

**Державний вищий навчальний заклад
«Запорізький національний університет»
Міністерства освіти і науки України**

**Методичні матеріали
для забезпечення самостійної роботи студентів**

за спеціальним курсом

**«МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
ПОЗИТИВНИХ СИСТЕМ»**

**для магістрів
спеціальності 8.04030101 – прикладна математика**

Запоріжжя

Тема 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ КУРСУ

Питання для самостійного вивчення

1. Загальне поняття САУ. Класифікація САУ.
2. Принцип суперпозиції.
3. Поняття ланки САУ.
4. Типові впливи.

1.1. Загальне поняття САУ. Класифікація САУ.



Мал.1. Повітряне судно як САУ.

Ми можемо розглянути деякий об'єкт управління (наприклад, повітряне судно) як динамічну систему управління, яке має наступні сигнали:

- вхідні:

- положення руля напрямку;
- потужність двигуна;
- швидкість повітря;

- вихідні:

- положення судна;
- швидкість судна;
- напрям руху;
- рух судна (канали крену, тангажу, никання - рискання).

Класифікація САУ

Згідно з принципом побудови:

- САУ за відхиленням (система управління з замкненим циклом, яка вимірює відхилення вихідної величини від встановленого значення – система зі зворотним зв'язком);
- САУ за збуренням (яка вимірює і компенсує збурення – система управління з розімкненим циклом);
- комбіновані САУ (які водночас використовують обидва принципи).

Згідно з видом керуючого впливу:

- системи автоматичної стабілізації (які призначені для підтримки вихідної величини на постійному встановленому рівні);

- системи програмного управління (які призначені для зміни регульованої величини згідно з заданою програмою);
- системи, що слідкують (які призначені для відтворення будь-якого наперед невідомого закону зміни вхідного сигналу, що керує);

Згідно з видом диференційних рівнянь:

- лінійні системи з постійними параметрами (процес управління яких описується лінійними диференційними рівняннями з постійними коефіцієнтами з достатньою для практики точністю);
- лінійні системи з перемінними параметрами (процес управління яких описується лінійними диференційними рівняннями з перемінними коефіцієнтами);
- нелінійні системи, які містять елементи з суттєвими не лінійностями і процес управління яких описується нелінійними диференційними рівняннями.

Згідно з величиною сталої похибки:

- статичні САУ (сталі похибки яких відрізняється від нуля при завданому постійному впливі);
- астатичні САУ (сталі похибки яких дорівнює нулю при завданому постійному впливі).

Згідно зі способом передачі і перетворення сигналу:

- системи дискретної дії (в яких вхідні сигнали, що керують, передаються або перетворюються у визначені моменти часу. В цих САУ безперервний сигнал проходить процедуру квантування і інформація щодо сигналу, який безперервно змінюється, передається дискретно. В залежності від виду квантування сигналів САУ дискретної дії можуть бути імпульсними і цифровими.
- системи безперервної дії (в яких вхідні сигнали, що керують, передаються або перетворюються безперервно, функціональний зв'язок між вхідним сигналом, що керує, і положенням або станом об'єкта управління здійснюється безперервно у процесі роботи САУ);

Згідно з числом вихідних величин:

- одномірні САУ (з одною керованою вихідною величиною);
- багатомірні САУ (з декількома керованими вихідними величинами). В залежності від зв'язку між пристроями, що керують, багатомірні САУ можуть мати *незв'язане управління* (коли кожний пристрій, що керує, здійснює незалежне управління своєю вихідною величиною) або *зв'язане управління* (коли пристрої, що керують, мають між собою зовнішні зв'язки).

Згідно зі способом адаптивності і оптимальності управління:

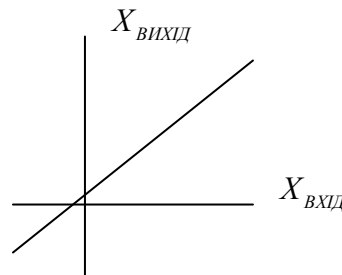
- САУ з самонастроюванням (що само-приспосовуються). Вони мають властивості адаптивності (приспосовання) до внутрішніх та зовнішніх умов, що змінюються і відносяться до класу адаптивних САУ;
- оптимальні системи (які дозволяють досягти найліпших показників якості);

- системи з перемінною структурою (які можуть змінювати свою структуру з метою досягнення встановлених показників якості).

Для реалізації властивостей адаптивності або оптимальності управління САУ використовують обчислювальні пристрої, цифрові обчислювальні машини або комплекс ЦОМ.

1.2. Принцип суперпозиції

До лінійних САУ відносяться системи, які у визначених межах мають лінійну залежність між вхідним $X_{IN}(t)$ і $X_{OUTPUT}(t)$ вихідним сигналами. Найважливіша властивість будь-якої лінійної системи – принцип суперпозиції.



Мал.1. Характеристика лінійної системи.

Сутність принципу суперпозиції:

У лінійної системи реакція від дії сумарного вхідного сигналу $X_{IN}(t)$, який містить n вхідних сигналів $X_{IN(i)}(t)$, дорівнює сумі реакцій, які з'являються внаслідок дії кожного сигналу $X_{IN(i)}(t)$ окремо.

$$X_{INPUT}(t) = X_{INPUT(1)}(t) + X_{INPUT(2)}(t) + \dots + X_{INPUT(n)}(t) = \sum_{i=1}^n X_{INPUT(i)}(t);$$

При цьому можна визначити реакцію системи $X_{OUTPUT(i)}(t)$ на кожний вхідний сигнал $X_{INPUT(i)}(t)$:

$$X_{INPUT(1)}(t) \Rightarrow X_{OUTPUT(1)}(t);$$

$$X_{INPUT(2)}(t) \Rightarrow X_{OUTPUT(2)}(t);$$

...

$$X_{INPUT(n)}(t) \Rightarrow X_{OUTPUT(n)}(t);$$

Згідно з принципом суперпозиції реакція лінійної системи може бути визначена як:

$$X_{OUTPUT}(t) = X_{OUTPUT(1)}(t) + X_{OUTPUT(2)}(t) + \dots + X_{OUTPUT(n)}(t) = \sum_{i=1}^n X_{OUTPUT(i)}(t);$$

Будь-яка САУ, для якої не виконується принцип суперпозиції, є нелінійною.

Принцип суперпозиції дозволяє:

1. зображати складний вхідний сигнал довільної форми у вигляді кінцевої і нескінченної сум вхідних сигналів (наприклад, за рахунок розкладення функції, що описує вхідний сигнал, у послідовний ряд);
2. розрахувати вихідний сигнал шляхом сумування реакцій на прості складові вхідного сигналу (це особливо важливо, коли на систему діють сигнали, які впливають на різні елементи САУ: визначив реакцію системи на кожний сигнал окремо, ми в змозі визначити її сумарну реакцію на всі зовнішні дії);
3. змінювати масштаб завдяки пропорційності між вихідним і вхідним сигналами $X_{OUTPUT(i)}(t)$; $X_{INPUT(i)}(t)$:

якщо $X_{INPUT(i)}(t) \Rightarrow X_{OUTPUT(i)}(t)$;

тоді $nX_{INPUT(i)}(t) \Rightarrow nX_{OUTPUT(i)}(t)$;

4. використовувати співвідношення між похідними вихідного і вхідного сигналів $X_{OUTPUT(i)}(t)$; $X_{INPUT(i)}(t)$:

якщо $X_{INPUT(i)}(t) \Rightarrow X_{INPUT(i)}^*(t)$;

тоді $X_{OUTPUT(i)}(t) \Rightarrow X_{OUTPUT(i)}^*(t)$;

1.3. Поняття ланки САУ

Будь-яка САУ є передаючою системою, в якій вхідна величина перетворюється у вихідну згідно з встановленим законом управління.

Всі реальні системи містять різні елементи – механічні, електричні, електронні, гідравлічні тощо, які відрізняються за фізичною природою і конструктивним виконанням. Але незважаючи на ці відмінності, багато елементів САУ мають однакові динамічні властивості. Тому при дослідженні САУ її елементи розподіляють не за фізичною природою і конструктивному виконанню, а за видом диференціальних рівнянь, які описують їх динамічні властивості.

У Теорії автоматичного управління *елементи, що описуються однаковими диференціальними рівняннями не вище 2-го порядку, називають ланками САУ.*

Ці ланки мають властивість односпрямованої дії. Таким чином, ми можемо поділити будь-яку САУ на ряд ланок, які відрізняються за видом диференціальних рівнянь.

Приклад 1. Розглянемо генератор постійного струму.

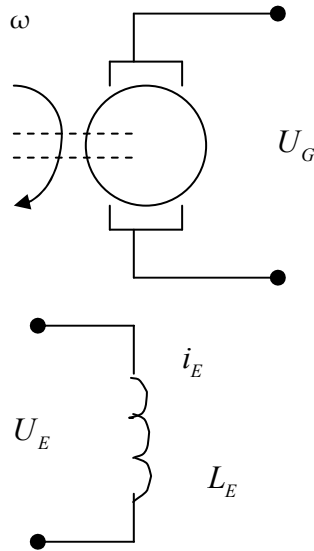
$$L_E \frac{di_E}{dt} + Ri_E = U_E;$$

Припускаючи, що:

$$U_G = Ki_E;$$

$$\frac{L_E}{K} \frac{dU_G}{dt} + \frac{R}{K} U_G = U_E;$$

$$a \frac{dU_G}{dt} + bU_G = U_E;$$



Мал.2. Генератор постійного струму

Або у загальному вигляді:

$$a X_{OUT} + b X_{OUT} = K_1 X_{IN};$$

де:

$$K_1 = 1;$$

$$a = \frac{L_E}{K};$$

$$b = \frac{R}{K};$$

Таким чином, ми можемо розглядати генератор постійного струму як одну ланку згідно з його диференціальним рівнянням. Для спрощення опису диференційного рівняння цієї ланки ми можемо ввести наступні позначки:

$$\frac{dx}{dt} \equiv sx;$$

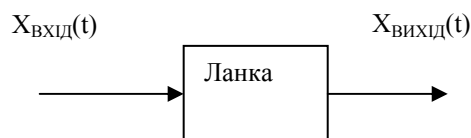
$$\frac{d^k x}{dt^k} \equiv s^k x;$$

$$\int x dt \equiv \frac{x}{s};$$

де s – оператор перетворення Лапласа.

Таким чином, ми маємо:

$$(as + b)X_{OUT} = K_1 X_{IN};$$



Друга форма опису:

$$W_i(s) = \frac{X_{OUT}(t)}{X_{IN}(t)} = \frac{K_1}{as + b} = \frac{K_1 / b}{\frac{a}{b}s + 1} = \frac{K}{Ts + 1};$$

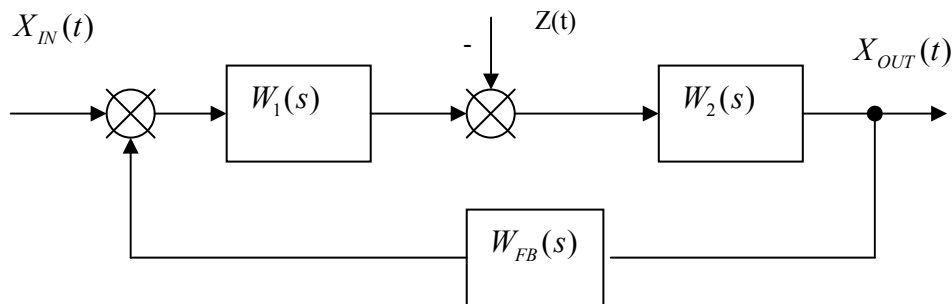
де:

$$K = \frac{K_1}{b};$$

$$T = \frac{a}{b};$$

$W_i(s)$ - передаточна функція ланки.

У загальному випадку передаточна функція ланки може бути визначена як відношення перетворень Лапласа вихідного і вхідного сигналів.



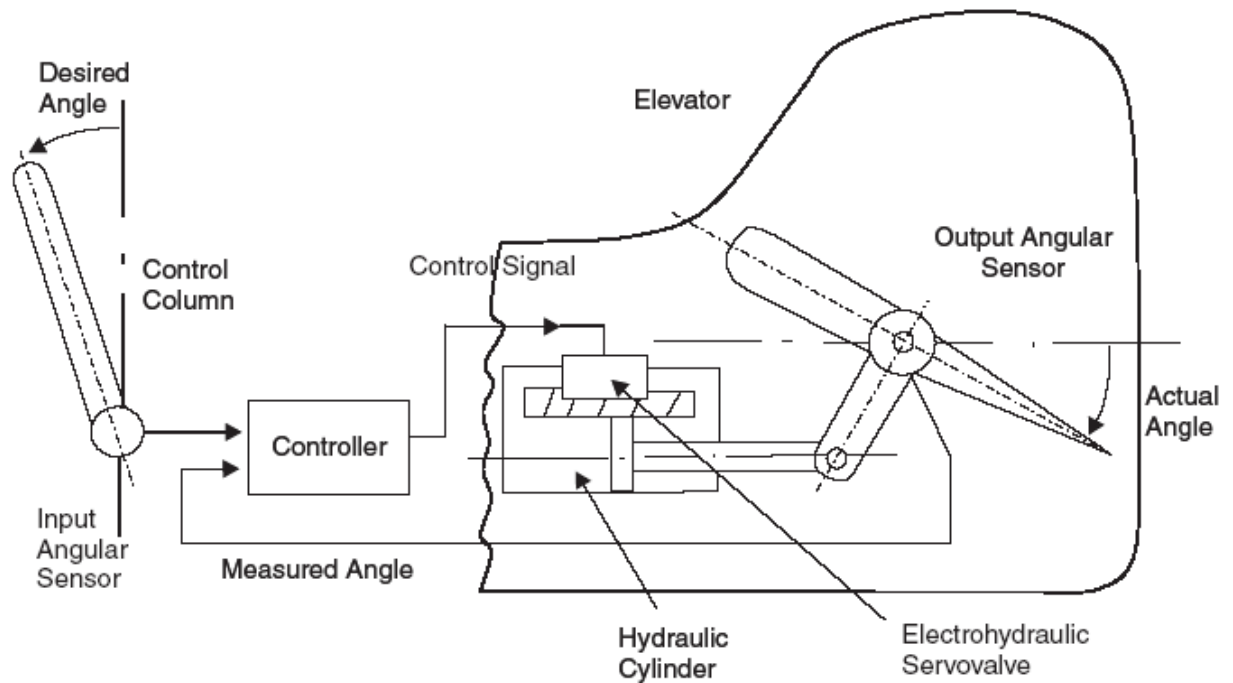
Мал.3. Структурна схема типової САУ.

