2. ПРАКТИКУМ З РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

2.1. Функції обмеженої варіації (модуль №1).

1. Монотонні функції

Приклад 2.1. Побудувати монотонну функцію на відрізку $[0,1]$, що має 3 точки розриву: $x=\frac{1}{4}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{4}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<\frac{1}{4};\\ x+\frac{1}{4}, & \frac{1}{4}\le x<\frac{1}{2};\\ x+\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\le x<\frac{3}{4};\\ x+\frac{3}{4}, & \frac{3}{4}\le x\le 1.\end{cases}$$

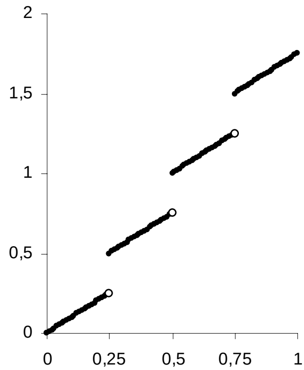

Рис. 2.1

Графік функції зображено на рис. 2.1.

Доведемо зростання функції.

Нехай $x_1<x_2$. Розглянемо $f(x_2)-f(x_1)$. Якщо x_1 і x_2 належать одному із проміжків $\left[0;\frac{1}{4}\right)$ або $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$, або $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$, або $\left[\frac{3}{4};1\right]$, то $f(x_2)-f(x_1)=x_2-x_1>0$. Якщо x_1 і x_2 належать різним проміжкам, то $f(x_2)-f(x_1)=x_2-x_1+C$, де C може приймати значення $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ або $\frac{3}{4}$ в залежності від того, якій саме парі проміжків належать точки x_1 і x_2. У будь-якому із зазначених випадків $f(x_2)-f(x_1)>0$. Отже, функція $f(x)$ зростає на $[0;1]$.■

Приклад 2.2. Побудувати монотонну функцію на відрізку $[0,1]$, що має n точок розриву.

Розв'язання. Розіб'ємо відрізок $[0,1]$ на $n+1$ рівних частин точками $\left\{\frac{k}{n+1}\right\}_{k=1}^{n}$. Оберемо ці точки як точки розриву функції. Шуканою є функція вигляду

$$f(x)=\left\{x+\frac{k}{n+1},\ \text{якщо}\ \frac{k}{n+1}\le x<\frac{k+1}{n+1}\right\}_{k=0}^{n},\quad f(1)=1+\frac{n}{n+1}.$$

Доведення монотонності здійснюється аналогічно прикладу 2.1. ■

Приклад 2.3. Побудувати монотонну функцію на відрізку $[0,1]$, що має зчисленну множину точок розриву.

Розв'язання. Оберемо точки $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ як точки розриву. Шукана функція має вигляд

$$f(x)=\left\{\frac{x}{2^n},\ \text{якщо}\ \frac{1}{2^n}<x\le\frac{1}{2^{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty},\quad f(0)=0\,.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0=f(0)$, то в точці $x=0$ немає розриву. Графік функції зображено на рис. 2.2.

