, що цього недостатньо.

Демонстрація є формою логічного зв'язку між аргументами й тезою. Вона являє собою логічну послідовність умовиводів, ланцюжок взаємообумовлених міркувань, який дозволяє довести істинність висунутої тези.

Прямим називають доведення, в якому істинність тези обґрунтовується шляхом побудови логічної послідовності тверджень, починаючи безпосередньо з аргументів. Доведення, в якому істинність тези обґрунтовується за допомогою спростування істинності суперечного положення, називається ***непрямим доведенням***. Непряме доведення можна охарактеризувати й по-іншому: істинність висунутої тези обґрунтовується за допомогою доведення хибності антитези.

Отже, в непрямому доведенні ми припускаємо істинність судження, що суперечить тезі, а потім виводимо всі наслідки. Якщо ці наслідки будуть суперечити судженню, прийнятому нами за істинне, то ми повинні визнати, що антитеза, з якої ми вивели наслідок, є хибною. Однак, якщо ми зафіксували хибність антитези, то з цього цілком природно випливає, що теза є істинною, що і треба було довести.

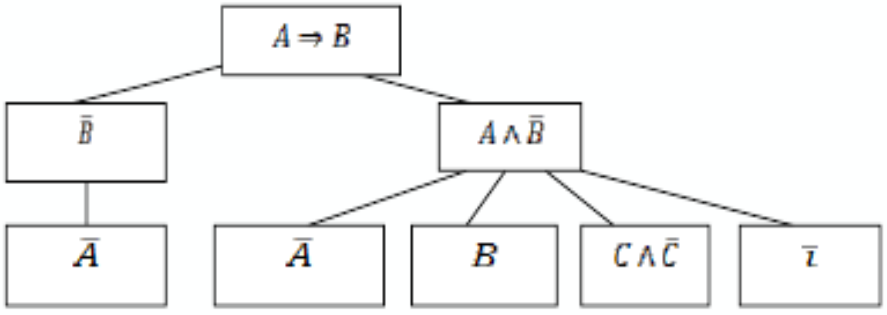
Необхідною умовою вміння доводити твердження є усвідомлення суті й логічної структури методів доведень. Одним із непрямих доведень є ***метод доведення від супротивного***.

Метод доведення від супротивного розробив видатний давньогрецький математик Евдокс Кнідський. Першим відомим в історії математики доведенням від супротивного вважається доведення піфагорійцями несумірності сторони й діагоналі квадрата. В основі доведення методом від супротивного лежить закон виключеного третього ($A \vee \bar{A}$). Наприклад: «число ділиться на п'ять або число не ділиться на п'ять»; «задане рівняння квадратне або задане рівняння не квадратне»; «задана система рівнянь сумісна або не сумісна». Тут виключено існування будь-якої третьої непорожньої множини об'єктів, які би не увійшли ні в першу, ні в другу групу. Логічним обґрунтуванням виступають властивості суперечливих тверджень: 1) Два суперечливих твердження не можуть бути одночасно істинними; 2) Два суперечливих твердження не можуть бути одночасно хибними; 3) Із двох суперечливих тверджень завжди одне істинне, а друге хибне. З точки зору математичної логіки доведення теореми $A \Rightarrow B$ методом від супротивного полягає в доведені істинності однієї з таких п'яти імплікацій:

1) $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$; 2) $A \wedge \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$; 3) $A \wedge \bar{B} \Rightarrow B$; 4) $A \wedge \bar{B} \Rightarrow C \wedge \bar{C}$ (C - довільне висловлювання); 5) $A \wedge \bar{B} \Rightarrow \bar{\imath}$ ($\imath$ – деяке істинне висловлювання).

Кожна з наведених імплікацій рівносильна імплікації $A \Rightarrow B$, що легко обґрунтувати, побудувавши таблиці істинності.

Наступний рисунок дає візуальне уявлення про п'ять можливих схем доведення від супротивного. Коренем цього дерева є імплікація, що доводиться. На першому рівні розташовані умови теорем, які треба доводити замість запропонованої, а на другому рівні – висновки цих теорем.