Ми можемо зображати будь-яку складну САУ у вигляді структурної схеми, яка відображає наступну інформацію:

- вхідний, вихідний сигнали і сигнал збурення - $X_{IN}(t)$; $X_{OUT}(t)$; $Z(t)$.
- окремі ланки, які зображають окремі функціональні блоки згідно з відповідними диференційними рівняннями ланок САУ - $W_1(s)$, $W_2(s)$;
- ланку зворотного зв'язку $W_{FB}(s)$;
- передачу сигналу від входу до виходу САУ;
- зв'язок між окремими ланками відповідно до структурної схеми САУ;
- суматори;
- точки розгалуження тощо.

Ваша наступна задача – спрощення структурної схеми САУ за рахунок використання спеціальних правил перетворення структурних схем з метою наступного аналізу.

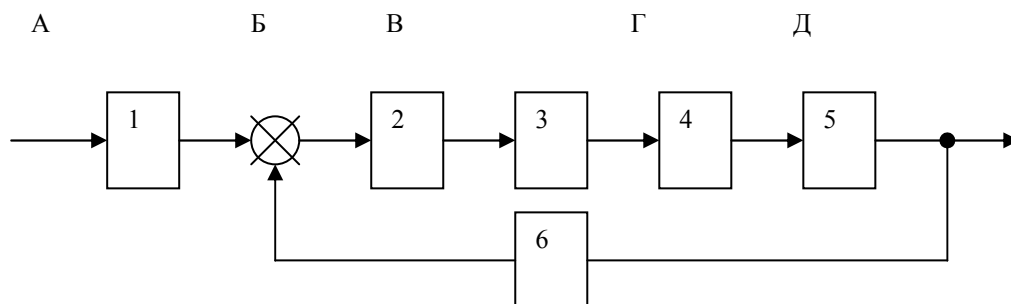
Приклад 2.



Мал.2. Спрощена система управління руля висоти літака.

Умовні позначки:

- Desired angle – заданий кут - А;
- Input angular sensor – вхідний кутовий датчик - 1;
- Control Column – штурвал пілота;
- Controller – контролер - 2;
- Control signal – сигнал управління - В;
- Measured Angle – кут що вимірюється;
- Elevator - руль висоти - 5;
- Hydraulic Cylinder – гідравлічний циліндр - 4;
- Electrohydraulic Servovalve – електрогідравлічний серво-розподільчий клапан - 3;
- Output Angular Sensor - вихідний кутовий датчик - 6;
- Actual Angle – дійсне значення кута - Д;
- Сигнал похибки – Б;
- Фізичне зусилля гідравлічного циліндра – Г.



Мал.3. Структурна схема системи управління руля висоти літака

Система управління руля висоти літака – приклад САУ за відхиленням.

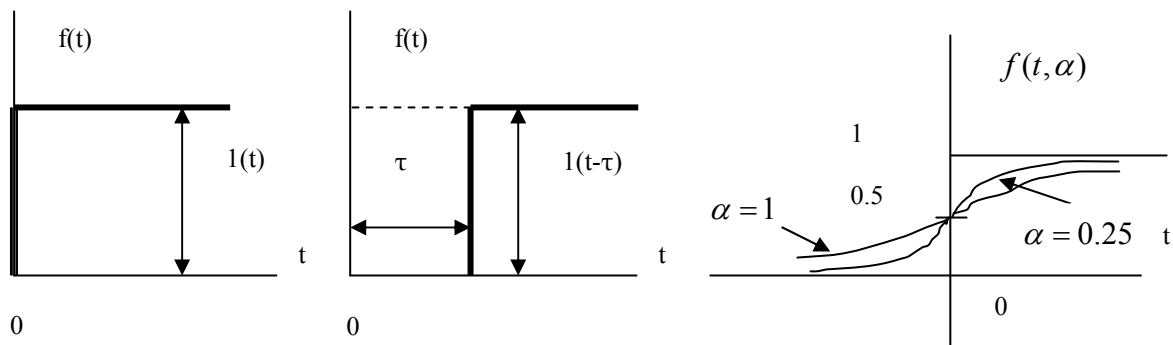
1.4. Типові впливи

Для правильного проектування САУ і для складання технічних вимог до них необхідно знати умови їх роботи, тобто знати збурення, які впливають на них. Зовнішні впливи, які прикладаються до САУ є різноманітними. Тому виникає потреба у кожному випадку встановлювати для САУ типові, або стандартні впливи, беручи до уваги умови їх роботи. Типові (стандартні) впливи повинні мати суттєві параметри реальних впливів і збурень. Це дає можливість аналітично вирішити питання щодо реакції САУ на впливи і збурення. Реакція на типові впливи визначає динамічні їх властивості, які повинні відповідати технічним вимогам.

Ми маємо наступні типові вхідні сигнали:

- ступенева функція;
- δ - функція;
- гармонійний (синусоїдальний) вхідний сигнал;
- вхідний сигнал, який лінійно зростає;
- квадратична часова функція та інші.

А. Ступенева функція.



Мал.4. Одинична ступенева функція.

Одинична ступенева функція визначається наступним чином:

$$1(t) = \begin{cases} 0; & (t < 0); \\ 1; & (t \geq 0); \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Реакція САУ на одиничну ступеневу функцію називається перехідною характеристикою, перехідним процесом, (step response в MATLAB) або перехідною функцією $h(t)$.

Якщо вплив одиничної ступеневої функції має часовий зсув τ , тоді ми маємо:

$$1(t - \tau) = \begin{cases} 0; & (t < \tau); \\ 1; & (t \geq \tau); \end{cases} \quad (1.4.2)$$

Фізичний приклад – підключення джерела живлення до САУ, тощо.

Б. δ -функція.

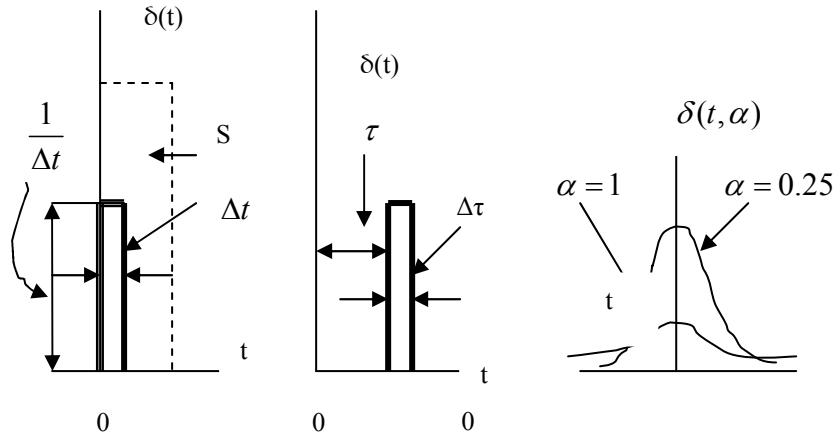
Сигнал у вигляді імпульсної функції 1-го порядку або δ -функція.

δ - функція є імпульсом, який має нескінченно велику амплітуду і нескінченно малу тривалість. У математичному сенсі він може бути зображений як похідна від одиничної ступеневої функції, якщо $t = 0$:

$l'(t) = \delta(t)$, тому ми можемо отримати:

$$\int_0^t \delta(t) dt = 1; \quad (1.4.3)$$

Таким чином, площа імпульсу є кінцевою величиною (вона дорівнює 1). Фізичний приклад – ударний короткочасний вплив на САУ.



Мал.5. δ -функція.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0; & (0 > t > \Delta t); \\ \frac{1}{\Delta t}; & (0 \leq t \leq \Delta t); \end{cases} \quad (1.4.4)$$

Якщо площа імпульсу дорівнює S , тоді ми вважаємо, що ми маємо δ -функцію у масштабі S або δ -функцію яка дорівнює $S\delta(t)$.

Реакція САУ на δ -функцію називається імпульсною перехідною характеристикою або функцією ваги (impulse response в MATLAB) $\omega(t)$.

Разом з перехідною характеристикою функція ваги є найбільш важливим параметром динамічних властивостей САУ.

Якщо ми маємо часовий зсув τ , тоді δ -функція має наступний вигляд:

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0; & (\tau > t > \tau + \Delta \tau); \\ \frac{1}{\Delta \tau}; & (\tau < t \leq \tau + \Delta \tau); \end{cases} \quad (1.2.4.5)$$

Сигнали у вигляді імпульсних функцій розглядаються як похідні від одиничної ступеневої функції $l(t)$.

Беручи до уваги порядок похідної, ми отримуємо:

- імпульсна функція 1-го порядку, або δ -функція;
- імпульсна функція 2-го порядку, або похідна δ -функції $-\delta(t)'$...

Для доведення цього положення ми можемо зобразити одиничну ступеневу функцію $l(t)$ як межу деякої безперервної функції:

$$f(t, \alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{t}{\alpha}; \quad (1.4.5)$$

Дійсно, в межах інтервалу $-\frac{\pi}{2} < \arctg \frac{t}{\alpha} < \frac{\pi}{2}$ ми отримуємо:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(t, \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{t}{\alpha} \right) = 1; \quad (1.4.6)$$

Похідна від одиничної ступеневої функції:

$$\delta(t, \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{df(t, \alpha)}{dt} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{\alpha}{\pi(t^2 + \alpha^2)} \right]; \quad (1.4.7)$$

Дійсно, якщо $\alpha \rightarrow 0$:

- δ -функція = 0 ($t \neq 0$);
- δ -функція = ∞ ($t = 0$);

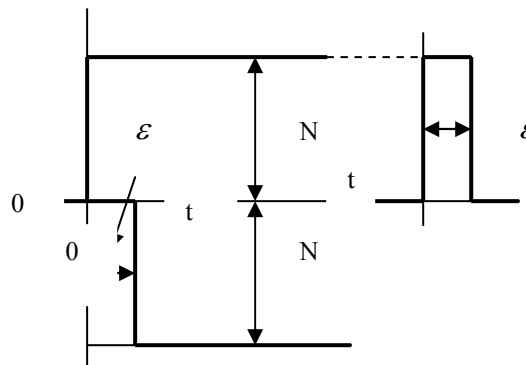
$$- \int_0^{\infty} \delta(t, \alpha) = 1.$$

Ця інтерпретація дозволяє отримати аналітичний вираз для імпульсних функцій 2,3,..., К-го порядку.

Ви в змозі збудувати блок δ -функцію за рахунок використання наступних функцій Matlab6.5:

- Step;
- Derivative (du/dt).

Зв'язок між перехідною характеристикою і функцією ваги може бути отриманий за рахунок використання різниці 2-х ступеневих функцій:



Мал.6. Зв'язок між перехідною характеристикою і функцією ваги.

Розглянемо 2 ступеневі функції:

- $N1(t); (t = 0)$;
- $N1(t - \varepsilon); (t = \varepsilon)$ - ступенева функція з часовим зсувом ε .

Тоді вихідний сигнал дорівнює:

$$X_{OUT}(t) = N[h(t) - h(t - \varepsilon)]; \quad (1.4.8)$$

Якщо ми збільшуємо $N \uparrow$ і водночас зменшуємо $\varepsilon \downarrow$ з метою отримання площі імпульсу, яка дорівнює =1, тобто $N\varepsilon = 1$, маємо:

$$\omega(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N\varepsilon[h(t) - h(t - \varepsilon)]}{\varepsilon} = \frac{dh(t)}{dt}; \quad (1.4.9)$$

За рахунок використання перетворення Лапласа ми можемо встановити зв'язок між перехідною характеристикою ланки САУ і її функції ваги:

$$W(s) = \int_0^{\infty} \omega(t) \exp(-st) dt; \quad (1.4.10)$$

С. Гармонійний вхідний сигнал.

Гармонійний вхідний сигнал можна зобразити у наступній формі:

$$\begin{cases} X_{IN}(t) = A_{IN} \sin(\omega t + \varphi_{IN}); \\ X_{IN}(t) = A_{IN} \cos(\omega t + \varphi_{IN}); \end{cases} \quad (1.4.11)$$

де:

ω - кругова частота коливань ($\omega = \frac{2\pi}{T}$);

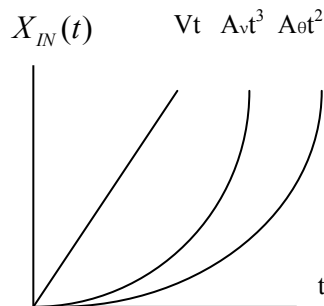
T - період коливань;

φ_{IN} - фазовий зсув.