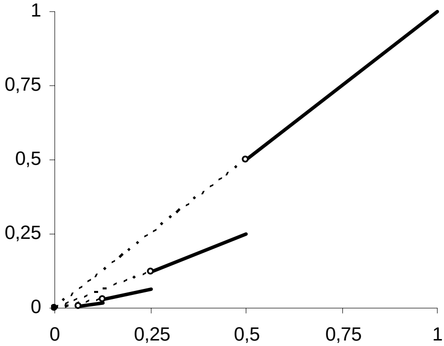

Рис. 2.2

Доведемо зростання функції. Нехай $x_1<x_2$. Якщо x_1 і x_2 належать одному із проміжків $\left(\frac{1}{2^n};\frac{1}{2^{n-1}}\right]$ $(n\in\mathbb{N})$, то $f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2-x_1}{2^n}>0$. Якщо x_1 і x_2 належать різним проміжкам, то меншому аргументу буде відповідати значення функції, знаменник якого має більший показник степеня двійки, тобто $f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{2^{k-1}}-\frac{x_1}{2^{k+m-1}}$, де $k,m\in\mathbb{N}$. Тут $x_2>x_1\ge 0\wedge 2^{k-1}<2^{k+m-1}$ ($k,m\in\mathbb{N}$), тому $f(x_2)-f(x_1)>0$. У будь-якому із зазначених випадків $f(x_2)-f(x_1)>0$. Крім того, помітимо, що $f(0)=0$, а $f(x)>0\,\forall x>0$. Отже, функція $f(x)$ зростає на $[0;1]$.■

2. Відображення множин.

Приклад 2.4. При дії відображення $f:X\to Y$ знайти образи множин $A_i\subset X, i=\overline{1,4}$ і прообрази $B_j\subset X,\ j=\overline{1,4}$ якщо а) $f(x)=\sin x$, $X=\mathbb{R}, Y=[-1;1]$,

$A_1=[-1;1], A_2=[-2;2], A_3=\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{6}\right], A_4=\left[\frac{\pi}{6};\pi\right]$,

$B_1=\{0\}, B_2=\left\{\frac{1}{2}\right\}, B_3=[-1;1), B_4=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$;

б) $f(x)=[x]$, $X=\mathbb{R}, Y=\mathbb{R}$, тут $[x]$ – ціла частина дійсного числа x: найбільше ціле число, що не перевищує x,

$A_1=[-1;5], A_2=[-2;2), A_3=(0;+\infty), A_4=\{7,1\}$,

$B_1=\{5\}, B_2=\left\{\frac{1}{2}\right\}, B_3=\{-3;1;2\}, B_4=[-1;1]$.

Розв'язання. **а)** Графік функції $f(x)=\sin x$ зображено на рис. 2.3. На відрізку $A_1=[-1;1]$ функція зростає, тому найменше значення вона приймає при $x=-1$, яке дорівнює $f(1)=-\sin 1$, а найбільше – при $x=1$, при чому $f(1)=\sin 1$. Тому

$$f(A_1)=[-\sin 1;\sin 1].$$

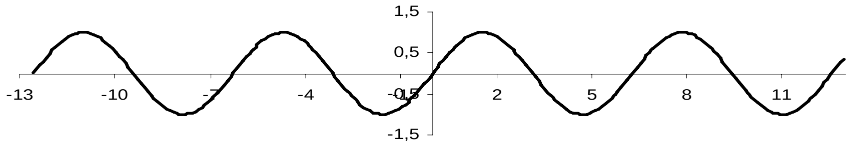

Рис. 2.3

На частині $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ відрізка $A_2=[-2;2]$ функція приймає усі значення із множини $Y=[-1;1]$, тому $f(A_2)=[-1;1]$.

На відрізку $A_3=\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{6}\right]$ функція $f(x)=\sin x$ спадає, тому найменше значення приймає при $x=\frac{5\pi}{6}$, тобто $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$, а найбільше – при $x=\frac{3\pi}{4}$, тобто $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Тому

$$f(A_3)=\left[\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

На частині $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ відрізка $A_4=\left[\frac{\pi}{6};\pi\right]$ функція приймає значення із множини $[0;1]$, а на частині $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$ значення функції лежить всередині цієї множини, а саме: $f\left(\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left[\frac{1}{2};1\right)\subset[0;1]$. Тому $f(A_4)=[0;1]$.

Тепер знайдемо прообраз множини $B_1=\{0\}$. Для цього розв'яжемо рівняння

$$\sin x=0,\ \ x=\pi n,\, n\in\mathbb{Z}.$$

Отже, $f^{-1}(B_1)=\{\pi n,\, n\in\mathbb{Z}\}$.

Для множини $B_2=\left\{\frac{1}{2}\right\}$ аналогічно:

$$\sin x=\frac{1}{2},\quad x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\, n\in\mathbb{Z}.$$

Звідки $f^{-1}(B_2)=\left\{(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\, n\in\mathbb{Z}\right\}$.