Розглянемо ***приклади*** доведень теорем за кожною із наведених схем.

1) Замість теореми $A \Rightarrow B$ доводимо теорему $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$. З рівносильності теорем $A \Rightarrow B$ та $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ випливає, що доведення теореми $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ означає доведення теореми $A \Rightarrow B$.

Теорема. Якщо рядки визначника $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ пропорційні (А), то цей визначник дорівнює нулю (В).

Доведення. Припускаємо, що визначник $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ не дорівнює нулю ($\bar{B}$). Тоді $ad - bc \neq 0$, або $ad \neq bc$. Якщо жодний з елементів другого рядка визначника не дорівнює нулю, то з останньої нерівності випливає, що $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$. Отже, рядки визначника не пропорційні ($\bar{A}$).

Цю саму схему можна застосувати до доведення теореми «Якщо дріб $\frac{a}{b}$ менший за одиницю і є нескоротним, то дріб, який доповнює його до одиниці, також нескоротний».

2) $A \wedge \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$. Суть цього виду доведення методом від супротивного теореми $A \Rightarrow B$ полягає в тому, що ми заперечуємо її висновок, в процесі доведення користуємось умовою А й приходимо до заперечення умови A. Новою умовою буде кон'юкція двох висловлювань - A та $\bar{B}$. Фактично замість теореми $A \Rightarrow B$ ми доводимо теорему: $A \wedge \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$, рівносильну заданій.

Теорема. При $a > 1$ логарифмічна функція $y = \log_a x$ монотонно зростає.

Доведення. Нехай задано логарифмічну функцію $y = \log_a x$ з основою $a > 1$ й $x_2 > x_1 > 0$ (А). Доведемо, що $\log_a x_2 > \log_a x_1$ (B).

Припустимо, що при $x_2 > x_1$ $\log_a x_2 \leq \log_a x_1$, тобто, що логарифмічна функція не є монотонно зростаючою ($\bar{B}$). Раніше було доведено, що при $a > 1$ показникова функція $y = a^x$ монотонно зростає. Тому з умови $\log_a x_2 \leq \log_a x_1$ випливає, що $a^{\log_a x_2} \leq a^{\log_a x_1}$. Але $a^{\log_a x_2} = x_2$, $a^{\log_a x_1} = x_1$. Отже, $x_2 \leq x_1$, що суперечить умові $x_2 > x_1$.

За цією ж схемою можна довести теорему «Сума раціонального й ірраціонального чисел є ірраціональним числом».

3) $A \wedge \bar{B} \Rightarrow B$. У цьому випадку замість теореми $A \Rightarrow B$ доводимо теорему $A \wedge \bar{B} \Rightarrow B$.

Теорема. Якщо $0 < a \leq a^m$ для кожного додатного числа $m < 1$, то $a \leq 1$ $(A \Rightarrow B)$.

Доведення. Припускаємо, що $a > 1$ і виходимо з умови, яка є кон'юкцією таких висловлювань $0 < a \leq a^m (0 < m < 1)$ (A) та $a > 1$ (B). Тоді $a \leq a^{\frac{1}{a}}$; $\log_{10} a \leq \log_{10} a^{\frac{1}{a}}$ або $\log_{10} a \leq \frac{1}{a} \log_{10} a$; $1 \leq \frac{1}{a}$. Звідси $a \leq 1$ (B), що й треба було довести.

В цьому випадку ми замість заданої теореми $A \Rightarrow B$ доводимо теорему «Якщо $0 < a \leq a^m (0 < m < 1)$ й $a > 1$, то $a \leq 1$» $(A \wedge \bar{B} \Rightarrow B)$.

4) $A \wedge \bar{B} \Rightarrow C \wedge \bar{C}$. Суть цього варіанта доведення методом від супротивного полягає в тому, що, виходячи з умови $A \wedge \bar{B}$, ми в процесі доведення приходимо до кон'юкції двох суперечливих висловлювань C та $\bar{C}$. Ця кон'юкція $C \wedge \bar{C}$ завжди хибна, оскільки два суперечливих твердження не можуть бути одночасно істинними. Хибність наслідку $C \wedge \bar{C}$ зумовлена хибністю умови $A \wedge \bar{B}$. В свою чергу, хибність $A \wedge \bar{B}$ означає істинність $A \Rightarrow B$.