Гармонійний вхідний сигнал можна зобразити у комплексній формі:

$$X_{IN}(t) = A_{IN} \exp[j(\omega t + \varphi_{IN})] = A_{IN}[\cos(\omega t + \varphi_{IN}) + j \sin(\omega t + \varphi_{IN})]; \quad (1.4.12)$$

Д. Лінійно зростаючий вхідний сигнал.



0

Fig.7. Лінійно зростаючий сигнал (ramp), квадратична і кубічна часові функції.

$$X_{IN}(t) = Vt; (t \geq 0);$$

де V - постійний коефіцієнт.

Е. Квадратична і кубічна часові функції.

$$X_{IN}(t) = \left(\frac{\theta}{2}\right)t^2 = A_{\theta}t^2;$$

$$X_{IN}(t) = \left(\frac{v}{3}\right)t^3 = A_v t^3;$$

Ви в змозі збудувати квадратичну і кубічну часові функції за рахунок використання наступних функціональних блоків Matlab6.5:

- Ramp;
- Math Function ($|u|^2$).

Література

1. Г.Ф.Зайцев, В.К.Стеклов, О.І.Бріцький. Теорія автоматичного управління. (Ред. Г.Ф.Зайцева). Київ.: "Техніка", 2002р., 673 арк.
2. Н.Н.Иващенко. Автоматическое регулирование. М, Машиностроение, 1978г.

3. B.J.Lurie, P.J.Enright. Classical Feedback Control with Matlab. Jet Propulsion Laboratory. California Institute of Technology. Marcel Dekker, Inc., 2000.
4. Ч.Филлипс, Р.Харбор. Системы управления с обратной связью. Пер. с англ. М., Лаборатория Базовых Знаний, 2001г.
5. R.S. Burns. Advanced Control Engineering. Butterworth-Heinemann. Oxford, 2001.
6. Р.Дорф, Р.Бишоп. Современные системы управления. Пер. с англ. М., Лаборатория Базовых Знаний, 2002г.
7. В.А.Бесекерский, Е.П.Попов. Теория систем автоматического управления. Санкт-Петербург, 2003г.
8. Ануфриев В.Е. Самоучитель MatLab 5.3/6.x. Спб.: БХВ-Петербург, 2002г.

Тема 2. ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ САУ

Питання для самостійного вивчення

- 2.1 Методика складання диференціальних рівнянь САУ. Процедура лінеаризації.
- 2.2 Рішення рівняння САУ. Перехідні і сталі процеси.
- 2.3 Частотні характеристики САУ.
- 2.4 Логарифмічні частотні характеристики САУ.
- 2.5 Зв'язок між перехідною характеристикою, функцією ваги і передаточною функцією.

2.1. Методика складання диференціальних рівнянь САУ. Процедура лінеаризації

Будь-яка САУ має елементи, які з'єднуються за допомогою функціональних зв'язків.

Складання диференціальних рівнянь САУ починається зі складання диференціальних рівнянь їх елементів (ланок). Рівняння окремих ланок складаються на основі фізичних законів, які характеризують процеси, які відбуваються у цих ланках.

Більшість реальних САУ мають нелінійні характеристики. Але для зручності при проведенні математичного аналізу ми заміняємо нелінійне диференціальне рівняння ланки приблизно лінійним. Процес заміни нелінійного диференціального рівняння ланки лінійним називається *лінеаризацією*.

У загальному випадку лінеаризація проводиться при малих відхиленнях вхідних і вихідних величин відносно деякого сталого стану елемента (ланки). Ми вважаємо малим відхиленням перемінних величин від стану рівноваги, яке досліджується, таке достатньо мале відхилення, при якому ми можемо віднести цю ланку (елемент) до лінійної. Метод лінеаризації можна використовувати, якщо функція поблизу стану рівноваги, яке досліджується, є аналітичною. Цей метод не можна використовувати, якщо ми маємо функції, які відносяться до

рівнянь динаміки ланок і мають розрив безперервності у стані рівноваги, яке досліджується. Це пов'язано з тим, що у цьому випадку відсутні часткові похідні і неможливо скласти ряд Тейлора.

Ми маємо деяку статичну характеристику елемента (ланки) САУ. Процес лінеаризації зводиться до заміни нелінійної характеристики $X_{BIX} = f(X_{BX})$ деякою лінійною функцією

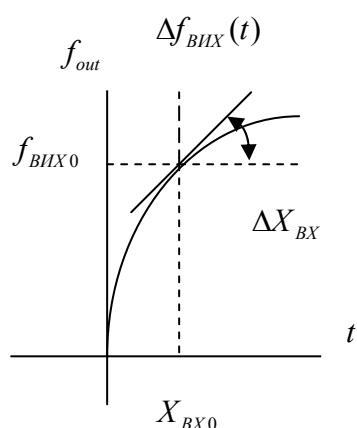
$X_{BIX} = aX_{BX} + b$ або заміни кривої $X_{BIX} = f(X_{BX})$ дотичної прямою у точці (X_{BX0}, X_{BIX0}) , яка відповідає сталому стану роботи ланки.

Нехай фізичні процеси ланки описуються нелінійним рівнянням

$$f(X_{BIX}^{**}, X_{BX}^*, X_{BIX}^*, X_{BX}^*) \quad (2.1.1)$$

У сталому стані $X_{BIX} = const$; $X_{BX} = const$, тому наступне рівняння буде визначати статичну характеристику ланки:

$$f(0, 0, X_{BIX}, X_{BX}) \quad (2.1.2)$$



Мал.1. Процес лінеаризації.

Тоді ми маємо наступні рівняння:

$$X_{BIX} = X_{BIX0} + \Delta X_{BIX};$$

$$X_{BX} = X_{BX0} + \Delta X_{BX};$$

де ΔX_{BIX} , ΔX_{BX} - малі відхилення координат X_{BIX} , X_{BX} від їх сталого значення.

Тоді рівняння у відхиленнях буде мати наступний вигляд:

$$f(\Delta X_{BIX}^{**}, \Delta X_{BX}^*, X_{BIX0} + \Delta X_{BIX}, X_{BX0} + \Delta X_{BX}) = 0; \quad (2.1.3)$$

Ряд Тейлора від лівої частини Рівн.(2.1.3) описується наступним рівнянням:

$$f(0, 0, X_{BIX0}, X_{BX0}) + \left(\frac{\partial f}{\partial X_{BIX}^{**}} \right)_0 \Delta X_{BIX}^{**} + \left(\frac{\partial f}{\partial X_{BX}^*} \right)_0 \Delta X_{BX}^* + \left(\frac{\partial f}{\partial X_{BIX}} \right)_0 \Delta X_{BIX} + \left(\frac{\partial f}{\partial X_{BX}} \right)_0 \Delta X_{BX} + \dots = 0; \quad (2.1.4)$$

У Рівн.(2.1.4) його члени обмежені відхиленнями ΔX_{BIX} , ΔX_{BX} , а також їх похідними 1-го та 2-го ступеня. Часткові похідні є деякі числа, величина яких за-

лежатиме від виду функції $f(X_{BHX}^{**}, X_{BX}^*, X_{BHX}, X_{BX})$ і значень координат $\Delta X_{BHX0}, \Delta X_{BX0}$.

Враховуючи прийняті допущення відносно малих величин відхилення координат X_{BHX}, X_{BX} , тому функція $f(X_{BHX}^{**}, X_{BX}^*, X_{BHX}, X_{BX})$ є аналітичною для всіх аргументів поблизу точки X_{BHX0}, X_{BX0} . У зв'язку з наведеним ми можемо відкинути (не враховувати) члени, які містять відхилення $\Delta X_{BHX}, \Delta X_{BX}$ та їх похідні у степені вище 1-ої, таким чином ми отримуємо лінеаризоване диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами:

$$a_2 \Delta^n X_{out} + a_1 \Delta' X_{out} + a_0 \Delta X_{out} = b_1 \Delta X_{in}; \quad (2.1.5)$$

де:

$$a_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial X_{BHX}^{**}} \right)_0;$$

$$a_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial X_{BHX}^*} \right)_0;$$

$$a_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial X_{BHX}} \right)_0;$$

$$b_1 = - \left(\frac{\partial f}{\partial X_{BX}} \right)_0;$$

Нелінійні статичні характеристики, які лінеаризуються за допомогою розкладення у ряд Тейлора, називаються несуттєво нелінійними характеристиками. Розривні характеристики, які не підлягають розкладенню у ряд Тейлора, називаються суттєво нелінійними.

Отримав лінеаризовані окремих ланок САУ, ми маємо можливість отримати диференціальне рівняння замкненої САУ у вигляді:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n X_{BHX}(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} X_{BHX}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dX_{BHX}(t)}{dt} + a_0 X_{BHX}(t) = \\ = b_m \frac{d^m X_{BX}(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} X_{BX}(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dX_{BX}(t)}{dt} + b_0 X_{BX}(t) + \\ + c_l \frac{d^l Z(t)}{dt^l} + c_{l-1} \frac{d^{l-1} Z(t)}{dt^{l-1}} + \dots + c_1 \frac{dZ(t)}{dt} + c_0 Z(t); \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

де:

$X_{BHX}(t)$ - вихідний сигнал;

$X_{BX}(t)$ - вхідний вплив (сигнал);

$Z(t)$ - сигнал збурення;

$a_i; b_j; c_k$ - постійні коефіцієнти, які залежатиме від параметрів САУ.

Права частина Рівн.(2.1.6) визначає вхідну дію. Ліва частина цього рівняння у разі її нульового значення, визначає властивості самої САУ, її вільний рух. Порядок рівняння n визначає число ступенів свободи САУ. Для всіх САУ порядок лівої частини завжди вище порядку правої частини, тобто $n > m$.

З урахуванням перетворення Лапласа ми можемо записати Рівн.(2.1.6) у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) X_{BIX}(s) = \\ &= (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) X_{BX}(s) + \quad (2.1.7) \\ &+(c_l s^l + c_{l-1} s^{l-1} + \dots + c_1 s + c_0) Z(s); \end{aligned}$$

Якщо $Z(s) = 0$:

$$\begin{aligned} &(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) X_{out}(s) = \quad (2.1.8) \\ &= (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) X_{in}(s); \end{aligned}$$

Ми можемо ввести наступні позначки операційних поліномів:

$$\begin{aligned} &a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = D(s); \\ &b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0 = M(s); \\ &c_l s^l + c_{l-1} s^{l-1} + \dots + c_1 s + c_0 = C(s); \end{aligned}$$

Тоді Рівн.(2.1.7) матиме наступну форму:

$$D(s) X_{BIX}(s) = M(s) X_{BX}(s) + C(s) Z(s); \quad (2.1.9)$$

Для лінійної САУ вхідні впливи $X_{BX}(t)$ і $Z(t)$ можна врахувати окремо відповідно до принципу суперпозиції:

$$W_{XBX}(s) = \frac{X_{BIX}(s)}{X_{BX}(s)} = \frac{M(s)}{D(s)} \quad (2.1.9)$$

$$W_Z(s) = \frac{X_{BIX}(s)}{Z(s)} = \frac{C(s)}{D(s)} \quad (2.1.10)$$

Поведінка САУ визначається:

- її структурою (яка обумовлена видом характеристичного рівняння $D(s) = 0$ або її полюсами – коренями рівняння $D(s) = 0$);
- характером вхідних впливів, які визначаються поліномами $M(s)$; $C(s)$ або їх нулями – коренями вказаних поліномів.

Таким чином, для визначення властивостей САУ необхідно розрахувати корені наступних рівнянь:

$$D(s) = 0;$$

$$M(s) = 0;$$

$$C(s) = 0;$$

Визначив нулі та полюси на комплексній площі, а також їх порядок, ми матиме можливість розрахувати параметри стійкості, а також якість перехідного процесу САУ.

Згідно з Рівн.(2.1.9) передаточна функція матиме наступний вигляд:

$$W_{XBX}(s) = \frac{X_{out}(s)}{X_{in}(s)} = \frac{M(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}; \quad (2.1.11)$$

Якщо замінити оператор s на частотний $j\omega$ оператор отримуємо частотну передаточну функцію:

$$W_{XBX}(j\omega) = \frac{X_{out}(j\omega)}{X_{in}(j\omega)} = \frac{M(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0}; \quad (2.1.12)$$

2.2. Рішення рівняння САУ. Перехідні і сталі процеси

Рішення неоднорідного диференційного рівняння одномірної САУ буде складатися із 2-х складових:

- загального рішення однорідного диференційного рівняння - $X_{ВІЛЬН}(t)$, яке визначає вільний рух САУ або її перехідний процес;
- часткове рішення неоднорідного рівняння - $X_{ЗМУШ}(t)$, яке визначає змушений рух САУ.

$$X_{ВІХ}(t) = X_{ВІЛЬН}(t) + X_{ЗМУШ}(t); \quad (2.2.1)$$

А. Загальне рішення.