Щоб знайти прообраз множини $B_3=[-1;1)$, помітимо, що функція $f(x)=\sin x$ приймає значення на відрізку $[-1;1]$, тому розв'яжемо лише нерівність

$$\sin x\neq 1,\ \ x\neq\frac{\pi}{2}+2\pi n,\, n\in\mathbb{Z}.$$

Тому $f^{-1}(B_3)=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n,\, n\in\mathbb{Z}\right\}$.

Для отримання прообразу множини $B_4=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ розв'яжемо нерівність

$$-\frac{1}{2}\le\sin x\le\frac{1}{2},$$

$$-\frac{\pi}{6}+\pi n\le x\le\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \ n\in\mathbb{Z}.$$

Звідки $f^{-1}(B_4)=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n\right]$.

б) Графік функції $f(x)=[x]$ зображено на рис. 2.4. В точках відрізка $A_1=[-1;5]$ функція приймає значення із скінченної множини $\{-1;0;1;2;3;4;5\}$, яка і є образом даного відрізка, тобто

$$f(A_1)=\{-1;0;1;2;3;4;5\}.$$

Аналогічно, для $A_2=[-2;2)$ маємо $f(A_2)=\{-2;-1;0;1\}$.

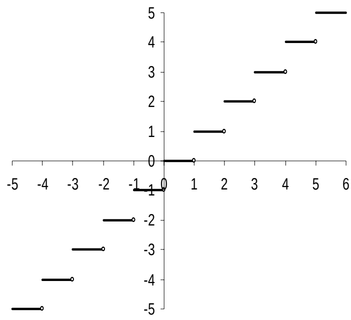

Рис. 2.4.

Зверніть увагу на відмінності в прообразах, пов'язані з включенням або виключенням правих межових точок множин A_1 і A_2!

Очевидно, що для $A_3=(0;+\infty)$ отримаємо $f(A_3)=\mathbb{N}\bigcup\{0\}$.

Оскільки ціла частина $[7,1]=7$, то $f(A_4)=\{7\}$.

Зважаючи на те, що ціла частина чисел, що лежать на півінтервалі $[5;6)$ дорівнює 5, приходимо до висновку: $f^{-1}(B_1)=[5;6)$ для $B_1=\{5\}$.

Оскільки ціла частина дійсного числа є цілим числом, то $f^{-1}(B_2)=\varnothing$ для $B_2=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Ціла частина дійсних чисел x приймає значення із множини $B_3=\{-3;1;2\}$ для $x\in[-3;-2)\bigcup[1;3)$, тому $f^{-1}(B_3)=[-3;-2)\bigcup[1;3)$.

Ціла частина дійсних чисел приймає тільки цілі значення, тому для $B_4=[-1;1]$ одержимо:

$$f^{-1}(B_4)=f^{-1}([-1;1])=f^{-1}(\{-1;0;1\})=[-1;2). \quad ■$$

3. Похідні числа.

Приклад 2.5. Знайти похідні числа функцій. Якщо задана точка, то знайти похідне число в цій точці.

а) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при} \quad x\in[0;1), \\ -x+3 & \text{при} \quad x\in[1;2], \end{cases}$; **б)** $f(x)=\operatorname{sgn} x$;

в) $f(x)=\{x\}$; **г)** $f(x)=\{\sin \pi x\}$, $x=-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}$.

(тут $[t]$ – ціла частина дійсного числа t; $\{t\}=t-[t]$ – дробова частина числа t).

Розв'язання. а) Графік функції зображено на рис. 2.5. Її похідна при $x\in[0;1)$ дорівнює $f'(x)=2x$, а при $x\in(1;2]$ вона дорівнює $f'(x)=-1$. Тоді всі похідні числа в цих точках співпадають із значеннями своїх похідних.

Нехай $x=1$.