Теорема. Кожне додатне число *a* має рівно один додатний корінь степеня *n* (вважаємо, що існування додатного кореня *n-го* степеня для будь-якого додатного числа *a* доведено).

Доведення. Припускаємо, що існує кілька різних додатних коренів *n-го* степеня з додатного числа *a*. Нехай β та γ - два таких корені, причому $\beta \neq \gamma$. Тоді з означення арифметичного кореня матимемо $\beta^n = a, \gamma^n = a$. Звідси $\beta^n = \gamma^n$. З іншого боку, оскільки $\beta > \gamma$ або $\beta < \gamma$, то повинно бути $\beta^n > \gamma^n$ або $\beta^n < \gamma^n$.

Таким чином, виходячи з умови, що «додатне число *a* має кілька різних додатних коренів степеня *n*», приходимо до кон'юнкції двох суперечливих тверджень

$\beta^n = \gamma^n$ (C);

$\beta^n > \gamma^n$ або $\beta^n < \gamma^n$ $(\bar{C})$.

5) $A \wedge \bar{B} \Rightarrow \bar{i}$. Суть цього варіанта доведення методом від супротивного полягає в тому, що, виходячи з умови $A \wedge \bar{B}$, ми оримуємо висновок $\bar{i}$, несумісний з деяким твердженням *i*, істинність якого встановлена. Тут замість теореми $A \Rightarrow B$ доводимо теорему $A \wedge \bar{B} \Rightarrow \bar{i}$. Як і в попередньому випадку, з умови $A \wedge \bar{B}$ випливає хибне твердження $\bar{i}$. А це означає, що кон'юкція $A \wedge \bar{B}$ - хибна, а тому істинна імплікація $A \Rightarrow B$.

На завершення пропонуємо застосування всіх ***п'яти схем*** для доведення теореми

«Будь-який вектор двовимірного векторного простору має єдиний набір координат відносно заданого базису».

Для переходу від категоричної до імплікативної форми формулювання теореми уведемо такі позначення: $\boldsymbol{A}$ - «числа α, β є координатами вектора $\bar{x}$ відносно заданого базиса $\{\bar{a}, \bar{b}\}$, $\boldsymbol{B}$ - «набір α, β визначається однозначно».

А) З умови $\boldsymbol{A}$ маємо рівність $\bar{x} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$. Побудуємо твердження $\overline{\boldsymbol{B}}$: « $\exists\, \alpha_1 \neq \alpha \vee \beta_1 \neq \beta$ такі, що $\bar{x} = \alpha_1\bar{a} + \beta_1\bar{b}$. Отримали рівність $\bar{x} = \alpha_1\bar{a} + \beta_1\bar{b} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$, з якої випливає $(\alpha - \alpha_1)\bar{a} + (\beta - \beta_1)\bar{b} = \bar{0}$. З лінійної незалежності базисних векторів випливає $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, тобто твердження $\boldsymbol{B}$. Отже, в доведенні реалізована схема $\boldsymbol{A} \wedge \overline{\boldsymbol{B}} \Rightarrow \boldsymbol{B}$.

Б) Розглянемо твердження $\overline{\boldsymbol{B}}$, з якого знову отримаємо $(\alpha - \alpha_1)\bar{a} + (\beta - \beta_1)\bar{b} = \bar{0}$. З цієї рівності $\bar{a} = -\frac{\beta - \beta_1}{\alpha - \alpha_1}\bar{b}$, тобто вектори $\bar{a}, \bar{b}$ не утворюють базис ($\overline{\boldsymbol{A}}$). Реалізовано схему $\overline{\boldsymbol{B}} \Rightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$.