Інтеграл однорідного диференційного рівняння $D(s)X_{ВІХ}(s) = 0$ визначає вільний рух САУ, який залежить від динамічних властивостей САУ, тобто це є рух, який вона виконує після того, як вона була виведена із стану рівноваги деяким вхідним впливом після зникнення цього впливу.

$$X_{ВІЛЬН}(t) = C_1 \exp(s_1 t) + C_2 \exp(s_2 t) + \dots + C_n \exp(s_n t) = \sum_{i=1}^n C_i \exp(s_i t); \quad (2.2.2)$$

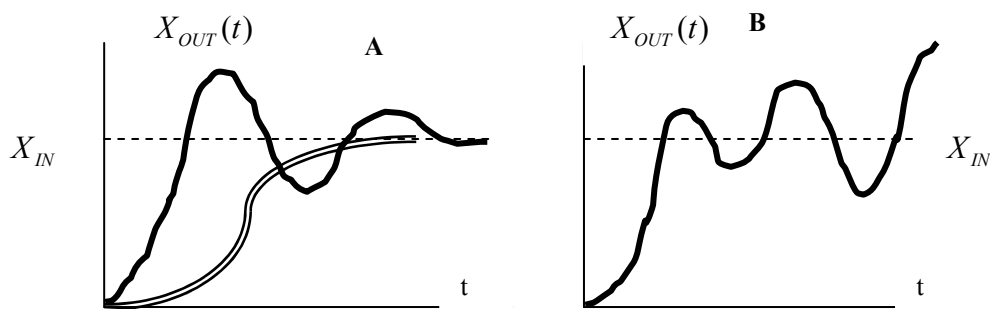
де:

s_i - корени характеристичного рівняння САУ $D(s) = 0$;

C_i - довільні константи інтегрування, які визначаються початковими умовами.

Таким чином, Рівн.(2.2.2) визначає перехідний процес - вільний рух САУ. Лінійна САУ, яка має перехідний процес, який загасає протягом часу, називається стійкою САУ відповідно до умови:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_{ВІЛЬН}(t) \rightarrow 0; \quad (2.2.3)$$



Мал.2. Transient processes of control systems

Якщо вимога (2.2.3) не виконується, тоді ми отримуємо нестійку САУ, яка має перехідний процес, який не загасає протягом часу.

В. Часткове рішення – складова змушеного руху САУ.

2-га складова загального рішення диференційного рівняння САУ визначає змушений рух і її поведінку у сталому режимі.

Ми вважаємо, що вплив, який змушує, є гармонійною функцією:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi); \quad (2.2.4)$$

де:

ω - кругова частота коливань;

T - період коливань;

φ - фазовий зсув.

Ми також вважаємо, що фазовий зсув дорівнює 0, тоді ми маємо:

$$f(t) = A_0 \cos \omega t; \quad (2.2.5)$$

Але гармонійний вплив може розглядатися як суму двох експонентних :

$$f(t) = \frac{A_0}{2} \exp(j\omega t) + \frac{A_0}{2} \exp(-j\omega t); \quad (2.2.6)$$

Ми можемо використати формулу Ейлера для опису цих експонент:

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{zi} - e^{-zi});$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{zi} + e^{-zi});$$

$$f_1(t) = \frac{A_0}{2} \exp(j\omega t); \quad (2.2.7)$$

$$f_2(t) = \frac{A_0}{2} \exp(-j\omega t); \quad (2.2.8)$$

Тоді ми отримуємо:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t); \quad (2.2.9)$$

Ми можемо представити часткове рішення як суму 2-х складових:

$$X_{ЗМВШ}(t) = X_{F1}(t) + X_{F2}(t); \quad (2.2.10)$$

В подальшому за рахунок використання принципу суперпозиції для визначення реакції САУ на окремі вхідні впливи $f_1(t); f_2(t)$ - таким чином ми отримуємо суму 2-х рішень згідно з Рівн.(2.2.10).

Часткове рішення будемо шукати згідно з наступним виразом:

$$X_{F1}(t) = \frac{A_0}{2} W(j\omega) \exp(j\omega t); \quad (1.2.2.11)$$

Підставляючи Рівн.(2.2.7) і (2.2.12) у Рівн.(2.1.8), ми отримуємо:

$$\begin{aligned} [a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0] \frac{A_0}{2} W(j\omega) \exp(j\omega t) = \\ = [b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0] \frac{A_0}{2} \exp(j\omega t); \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Звідки ми отримуємо частотну передаточну функцію:

$$W(j\omega) = \frac{a(\omega) + jb(\omega)}{c(\omega) + jd(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (2.2.13)$$

де:

$P(\omega)$ - дійсна складова частотної передаточної функції;

$jQ(\omega)$ - уявна складова частотної передаточної функції;

$$a(\omega) = b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots \quad (2.2.14)$$

$$b(\omega) = b_1\omega - b_3\omega^3 + b_5\omega^5 - \dots$$

$$c(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots$$

$$d(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots$$

$$W(j\omega) = A(\omega) \exp[j\varphi(\omega)] = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}; \quad (2.2.15)$$

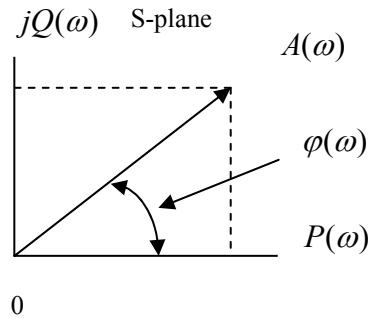
$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \quad (2.2.16)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}; \quad (2.2.17)$$

де:

$A(\omega)$ - амплітудно-частотна характеристика САУ;

$\varphi(\omega)$ - фазово-частотна характеристика САУ.



Мал.3. Дійсна і уявна складові ($P(\omega)$, $jQ(\omega)$) частотної передаточної функції САУ

Якщо ω змінюється, тоді кінець вектора $W(j\omega)$ виписує годограф амплітудно-фазової характеристики САУ.

Тоді ми можемо визначити вираз для складових вимушеного руху САУ:

$$X_{F1}(t) = \frac{A_0}{2} A(\omega) e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]}; \quad (2.2.18)$$

$$X_{F2}(t) = \frac{A_0}{2} A(\omega) e^{-j[\omega t + \varphi(\omega)]}; \quad (2.2.19)$$

Використовуючи принцип суперпозиції, ми в змозі отримати загальний вираз для змушеного руху:

$$X_{\text{ЗМУШ}}(t) = \frac{A_0}{2} A(\omega) \{e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]} + e^{-j[\omega t + \varphi(\omega)]}\} = A_0 A(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)]; \quad (2.2.20)$$

Рівн.(2.2.20) показує, що вимушені коливання, які виникають у лінійній САУ під впливом гармонійного вхідного сигналу, є також гармонійною функцією часу, яка відрізняється від вхідного впливу за амплітудою і фазою.

2.3. Частотні характеристики САУ

А. Діаграма Найквіста.

Амплітудно-фазово-частотна характеристика – це частотний годограф, який ми отримуємо згідно з траєкторією, яку виписує кінець вектору, який відповідає частотній передаточної функції САУ $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$, коли кругова частота ω змінюється від 0 до ∞ . При цьому:

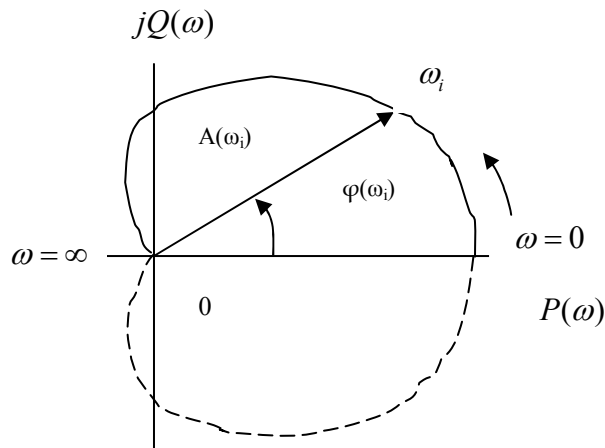
- значення $P(\omega)$ відображаються на дійсній вісі S площини;
- значення $Q(\omega)$ відображаються на уявній вісі S площини;
- для кожного значення ω_i маємо окрему точку згідно з величинами $P(\omega_i)$ і $Q(\omega_i)$;

- отримані точки складають амплітудно-фазово-частотну характеристику САУ.

Амплітудно-фазово-частотна характеристика може бути збудована для позитивних, а також для негативних значень кругової частоти ω . Зміна знаку кругової частоти ω призведе до побудови сполученої амплітудно-фазово-частотної характеристики (яка зображена пунктирною лінією).

Сутність позитивних і негативних значень кругової частоти ω може бути роз'яснена з використанням перетворення Фур'є:

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t) \exp(-j\omega t) dt = \int_0^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt; \quad (2.3.20)$$



Мал.4. Амплітудно-фазово-частотна характеристика САУ.

За рахунок використання перетворення Фур'є ми в змозі перетворити оригінальну часову функцію $x(t)$ у частотну функцію $X(j\omega)$. Це означає, що часова функція представлена нескінченною сумою векторів з нескінченно малими амплітудами і різними круговими частотами ω , які обертаються на комплексній S-площині.

Вказана сума може бути отримана з використанням зворотного перетворення Фур'є:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-\infty}^{c+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega; \quad (2.3.21)$$

де c - абсциса абсолютної збіжності.

Оскільки часова функція є дійсною, тоді кожному елементарному вектору $X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$, який обертається проти годинникової стрілки ($\omega > 0$), повинен відповідати кожний елементарний сполучений вектор $X(-j\omega)e^{-j\omega t} d\omega$, який обертається за годинниковою стрілкою ($\omega < 0$). У цьому випадку сума цих векторів буде завжди дійсною у будь-який момент. Тому процедура інтеграції за рахунок використання зворотного перетворення Фур'є повинна виконуватися у всьому частотному діапазоні від $-\infty$ до $+\infty$.

Ви маєте можливість ознайомитись з процедурою побудови амплітудно-фазово-частотної характеристики САУ за рахунок використання відповідної програми "nyquist" Matlab:

`H = tf([100],[0.1 1.1 1])`

nyquist(H)

Transfer function:

100

 $0.1 s^2 + 1.1 s + 1$

Частотні характеристики САУ можуть бути побудовані експериментально. Для цього необхідно надати на вхід САУ, що досліджується, гармонійний сигнал з постійною амплітудою і змінною частотою ω .

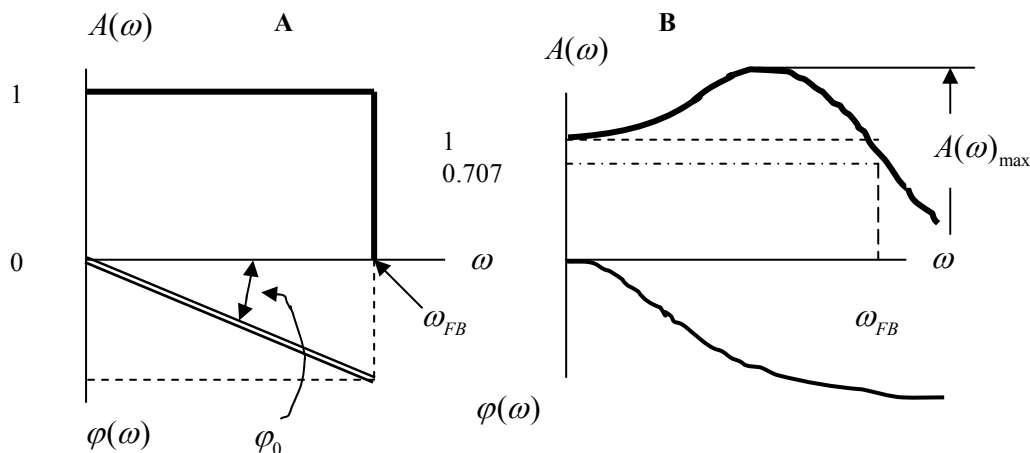
Згідно з Рівн.(2.3.20) ми отримуємо вихідний сигнал у вигляді гармонійних змушених коливань, які відрізняються від вхідного сигналу за амплітудою і фазою. В результаті проведених досліджень ми в змозі побудувати (ω змінюється від 0 до ∞):

- амплітудно-частотну характеристику;
- фазово- частотну характеристику.

Якщо САУ були б „ідеальними” низькочастотними фільтрами, які дозволяють відтворити будь-який вхідний сигнал без спотворення, тоді ми мали б характеристики згідно з Мал.4.А. Частотний діапазон, який дозволяє відтворити вхідний сигнал без спотворення, визначається частотною смугою перепускання САУ - ω_{FB} .

Але реальні системи мають характеристики, які зображені на Мал.4 В. Звичайно, $A(\omega)_{\max}$ дорівнює $(1.2-1.3)A(\omega=0)$ для САУ з необхідними характеристиками. Matlab6.5 має особу програму – “bandwidth”, яка розраховує частотну смугу перепускання. Програма $fb = \text{bandwidth}(\text{sys})$ розраховує частотну смугу перепускання fb для моделі SISO model sys, яка визначається як перша частота, при якій посилення САУ знижується нижче 70.79% (-3 dB) від її початкового значення, коли $\omega = 0$ - DC gain). Частота fb визначається у рад/с.

Таким чином, використовуючи частотні характеристики САУ, ми в змозі визначити якість відтворення вхідного сигналу при різних частотах.



Мал.4. Частотні характеристики САУ (А-ідеальні; В-реальні).

Ми можемо також використати логарифмічні характеристики, які дозволяють істотно спростити аналіз та синтез складних САУ.

2.4. Логарифмічні частотні характеристики

Основна перевага логарифмічних частотних характеристик зумовлена можливістю побудови характеристик САУ практично без розрахунків. Коли передаточна функція САУ представлена у вигляді операції перемноження ланок, тоді еквівалентна частотна характеристика може бути визначена як сума ординат логарифмічних амплітудно-частотних характеристик, які відносяться до окремих ланок САУ.

Часто ми маємо можливість збудувати так-звану асимптотичну амплітудно-частотну характеристику, яка містить множину сегментів прямих ліній, які є кратними 20dB/декаду.

Дуже зручно використовувати десятинний логарифм і будувати окремо:

- логарифмічну амплітудно-частотну характеристику;
- логарифмічну фазово-частотну характеристику.

А. Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика.

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg A(\omega); \quad (2.4.1)$$

Ця величина виражена у децибелах.

Bel – це логарифмічна величина, яка відповідає 10-кратному підвищенню потужності:

- 1 bel \Rightarrow 10-кратне збільшення;
- 2 bels \Rightarrow 100- кратне збільшення;
- 3 bels \Rightarrow 1000- кратне збільшення ...
- 1 decibel = 0.1 bel.

Оскільки $A(\omega)$ відноситься до відношення вихідних і вхідних величин (рухів, переміщень, швидкостей, напруг, струмів ...тощо, але не потужностей!), тоді 10-кратне збільшення цього відношення відноситься до 100- кратного збільшення відношення потужностей, тобто воно відповідатиме 2 bel або 20 dB!

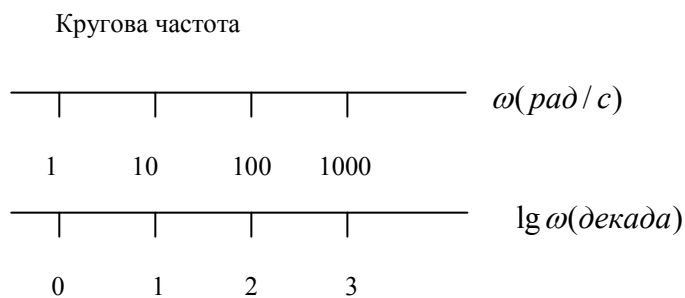
Тому ми бачимо множник 20 у правій частині (2.4.1).

1 bel $\Rightarrow \sqrt[20]{10}$ - кратна зміна амплітуди (це відносно мала величина).

$$20 \lg(10^{1/20}) = \frac{1}{20} 20 \lg(10) = 1 \text{ bel};$$

Примітка.

Логарифмічні характеристики можуть бути побудовані тільки для ланок, чії передаточні функції є безрозмірними величинами – це можливо, коли ми маємо такий ж самий розмір для вихідного в вхідного сигналів.



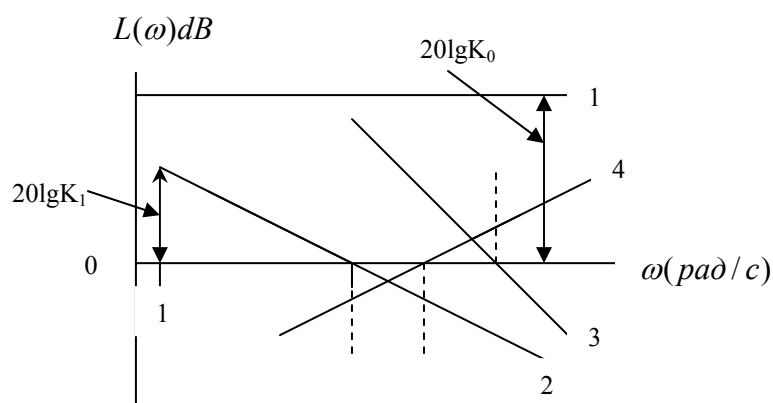
Мал.5. Частотна шкала

Ми відкладаємо на шкалі Y значення $L(\omega)$, які виражені у dB , використовуючи рівномірну (пропорційну) шкалу.

Ось Y може перетинати шкалу X (частотну) у будь-якій точці (оскільки точка $\omega = 0$ розміщена на осі X зліва у галузі нескінченості: $\lg 0 = -\infty$).

Ось абсцис повинна пройти через точку 0 dB на осі Y , що відноситься до $A(\omega) = 1$, оскільки $\lg(1) = 0$.

Ось X є частотною шкалою і побудована відповідно до логарифмічної частотної шкали. Одна одиниця приросту логарифму відноситься до 1 декади (тобто до 10-кратного збільшення частоти).



Мал.6. Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика.

1. $A(\omega) = K = \text{const.};$

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg K_0 = \text{const.}; \quad (2.4.2)$$

Цей випадок відноситься до прямої лінії, яка паралельна осі X (лінія 1) на відстані $20 \lg K_0$ понад 0 рівнем.

$$2. A(\omega) = \frac{K_1}{\omega}; \quad (2.4.3)$$

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K_1}{\omega} = 20 \lg K_1 - 20 \lg \omega;$$

Цей випадок відноситься до лінії 2.

Ми маємо можливість визначити параметри цієї прямої лінії:

- якщо $\omega = 1$, то вона проходить через ординату $20 \lg \frac{K_1}{\omega = 1} = 20 \lg K_1$;

- ця лінія має негативний нахил $-20dB/декаду$, оскільки кожне 10-кратне зростання частоти підвищує $\lg \omega$ на 1, тобто зменшує $L(\omega)$ на 20dB.

Точка перетину цієї лінії з віссю X може бути визначена згідно з наступною умовою:

$$L(\omega) = 0 \text{ ог } A(\omega) = \frac{K_1}{\omega} = 1 \Rightarrow \omega_{CO} = K_1;$$

Ця точка перетину дозволяє визначити так-звану частоту зрізу (crossover frequency) ω_{CO} .

$$3. A(\omega) = \frac{K_2}{\omega^2}; \quad (2.4.4)$$

Логарифмічна характеристика є пряма лінія з нахилом $-40dB/декаду$ (лінія 3).

У загальному випадку:

Якщо $A(\omega) = \frac{K_n}{\omega^n}$, тоді ми маємо пряму лінію з нахилом $-n * 20dB/декаду$.

Для побудови прямої лінії за допомогою 2-х точок:

- при $\omega = 1$; $L(\omega) = 20 \lg K_n$;
- частота зрізу: $\omega_{CO} = \sqrt[n]{K_n}$.

Частота зрізу для $n=2$ (лінія 3): $\omega_{CO} = \sqrt[n]{K_n} = \sqrt{K_2}$.

$$4. A(\omega) = K_3 \omega; \quad (2.4.5)$$

$$L(\omega) = 20 \lg K_3 \omega = 20 \lg K_3 + 20 \lg \omega; \text{ (лінія 4).}$$

Ця логарифмічна характеристика є пряма лінія, яка походить через 2 точки:

- $\omega = 1$; $L(\omega) = 20 \lg K_3$; з позитивним нахилом $+20dB/декаду$;
- Частота зрізу $\omega_{CO} = \frac{1}{K_3}$; (якщо $A(\omega) = 1$).

У загальному випадку:

$A(\omega) = K_m \omega^m$; логарифмічна характеристика є пряма лінія з позитивним нахилом $+m * 20dB/декаду$.

Ця лінія може побудована за допомогою 2 точок:

- $\omega = 1$; $L(\omega) = 20 \lg K_m$; з позитивним нахилом $+m * 20dB/декаду$;
- частота зрізу $\omega_{CO} = \frac{1}{\sqrt[m]{K_m}}$;

В. Логарифмічна фазово-частотна характеристика.

Ось X (частотна шкала) така ж сама, як для побудови логарифмічної амплітудно-частотної характеристики.

Фаза у градусах відкладається на осі Y – пропорційна шкала.

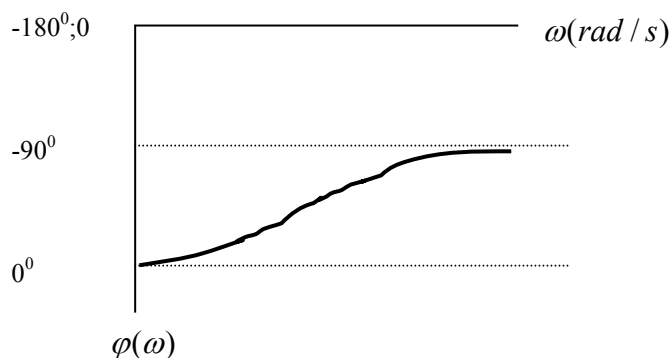
З практичної точки зору зручно об'єднати точку 0 db логарифмічної амплітудно-частотної характеристики з значенням фази -180° .

Приклад 1.

Розглянемо наступну ланку з передаточною функцією:

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T};$$

Логарифмічна фазово-частотна характеристика цієї ланки зображена на Мал 3.



Мал.7. Логарифмічна фазово-частотна характеристика.

Matlab6.5 дає можливість збудувати за допомогою програми Bode:

- логарифмічну амплітудно-частотну характеристику;
- логарифмічну фазово-частотну характеристику.

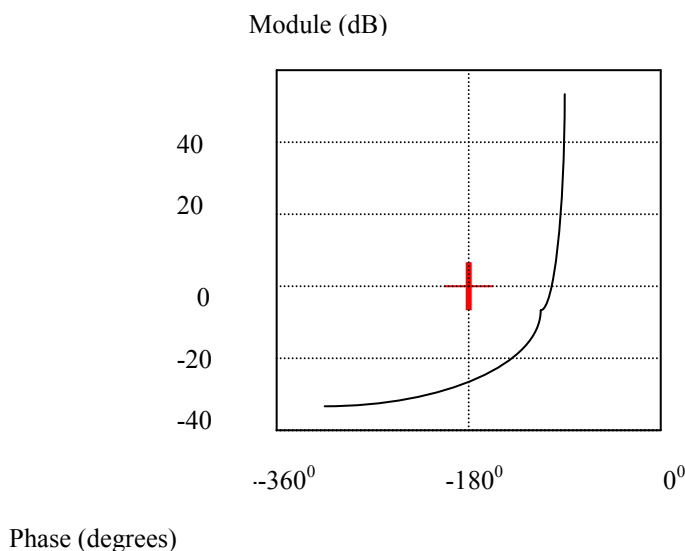
С. Логарифмічна амплітудна-фазова характеристика (Nichols diagram).

Ми можемо використовувати логарифмічну амплітудна-фазову характеристику:

- Ось Y- амплітудна шкала – magnitude (розмірність у dB);
- Ось X- фаза у градусах.

Ви можете побачити червоний хрест у точці з наступними координатами (0 dB ; -180°).

У подальшому Ви побачите, як можна використати цю характеристику для визначення показників стійкості САУ.



Мал.8. Логарифмічна амплітудна-фазова характеристика (Nichols diagram).

2.5. Зв'язок між перехідною характеристикою $h(t)$, функцією ваги $\omega(t)$ і передаточною функцією $W(s)$

По-перше, необхідно визначити закон, який, у свою чергу, дозволить визначити вхідний сигнал у загальній формі.

Ми можемо використати для цього часову періодичну функцію, яку можна розкласти у ряд Фур'є:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega t}; \quad (2.5.1)$$

де:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega t} dt; \quad (2.5.2)$$

$-T/2 < t < T/2$ - інтервал декомпозиції;

k - порядок гармоніки;

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ - кругова частота.

Але аперіодична функція може бути розглянута як періодична з періодом, який наближується до нескінченості.

У цьому випадку ми можемо використати 2 рівняння інтегралів Фур'є для зв'язку між оригінальною часовою функцією $f(t)$ і її частотним зображенням $F(j\omega)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega; \quad (2.5.3)$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt; \quad (2.5.4)$$

Але рівняння інтегралів Фур'є мають наступний дефект – вони належать до так званих невласних інтегралів і можуть бути використані для так званих абсолютно інтегруємих часових функцій, які повинні відповідати наступному виразу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty;$$

У зв'язку з наведеним більш зручно використати перетворення Лапласа, яке з'єднує оригінальну функцію і її зображення через наступні інтегральні рівняння:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt; \quad (2.5.5)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-\infty}^{c+\infty} F(s) e^{st} ds; \quad (2.5.6)$$

де:

$s = c + j\omega$ - комплексна перемінна;

c - абсциса абсолютної збіжності.

При цьому $f(t) = 0$ якщо $t < 0$.

Абсциса абсолютної збіжності може бути обрана з урахуванням наступної нерівності:

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-st} dt < \infty; \quad (2.5.6)$$

Оскільки для більшості функцій, які використовуються в ТАУ ця абсциса $s=0$, тому перетворення Лапласа може перейти у перетворення Фур'є після підстановки $s = j\omega$.

Нарешті ми можемо отримати наступне рівняння:

$$X_{OUT}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)W(s) \exp(s_i t) ds; \quad (2.5.7)$$

де s_i - корени характеристичного рівняння САУ.

При цьому зображення $F(s)$ вхідного сигналу у формі δ -функції дорівнює 1.

Тому функція ваги (імпульсна перехідна функція) дорівнює:

$$\begin{aligned} W(s) &= L[\omega(t)]; \\ \omega(t) &= L^{-1}[W(s)]; \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

де:

L - зображення прямого перетворення Лапласа;

L^{-1} - зображення зворотного перетворення Лапласа.

Перехідна характеристика можна отримати з використанням Рівн.(2.5.7):

$$h(t) = L^{-1}\left[W(s) \frac{1}{s}\right]; \quad (2.5.9)$$

де $\frac{1}{s}$ - перетворення Лапласа одиничної ступеневої функції:

$$L[1(t)] = \frac{1}{s}; \quad (2.5.10)$$

Приклад 2.

Розглянемо наступну передаточну функцію:

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 + Ts};$$

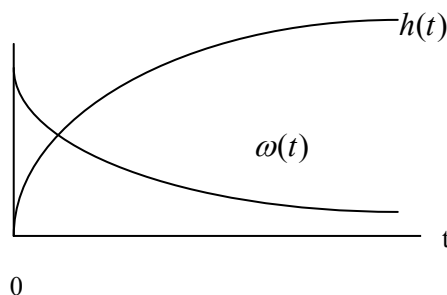


Fig. 5. Перехідна характеристика і функція ваги для Прикладу 2.