В) Умова $\boldsymbol{A} \wedge \overline{\boldsymbol{B}}$ означає, що відносно базиса $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ можна отримати рівність $(\alpha - \alpha_1)\bar{a} + (\beta - \beta_1)\bar{b} = \bar{0}$, причому $\alpha - \alpha_1 \neq 0 \vee \beta - \beta_1 \neq 0$, але звідси випливає лінійна залежність векторів $\bar{a}, \bar{b}$ - ($\overline{\boldsymbol{A}}$). Робимо висновок про реалізацію схеми $\boldsymbol{A} \wedge \overline{\boldsymbol{B}} \Rightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$.

Г) Умова $\boldsymbol{A} \wedge \overline{\boldsymbol{B}}$ означає, що відносно базиса $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ можна отримати рівність $(\alpha - \alpha_1)\bar{a} + (\beta - \beta_1)\bar{b} = \bar{0}$, причому $\alpha - \alpha_1 \neq 0 \vee \beta - \beta_1 \neq 0$, тобто існує нетривіальна лінійна комбінація базисних векторів, рівна $\bar{0}$ ($\overline{\boldsymbol{C}}$). З іншого боку, будь-яка нетривіальна лінійна комбінація базисних векторів не дорівнює нульовому вектору ($\boldsymbol{C}$). Реалізовано схему $A \wedge \overline{B} \Rightarrow C \wedge \overline{C}$.

Д) З умови $\boldsymbol{A} \wedge \overline{\boldsymbol{B}}$ маємо, що відносно базиса $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ можна отримати рівність $(\alpha - \alpha_1)\bar{a} + (\beta - \beta_1)\bar{b} = \bar{0}$, причому $\alpha - \alpha_1 \neq 0 \vee \beta - \beta_1 \neq 0$. З цієї рівності $\bar{a} = -\frac{\beta - \beta_1}{\alpha - \alpha_1}\bar{b}$, що говорить про існування колінеарних базисних векторів ($\bar{i}$). Це є запереченням істинного висловлювання «будь-які колінеарні вектори лінійно залежні». Отже, схема міркувань має вигляд $A \wedge \overline{B} \Rightarrow \bar{i}$.

Означення. Нехай дано теорему $A \Rightarrow B$. Будемо називати її *прямою теоремою*. Теорема $B \Rightarrow A$ називається *оберненою* до даної теореми, теорема $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ – *протилежною*, теорема $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ – *оберненою до протилежної* (або *протилежною до оберненої*).

Шкільний курс математики передбачає знайомство з усіма цими видами теорем, хоча аналіз підручників показує, що відсоток обернених теорем є незначним у порівнянні з прямими теоремами. Навчання (по можливості, одночасне) прямих та обернений дій, зокрема, прямих і обернених теорем, є бедумовною і обгрунтованою дидактичною необхідністю.

Отже, подолання вказаного недоліку цілком покладається на вчителя. У наступному завданні не всі наведенні теореми розглядаються в шкільному курсі, доведення обернених до деяких з них є складною задачею, але це не означає, що їх не треба пропонувати учням.

Завдання. Для заданих теорем сформюлювати обернені й з'ясувати, чи є вони вірними:

1.Добуток двох парних чисел є парним числом.

2.Сума всіх внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180 градусів.

3.Паралельні прямі, які перетинають сторони заданого кута, відтинають на кожній стороні пропорційні відрізки.

4.У рівнобедреному трикутнику висоти, проведені до бічних сторін, рівні між собою.

5.У рівнобедреному трикутнику бісектриси, проведені до бічних сторін, рівні між собою.

6.Якщо у трапеції провести діагоналі, то прилеглі до бічних сторін трикутники рівновеликі.

Ще один важливий аспект формалізації теорем та їх доведень мовою математичної логіки пов'язаний з поняттями необхідних та достатніх умов. Досвід викладання свідчить про значні пробіли в цих питаннях.

Означення.