Приклад 3.

Розглянемо САУ з наступною передаточною функцією:

$$W(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)};$$

Згідно з Рівн.(1.2.5.8)

$$\omega(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right];$$

З урахуванням Таблиці зворотного перетворення Лапласа ми отримуємо:

$$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)} \Rightarrow \frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)} [(c-b)\exp(-at) + (a-c)\exp(-bt) + (b-a)\exp(-ct)];$$

Таким чином ми отримуємо:

$$\omega(t) = \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-1t} - e^{-2t};$$

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\frac{1}{s}\right];$$

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s+3};$$

$$A(s+1)(s+2)(s+3) + Bs(s+2)(s+3) + Cs(s+1)(s+3) + Ds(s+1)(s+2);$$

$$s = 0 \Rightarrow 1 = 6A \Rightarrow A = \frac{1}{6};$$

$$s = -1 \Rightarrow 1 = B(-1)(-2) \Rightarrow B = -\frac{1}{2};$$

$$s = -2 \Rightarrow 1 = C(-2)(-1) \Rightarrow C = \frac{1}{2};$$

$$s = -3 \Rightarrow 1 = D(-3)(-2)(-1) \Rightarrow D = -\frac{1}{6};$$

З урахуванням Таблиці зворотного перетворення Лапласа ми отримуємо:

$$\frac{1}{s+a} \Rightarrow e^{-at};$$

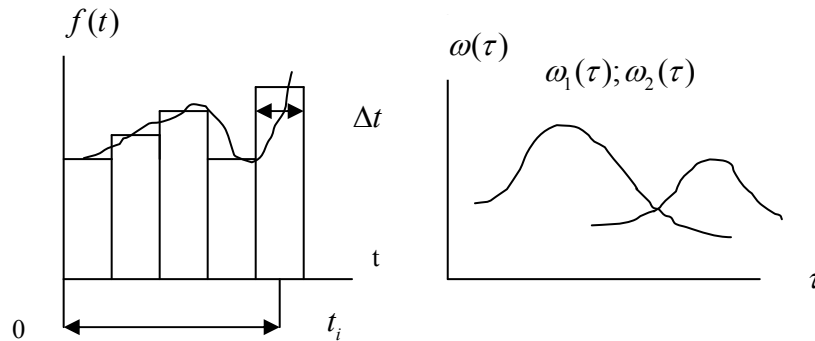
$$\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s+3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-2t};$$

Тема 3. ТИПОВІ ЛАНКИ САУ

Питання для самостійного вивчення

- 3.1 Реакція САУ на довільний вхідний сигнал. Інтеграл згортки.
- 3.2 Типові динамічні ланки САУ на прикладі аперіодичної ланки 1-го порядку.
- 3.3 Схеми з'єднання ланок САУ.
- 3.4 Правила побудови і перетворення структурних схем САУ.

3.1. Реакція САУ на довільний вхідний сигнал. Інтеграл згортки



Мал.1. Вхідний сигнал і функція ваги.

Реакцію САУ на довільний обмежений вхідний вплив - сигнал $f(t)$ можна представити через функцію ваги. Нехай $f(t) = 0$ якщо $t < 0$. Ми в змозі представити безперервний вхідний сигнал $f(t)$ у вигляді суми прямокутників, які мають тривалість Δt і висоту $f(t_i)$. За умов $\Delta t \rightarrow 0$ ми маємо невелику різницю між поведінкою САУ під впливом сигналу $f(t)$ з обмеженим значенням Δt і δ -функції. Таким чином, ми отримуємо:

$$f(t) \approx \sum_{i=1}^{\infty} f(t_i) \delta(t - t_i) \Delta t; \quad (3.1.1)$$

Для лінійної САУ сумарна реакція на послідовність прямокутних імпульсів дорівнює сумі реакцій на кожний елементарний імпульс окремо:

$$X_{\text{вих}}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f(t_i) \omega(t - t_i) \Delta t; \quad (3.1.2)$$

Якщо $\Delta t \rightarrow d\tau$ і за умов переходу до межі, ми отримуємо:

$$X_{\text{вих}}(t) = \int_0^{\infty} f(\tau) \omega(t - \tau) d\tau; \quad (3.1.3)$$

Оскільки для будь-якого $t > \tau \Rightarrow \omega(t - \tau) = 0$ (з урахуванням того, що функція ваги розглядається під час визначеного інтервалу), тоді ми в змозі переписати Рівн.(3.1.3):

$$X_{\text{вих}}(t) = \int_0^t f(\tau) \omega(t - \tau) d\tau; \quad (3.1.4)$$

Рівн.(3.1.4) називається **інтегралом згортки** двох функцій $f(t); \omega(t)$.

Використовуючи властивість комутативності, інтеграл згортки можна визначити таким чином:

$$X_{\text{вих}}(t) = \int_0^t f(t-\tau)\omega(\tau)d\tau; \quad (3.1.5)$$

Вихідна реакція лінійної САУ на довільний вплив $f(t)$ визначиться, якщо ми маємо значення передаточної функції САУ - $W(s)$, за допомогою якої ми можемо визначити функцію ваги:

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{M(s)}{D'(s)} \right]_{s=s_i} \exp(s_i t); \quad (3.1.6)$$

1. Інтеграл згортки дає можливість дійти до висновку, наскільки сильно вхідний вплив $f(t)$, який діє на САУ у момент, який був попереду даного моменту t , впливає на характер перехідного процесу САУ у цей час t .
2. Рівн.(3.1.4) відображає перехідний процес САУ під час моменту „спостереження” як накладення елементарних процесів $f(t_i)\omega(t-t_i)\Delta t_i$. Питома вага кожного із попередніх значень вхідного сигналу в сумарній реакції на виході враховується функцією ваги $\omega(t)$.
3. Вигляд функції ваги $\omega(t)$ визначає, наскільки сильно вплив $f(t)$, який діяв у моменти, які були попереду моменту t , впливали на перехідний процес САУ в момент „спостереження”.
4. Функцію ваги $\omega(t)$ можна визначити як „пам’ять” САУ, розуміючи її як ступінь впливу всіх попередніх значень вхідного сигналу на вихідну величину у будь-який наступний момент часу.
5. Функція ваги $\omega(t)$ визначає якість відтворення вхідної величини при походженні сигналу через САУ. Слід пам’ятати, що збільшення „пам’яті” САУ (тобто її функції ваги) повинно бути оптимальним, оскільки при значному її збільшенні зростає час перехідного процесу САУ.
6. Функція ваги $\omega(t)$ відображає не тільки передаточні властивості САУ (ланки), але також її сгладжувальні властивості.

3.2. Типові динамічні ланки САУ на прикладі аперіодичної ланки 1-го порядку

Ваша наступна задача – вивчити типові динамічні ланки САУ. Будь-яка реальна фізична САУ містить різні за фізичною природою ланки, які описуються відповідними диференційними рівняннями, які у свою чергу визначають поведінку САУ у ста лих і перехідних процесах. Вони є так званими „цеглинами”, з яких можна збудувати „будинок” САУ.

Всі динамічні ланки повинні розглядатись за допомогою наступних характеристик:

1. рівняння руху;
2. передаточна функція;

3. перехідна характеристика (step response);
4. функція ваги (impulse response);
5. частотна передаточна функція;
6. амплітудно-фазово-частотна характеристика;
7. амплітудно-частотна характеристика
8. фазово-частотна характеристика;
9. логарифмічна амплітудно-частотна характеристика;
10. логарифмічна фазово-частотна характеристика.

Аперіодична ланка 1-го порядку.

Рівняння руху:

$$T \frac{dX_{ВИХ}(t)}{dt} + X_{ВИХ}(t) = KX_{ВХ}(t); \quad (3.2.1)$$

$$(Ts + 1)X_{ВИХ}(s) = KX_{ВХ}(s);$$

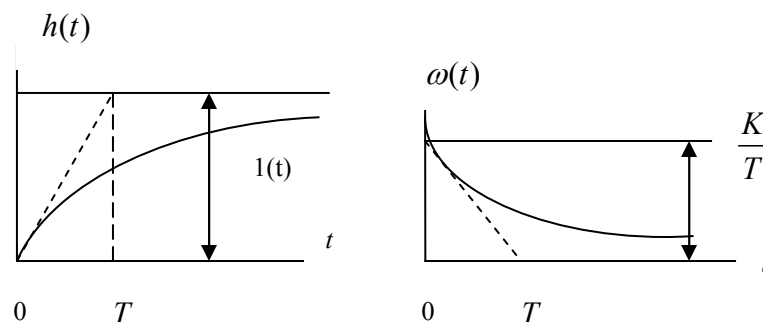
$$W(s) = \frac{K}{Ts + 1}; \quad (3.2.2)$$

Приклади:

- генератор (мотор) постійного струму з незалежним збудженням;
- RC контур.

$$h(t) = K(1 - e^{-t/T})1(t); \quad (3.2.3)$$

$$\omega(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T} 1(t); \quad (3.2.4)$$



Мал.2. Перехідна характеристика і функція ваги (step and impulse response).

Дотична пряма до перехідної характеристики на початку координат відрізає часовий сегмент, який дорівнює часовій константі T (і такий самий сегмент відрізується функцією ваги).

Частотна передаточна функція:

$$W(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega + 1}; \quad (3.2.5)$$

Амплітудно-фазово-частотна характеристика:

$$W(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega + 1} = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \exp(-j\arctg T\omega);$$

$$W(j\omega) = \frac{K}{1+T^2\omega^2} - j \frac{KT\omega}{1+T^2\omega^2} = P(\omega) + jQ(\omega); \quad (3.2.6)$$

Амплітудно-частотна характеристика:

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}; \quad (3.2.7)$$

Фазово-частотна характеристика:

$$\varphi(\omega) = -\arctg T\omega; \quad (3.2.8)$$

Графік амплітудно-фазово-частотної характеристики (якщо ω змінюється від 0 до ∞), представляє півколо.

Дійсно:

$$P^2(\omega) + Q^2(\omega) = A^2(\omega); \quad (3.2.9)$$

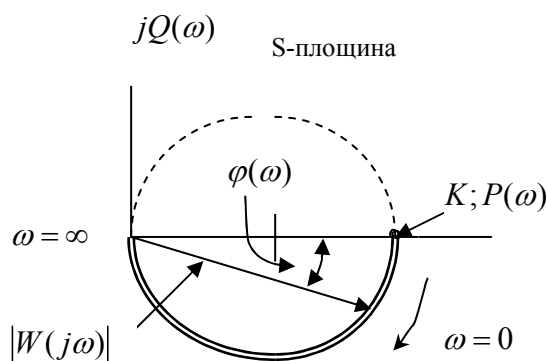
Але:

$$A^2(\omega) = KP(\omega);$$

Тоді ми отримуємо:

$$P^2(\omega) - KP(\omega) + \left(\frac{K}{2}\right)^2 + Q^2(\omega) = \left(\frac{K}{2}\right)^2; \quad (3.2.10)$$

$$\left[P(\omega) - \frac{K}{2}\right]^2 + Q^2(\omega) = \left(\frac{K}{2}\right)^2;$$

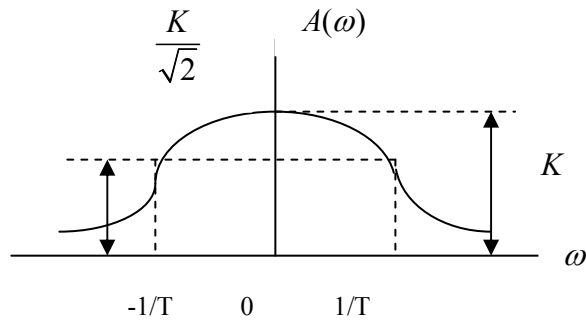


Мал.3. Амплітудно-фазово-частотна характеристика.

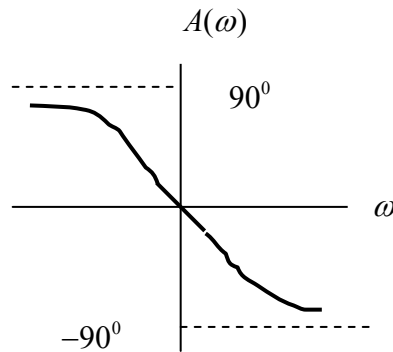
Координати центру цього кола - $(K/2; j0)$; його радіус - $R = \frac{K}{2}$.

Ми можемо відзначити одну цікаву точку на амплітудно-фазово-частотній характеристиці – якщо $\varphi(\omega) = 45^\circ$, тоді $\omega = \frac{1}{T}$.

За умови зміни кругової частоти від 0 до ∞ ми отримуємо верхнє півколо з такими ж параметрами.



Мал.4. Амплітудно-частотна характеристика



Мал.5. Фазово-частотна характеристика

Якщо кругова частота ω змінюється від 0 до ∞ , тоді фаза змінюється від 0° до -90° .

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика може бути отримана наступним чином:

$$L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg \left| \frac{K}{1 + Tj\omega} \right|;$$

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg |1 + Tj\omega|; \quad (3.2.11)$$

Ми маємо 2 складові $L(\omega)$:

А. $20 \lg K = \text{const.}$; (якщо $K=1$, тоді $20 \lg K = 0$).

В. $L(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2}$;

Подивимось більш уважно до 2-ої складової:

В1. В межах діапазону малих частот: $\omega \rightarrow 0$:

$$L(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2} \approx 20 \lg 1 = 0;$$

В2. В межах діапазону високих частот: $\omega \gg \frac{1}{T}$:

$$20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2} \approx 20 \lg T\omega;$$

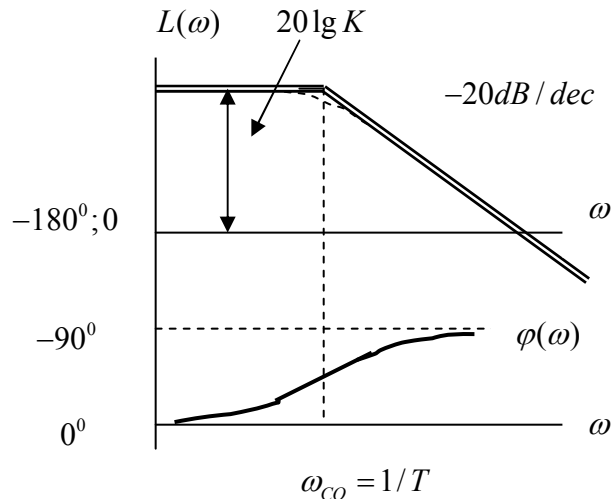
$L(\omega) = -20 \lg T\omega$; - це лінійна функція логарифму частоти, яка дорівнює 0, тобто яка сполучається з виразом $L(\omega)$ низьких частот при частоті $\omega_s = \frac{1}{T}$, яка називається частотою, що сполучає.

Таким чином, ми маємо можливість приблизно збудувати логарифмічна амплітудно-частотну характеристику у вигляді відрізків 2 прямих ліній:

A: $\omega \rightarrow 0$; or: $\omega \ll \frac{1}{T}$: $L(\omega) = 20 \lg K$;

B: $\omega \gg 0$; or: $\omega \gg \frac{1}{T}$: $L(\omega) = -20 \lg T\omega$; кут нахилу - (мінус 20 дБ/декаду).

У разі побудови точної характеристики ми маємо максимальну похибку 3 дБ при $\omega_{CO} = \frac{1}{T}$.



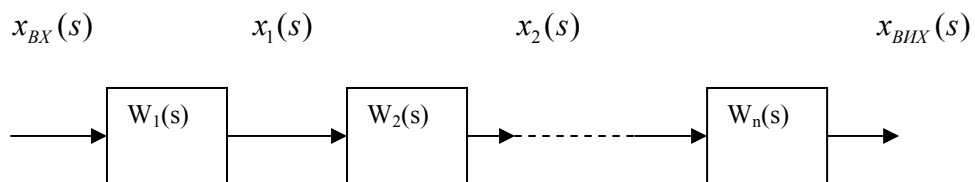
Мал.6. Логарифмічна амплітудно-частотна і фазово-частотна характеристика

3.3. Схеми зв'язку ланок

Будь-яка складна структурна схема САУ може бути побудована з використанням наступних 3 типів зв'язань ланок:

- послідовне;
- паралельне;
- зустрічно-паралельне.

А. Послідовне з'єднання ланок



Мал.7. Структурна схема послідовного з'єднання ланок

Розглянемо послідовне з'єднання ланок.

Ми маємо n ланок.

У цьому випадку можемо записати зображення Лапласа для вхідного і вихідного сигналів для кожної ланки:

$$\begin{aligned} x_1(s) &= W_1(s)x_{BX}(s); \\ x_2(s) &= W_2(s)x_1(s); \\ &\dots \\ x_{BHX}(s) &= W_n(s)x_{n-1}(s); \end{aligned}$$

У цьому випадку можемо записати наступний вираз:

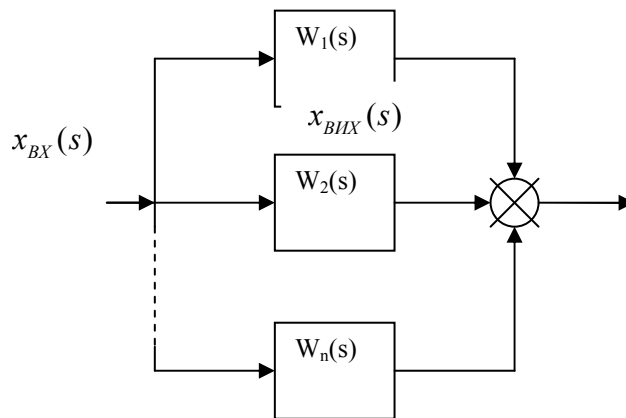
$$x_{ВИХ}(s) = W_1(s)W_2(s)...W_{n-1}(s)W_n(s)x_{ВХ}(s);$$

$$W(s) = \frac{x_{ВИХ}(s)}{x_{ВХ}(s)} = \prod_{i=1}^n W_i(s); \quad (3.3.1)$$

Еквівалентна передаточна функція послідовного з'єднання ланок дорівнює добутку їх передаточних функцій.

Це правило – 1-ша теорема Таблиці “Block diagram transformation theorems” – див. блок “Combining blocks in cascade”.

В. Паралельний зв'язок ланок.



Мал. 8. Структурна схема паралельного з'єднання ланок

У цьому випадку можемо записати наступний вираз:

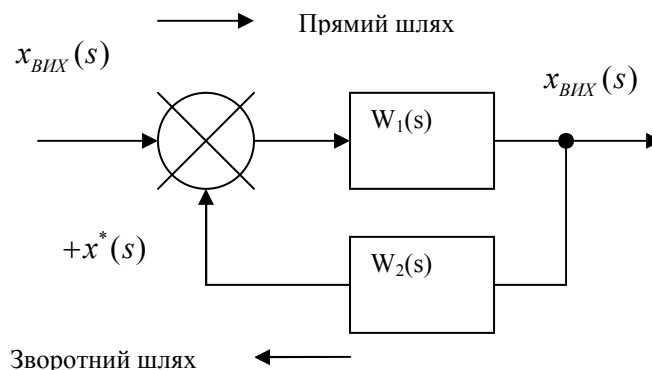
$$x_{ВИХ}(s) = x_1(s) + x_2(s) + ... + x_n(s) = x_{in}(s)W_1(s) + x_{in}W_2(s) + ... + x_{ВХ}W(s);$$

$$W(s) = \frac{x_{ВИХ}(s)}{x_{ВХ}(s)} = \sum_{i=1}^n W_i(s); \quad (3.3.2)$$

Еквівалентна передаточна функція паралельного з'єднання ланок дорівнює сумі їх передаточних функцій.

Це правило – 2-га і 3-я теореми Таблиці “Block diagram transformation theorems” – “Combining blocks in parallel”.

С. Зустрічно-паралельний зв'язок ланок.



Мал.9. Структурна схема зустрічно-паралельного зв'язку ланок.

Розглянемо випадок позитивного зворотного зв'язку:

$$x^*(s) = +W_2(s)x_{BHX}(s);$$

$$x_{BHX}(s) = W_1(s)[x_{BX}(s) + x^*(s)] = W_1(s)[x_{BX}(s) + x_{BHX}(s)W_2(s)] = W_1(s)x_{BX}(s) + W_1(s)W_2(s)x_{BHX}(s);$$

$$x_{BHX}(s)[1 - W_1(s)W_2(s)] = W_1(s)x_{BX}(s);$$

Поділимо ліву і праву частини на наступний вираз $x_{BX}(s)[1 - W_1(s)W_2(s)]$:

$$\frac{x_{BHX}(s)}{x_{BX}(s)} = \frac{W_1(s)}{1 - W_1(s)W_2(s)} = W(s); \quad (3.3.3)$$

Таким чином ми отримали вираз для випадку позитивного зворотного зв'язку.

У випадку негативного зворотного зв'язку:

$$\frac{x_{BHX}(s)}{x_{BX}(s)} = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} = W(s); \quad (3.3.4)$$

Таким чином, еквівалентна передаточна функція зустрічно-паралельного зв'язку ланок дорівнює відношенню: числівник – передаточна функція прямого шляху, знаменник – одиниця + (у випадку негативного знаку зворотного зв'язку) добуток передаточних функцій прямого і зворотного шляхів; або одиниця – (у випадку позитивного знаку зворотного зв'язку) добуток передаточних функцій прямого і зворотного шляхів.

Якщо $W_2(s) = -1$, тоді еквівалентна передаточна функція буде:

$$W(s) = \frac{x_{BHX}(s)}{x_{BX}(s)} = \frac{W_1(s)}{1 \mp W_1(s)}; \quad (3.3.5)$$

Це правило перетворення показано у Таблиці “Block diagram transformation theorems” – див. 4-ту теорему - “Eliminating feedback loop” – „Виключення зворотного зв'язку”.

Інші теореми цієї Таблиці можна просто довести.

6-та теорема “Rearranging summing points” – «Перестановка суматорів» показує, що комутація доданків (переміщення суматорів) не впливає на кінцеву суму.

7-ма теорема “Moving a summing point ahead of a block” – „Переміщення суматора з виходу на вхід блоку” можна просто довести:

Початкове рівняння щодо перемінних:

$$Z = XG \pm Y;$$

Після переміщення:

$$Z = (X \pm \frac{Y}{G})G = XG \pm Y;$$

9-та теорема “Moving a take-off point ahead of a block” – „Переміщення точки розгалуження з виходу на вхід блоку”:

$$Y = XG;$$

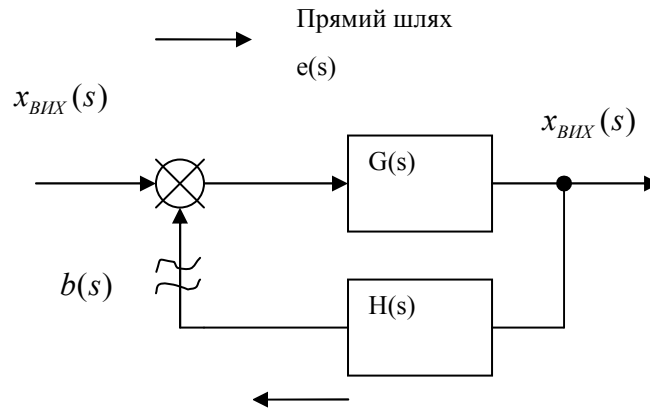
Після переміщення:

$$Y = XG;$$

Домашнє завдання – розібратись з умовами перетворення сигналів цієї Таблиці.

3.4. Правила побудови і перетворення структурних схем САУ

А. Узагальнена структурна схема САУ



Мал.10. Структурна схема САУ.

$G(s)H(s)$ - передаточна функція розімкненої САУ;

Передаточна функція замкненої САУ:

$$W_{CL}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}; \quad (3.4.1)$$

Умовні позначки:

$G(s)$ – добуток передаточних функцій вздовж прямого путі;

$H(s)$ - добуток передаточних функцій вздовж зворотного путі.

Необхідно ввести поняття передаточної функції відносно сигналу помилки:

$$W_e(s) = \frac{e(s)}{x_{BX}(s)};$$

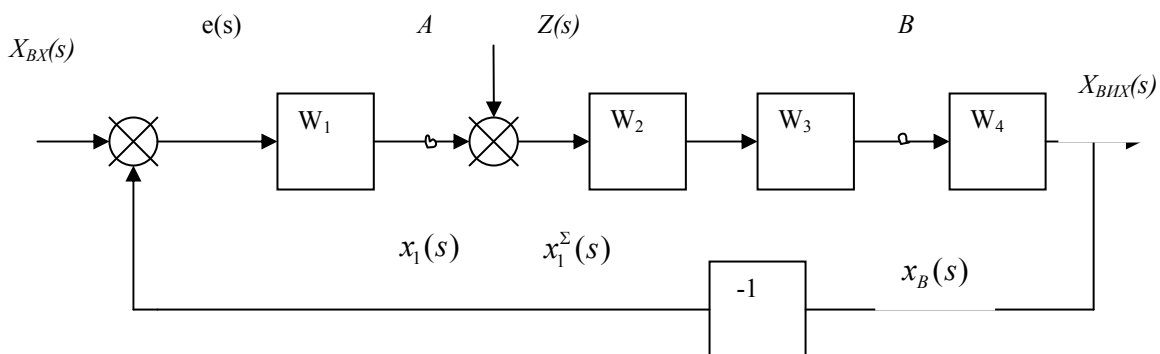
$$e(s) = x_{BX}(s) - b(s) = x_{BX}(s) - H(s)x_{BHX}(s);$$

We divide this equation into $x_{BX}(s)$:

$$\frac{e(s)}{x_{BX}(s)} = 1 - H(s) \frac{x_{BHX}(s)}{x_{BX}(s)};$$

$$W_e(s) = 1 - H(s)W_{ЗАМКН}(s);$$

$$W_e(s) = 1 - \frac{H(s)G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}; \quad (3.4.2)$$



Мал.11. Узагальнена структурна схема САУ

Розглянемо загальний випадок, коли зовнішнє збурення $Z(s)$ прикладається у точці A і наша задача – знайти реакцію САУ у точці B .

Ми повинні врахувати те, що будь-який сигнал розповсюджується тільки вздовж ланки згідно з напрямом стрілки (напрямом розповсюдження сигналу).

$$x_{BX}(s) = 0$$

$e(s)$ - сигнал помилки, який виник завдяки сигналу зовнішнього збурення $Z(s)$.