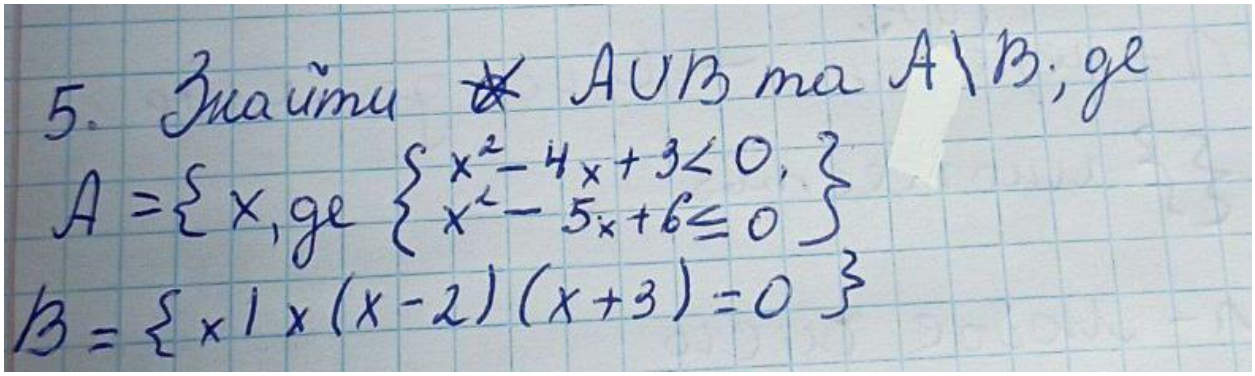
Якщо має місце теорема $A \Rightarrow B$, то умова B називається *необхідною* для A, а умова A *достатньою* для B. Якщо ж поряд з теоремою $A \Rightarrow B$ має місце і обернена теорема $B \Rightarrow A$, то кожна з умов A та B буде одночасно *необхідною і достатньою* для іншої. У цьому випадку пишуть $A \Leftrightarrow B$ і називають теорему критерієм або ознакою та при її формулюванні використовують зв'язку «необхідно і достатньо» або «тоді і тільки тоді», або «якщо і тільки якщо».

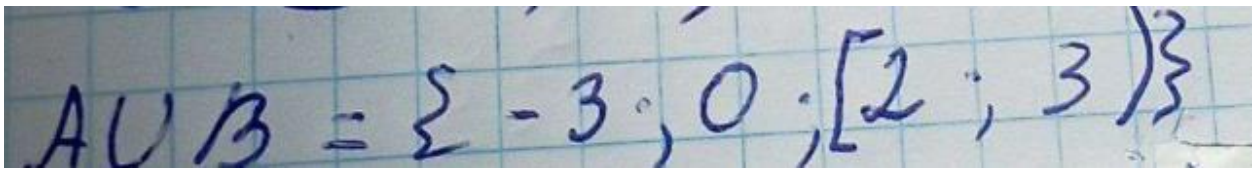
Розглянемо декілька логічних варіантів формулювання теореми «Сума внутрішніх кутів опуклого n-кутника дорівнює $180°(n-2)$»:

1. У вигляді імплікації $A \Rightarrow B$: «Якщо n-кутник опуклий (A), то сума його кутів дорівнює $180°(n-2)$ (B)»;
2. У вигляді контрапозиції $\overline{B} \to \overline{A}$: «Якщо сума кутів у n-кутнику не дорівнює $180°(n-2)$, то він не опуклий»;
3. У вигляді достатньої умови $A \Rightarrow B$: «Достатньо, щоб n-кутник був опуклим, щоб сума його кутів дорівнювала $180°(n-2)$»;
4. У вигляді необхідної умови $B \Rightarrow A$: «Властивість суми кутів n-кутника дорівнювати $180°(n-2)$ є необхідною умовою того, щоб він був опуклим»;