Тоді сигнал на виході ланки $W_1(s)$:

$$x_1(s) = W_1(s)e(s);$$

$$x_1^\Sigma(s) = x_1(s) + Z(s);$$

Таким чином, значення шуканого сигналу буде:

$$x_B(s) = W_2(s)W_3(s)x_1^\Sigma(s);$$

Якщо $x_{BX}(s) = 0$, тоді $e(s) = -x_{BIX}(s)$;

Але при цьому $x_{BIX}(s) = W_4(s)x_B(s)$;

В результаті ми отримуємо:

$$e(s) = -W_4(s)x_B(s);$$

$$x_1(s) = -W_1(s)W_4(s)x_B(s);$$

$$x_B(s) = \frac{W_2(s)W_3(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_4(s)} Z(s);$$

Ми вводимо такі поняття:

$W(s) = W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_4(s)$ - передаточна функція розімкненої САУ з урахуванням негативної ланки зворотного зв'язку $W_{зв'язку}(s) = -1$;

$$W_{AB}(s) = W_2(s)W_3(s);$$

Таким чином, ми отримали наступну передаточну функцію відносно збурення $Z(s)$:

$$W_Z(s) = \frac{W_{AB}(s)}{1 + W(s)}; \quad (3.4.3)$$

Узагальнюючі, ми можемо дійти до наступного висновку:

Якщо ми маємо декілька вхідних впливів (збурень), які прикладаються до різних точок лінійної САУ, тоді результуюча реакція у будь-якій точці САУ визначається як сума реакцій від кожного впливу (збурення), знайденого окремо.

Вираз для вихідної величини у випадку, коли на систему управління, крім вхідного сигналу $x_{BX}(s)$, діють ще n збурень у різних точках цієї системи, можна визначити за допомогою наступного виразу:

$$x_{BIX}(s) = \frac{1}{1 + W(s)} \left[W(s)x_{BX}(s) + \sum_{i=1}^n W_i(s)Z_i(s) \right]; \quad (3.4.4)$$

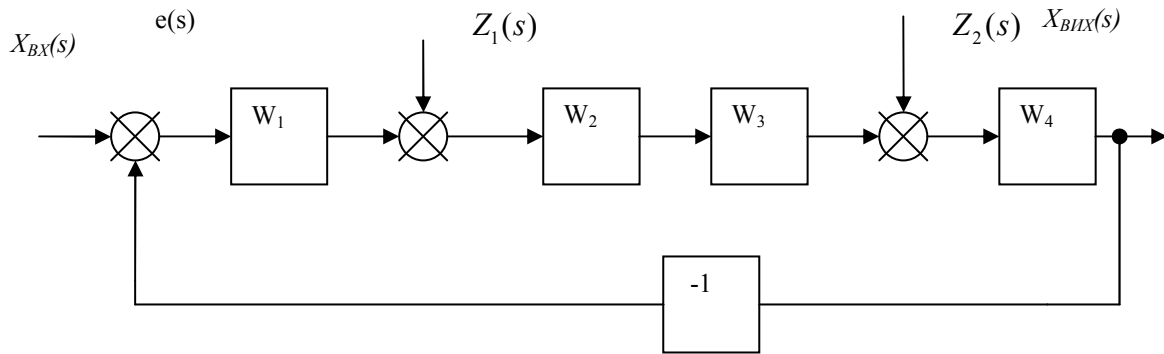
де:

$W(s)$ - передаточна функція розімкненої САУ;

$W_{IP}(s)$ - передаточна функція ланок прямого шляху:

$$W_{IP}(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s)$$

яка дорівнює добутку передаточних функцій ланок прямого шляху, які розташовані між точкою впливу (збурення) і виходом САУ.



Мал.12. Узагальнена структурна схема САУ

Розглянемо випадок, коли на додаток до вхідного сигналу $x_{BX}(s)$ ми маємо ще 2 збурення: $Z_1(s); Z_2(s)$.

Згідно з Рівн.(3.4.4) ми маємо такий вираз:

$$x_{BHX}(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} x_{BX}(s) + \frac{W_{Z1}(s)}{1+W(s)} Z_1(s) + \frac{W_{Z2}(s)}{1+W(s)} Z_2(s); \quad (3.4.5)$$

де:

$$W_{Z1}(s) = W_2(s)W_3(s)W_4(s);$$

$$W_{Z2}(s) = W_4(s);$$

Ви повинні відмітити, що передаточні функції $W_{Z1}(s); W_{Z2}(s)$ мають однаковий знаменник $[1+W(s)]$ і відрізняються лише значенням числівника.

Таким чином, незалежно від точки прикладання сигналу впливу (збурення), характеристичне рівняння САУ $-[1+W(s)]$ залишається незмінним.

З урахуванням Рівн.(3.4.5) ми можемо визначити рівняння сигналу помилки САУ:

$$x_e(s) = \frac{1}{1+W(s)} x_{BX}(s) - \frac{W_{Zi}(s)}{1+W(s)} Z_i(s);$$

Якщо $Z_i(s) = 0$, тоді ми маємо наступний вираз для сигналу помилки САУ:

$$W_e(s) = \frac{1}{1+W(s)}; \quad (3.4.6)$$

де $W(s)$ - передаточна функція розімкненої САУ.

Наступний вираз:

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)}; \quad (3.4.7)$$

називається головним оператором передаточної функції замкненої САУ.

Тоді передаточна функція сигналу помилки буде:

$$W_e(s) = 1 - \Phi(s) = 1 - \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{1+W(s) - W(s)}{1+W(s)} = \frac{1}{1+W(s)}; \quad (3.4.8)$$

Якщо $W(s) = \frac{M(s)}{D(s)}$, тоді передаточна функція буде наступною:

$$W_{\text{ЗАМКН}}(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{\frac{M(s)}{D(s)}}{1+\frac{M(s)}{D(s)}} = \frac{M(s)}{M(s)+D(s)};$$

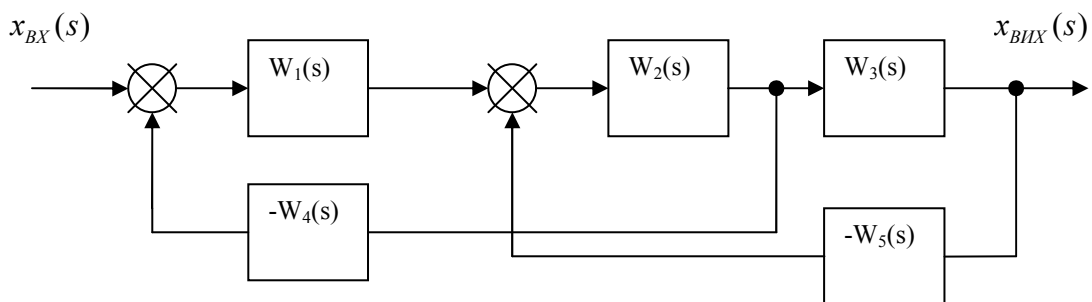
Таким чином, характеристичне рівняння замкненої САУ може визначатись наступним виразом:

$$\begin{aligned} D_{\text{ЗАМКН}}(s) &= M(s) + D(s) = 0; \\ 1 + W(s) &= 0; \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

В. Перетворення структурних схем САУ

Будь-яка САУ має декілька замкнених систем автоматичного управління (сучасний літак має 50 і більше систем). Ваша головна задача під час аналізу будь-якої САУ – провести перетворення її структурної схеми за допомогою Правил перетворення структурних схем з метою отримання еквівалентної передаточної функції, яка буде зручною для подальшого аналізу. Ви маєте також у Вашому розпорядженні необхідні функції Matlab (series, parallel, feedback), які можуть надати Вам необхідну допомогу у цьому питанні.

Приклад 1.

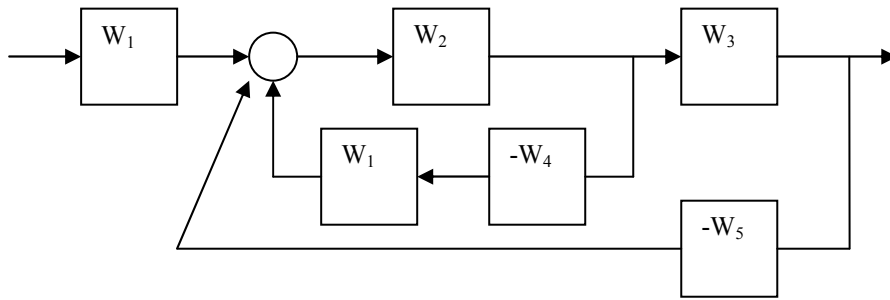


Мал.13. Структурна схема САУ

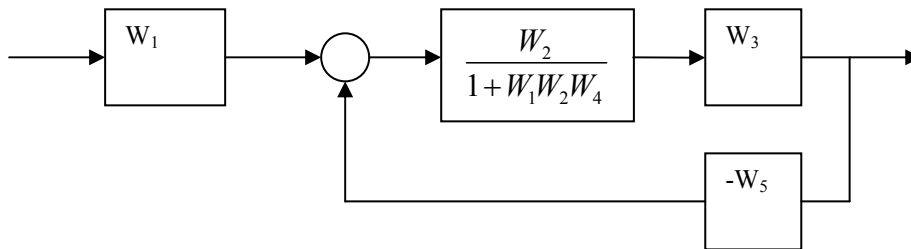
Процедура перетворення структурної схеми.

- Крок 1. Теорема #8: „Moving a summing point beyond a block”;
- Крок 2. Теорема #4: „Eliminating a feedback loop” згідно з Рівн.(3.3.5);
- Крок 3. Теорема #1: „Combining blocks in a cascade” згідно з Рівн.(3.3.1);
- Крок 4. Теорема #1: „Combining blocks in a cascade” згідно з Рівн.(3.3.1);
- Крок 5. Теорема #1: „Combining blocks in a cascade” згідно з Рівн.(3.3.1).

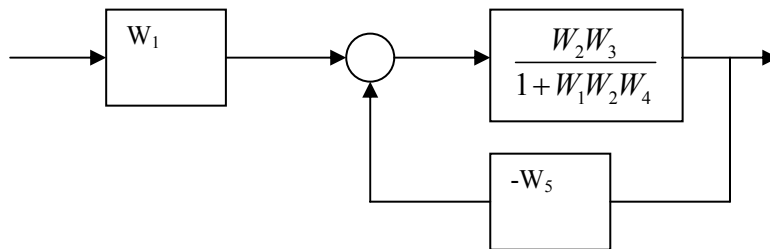
Крок 1.



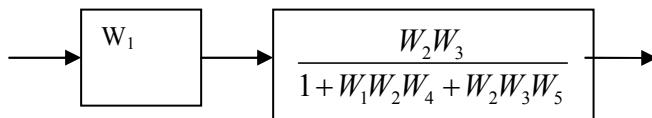
Крок 2.



Крок 3.



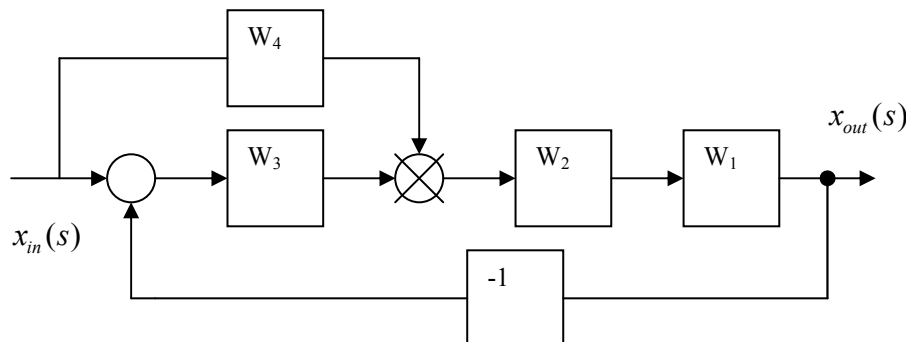
Крок 4.



Крок 5.

$$W(s) = \frac{x_{вих}(s)}{x_{вх}(s)} = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_4(s) + W_2(s)W_3(s)W_5(s)}$$

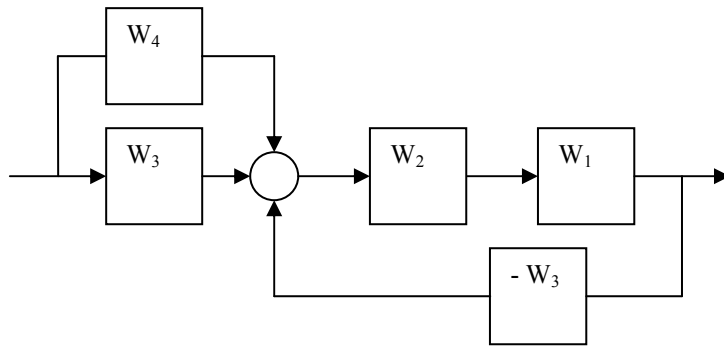
Приклад 2. (для самостійного навчання)



Мал.14. Структурна схема САУ

Крок 1.

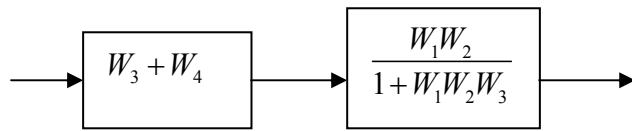
Теорема #8: „Moving a summing point beyond a block”;



Крок 2.

Теорема #2: „Combining blocks in parallel”;

Теорема #4: „Eliminating a feedback loop” згідно з Рівн.(3.3.5);



Крок 3.

Теорема #1: „Combining blocks in a cascade” згідно з Рівн.(3.3.1).

$$\Phi(s) = \frac{[W_3 + W_4]W_1W_2}{1 + W_1W_2W_3};$$