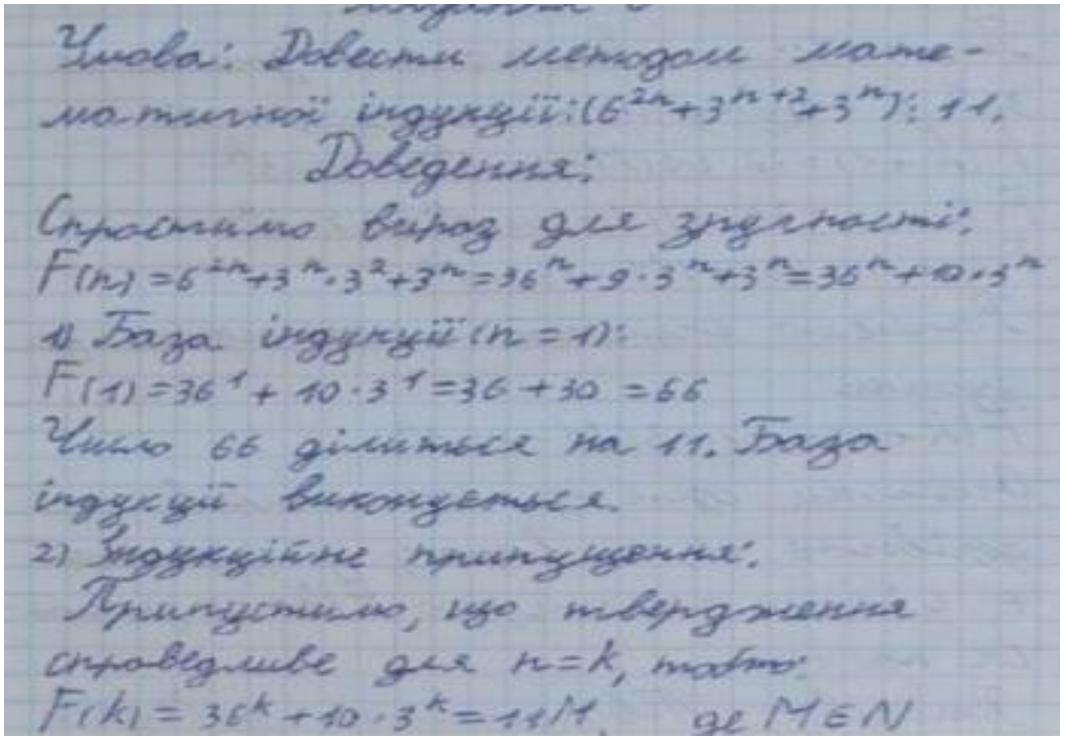
5. У вигляді еквівалентності (необхідна і достатня умова) $A \Leftrightarrow B$: «Для того, щоб n-кутник був опуклим, необхідно й достатньо, щоб сума його кутів дорівнювала $180°(n-2)$».

Питання. Чи коректно оформлена відповідь?





Проаналізуйте! Використання індуктивного припущення.


Умова: Довести методом математичної індукції: $(6^{2n}+3^{n+2}+3^n) : 11$.

Доведення:

Спростимо вираз для зручності:

$F(n) = 6^{2n}+3^n \cdot 3^2+3^n = 36^n+9 \cdot 3^n+3^n = 36^n+10 \cdot 3^n$

1) База індукції ($n = 1$):

$F(1) = 36^1 + 10 \cdot 3^1 = 36 + 30 = 66$

Число 66 ділиться на 11. База індукції виконується.

2) Індукційне припущення:

Припустимо, що твердження справедливе для $n = k$, тобто:

$F(k) = 36^k + 10 \cdot 3^k = 11A$, де $A \in N$

$36^k = 11M - 10 \cdot 3^k$

3) Індуктивний крок ($n = k+1$):

Доведемо, що вираз $F(k+1)$ також ділиться на 11:

$F(k+1) = 36^{k+1} + 10 \cdot 3^{k+1} = 36 \cdot 36^k + 10 \cdot 3 \cdot 3^k =$

$= 36 \cdot 36^k + 30 \cdot 3^k$

Підставимо вираження значення 36^k з індуктивного припущення:

$F(k+1) = 36 \cdot (11M - 10 \cdot 3^k) + 30 \cdot 3^k$

$F(k+1) = 36 \cdot 11M - 360 \cdot 3^k + 30 \cdot 3^k$

$F(k+1) = 36 \cdot 11M - 330 \cdot 3^k$

Винесемо спільний множник 11 за дужки:

$F(k+1) = 11 \cdot (36M - 30 \cdot 3^k)$

Оскільки один із множників дорівнює 11, а вираз в дужках є цілим числом, то $F(k+1)$ ділиться на 11.

Висновок: Твердження доведено