1) У випадку $\{h_n>0\}$ і $h_n\to 0$

$$\lim_n\frac{f(1+h_n)-f(1)}{h_n}=\lim_n\frac{\left(3-(1+h_n)\right)-2}{h_n}=$$

$$=\lim_n\frac{-h_n}{h_n}=-1.$$

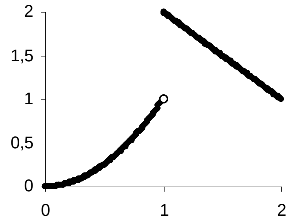

Рис. 2.5

2) У випадку $\{h_n<0\}$ і $h_n\to 0$

$$\lim_n\frac{f(1+h_n)-f(1)}{h_n}=\lim_n\frac{\left(1+h_n\right)^2-2}{h_n}=\left[\frac{-1}{-0}\right]=+\infty .$$

3) у випадку, коли $\{h_n\}$ є довільною послідовністю, яка прагне до нуля ($h_n\to 0$), то вона

– може містити скінченну кількість від'ємних членів, тоді це рівносильне випадку 1;

– може містити скінченну кількість додатних членів, тоді це зводиться до випадку 2;

– містить нескінченну кількість як додатних, так і від'ємних членів, тоді її можна розбити на дві підпослідовності, одна із яких утворюється із додатних членів, а друга – із від'ємних. Для першої потрапляємо у випадок 1, а для другої – у випадок 2. Оскільки відповідні підпослідовності послідовності $\left\{\sigma_n=\frac{f(0+h_n)-f(0)}{h_n}\right\}$ мають дві різні граничні точки -1 і $+\infty$, то послідовність $\{\sigma_n\}$ є розбіжною.

<u>Висновок</u>: в точці $x=1$ функція має два похідні числа: -1 і $+\infty$.

б) Якщо $x\neq 0$, то такий x належить проміжку, на якому функція $f(x)=\operatorname{sgn}x$ є сталою, тому в цій точці $f'(x)=0$. Тому усі похідні числа в точці $x\neq 0$ співпадають із значенням похідної, тобто дорівнюють 0.

Якщо $x=0$, то

1) у випадку $\{h_n>0\}$ і $h_n\to 0$

$$\lim_n\frac{f(0+h_n)-f(0)}{h_n}=\lim_n\frac{\operatorname{sgn}h_n-\operatorname{sgn}0}{h_n}=\lim_n\frac{1-0}{h_n}=+\infty ,$$

2) у випадку $\{h_n<0\}$ і $h_n\to 0$

$$\lim_n\frac{f(0+h_n)-f(0)}{h_n}=\lim_n\frac{\operatorname{sgn}h_n-\operatorname{sgn}0}{h_n}=\lim_n\frac{-1-0}{h_n}=+\infty ;$$

3) Випадок, коли $\{h_n\}$ є довільною послідовністю, яка прагне до нуля, є майже аналогічним загальному випадку прикладу 2.5 а). Розгляньте цей випадок самостійно ✍!

<u>Висновок</u>: в точці $x = 0$ функція має одне похідне число: $+\infty$.

в) Оскільки $f(x) = \{x\} = x - [x]$, то при $x \notin \mathbb{Z}$ $f'(x) = 1$. Тоді усі похідні числа дорівнюють 1.

Якщо $x = k \in \mathbb{Z}$, то

1) у випадку $\{h_n > 0\}$ і $h_n \to 0$

$$\lim_n \frac{f(k+h_n) - f(k)}{h_n} = \lim_n \frac{\{k+h_n\} - 0}{h_n} = \lim_n \frac{k + h_n - \overbrace{[k+h_n]}^{=k}}{h_n} = \lim_n \frac{h_n}{h_n} = 1;$$

2) у випадку $\{h_n < 0\}$ і $h_n \to 0$

$$\lim_n \frac{f(k+h_n) - f(k)}{h_n} = \lim_n \frac{k + h_n - \overbrace{[k+h_n]}^{=k-1}}{h_n} = \lim_n \frac{h_n + 1}{h_n} = \left[\frac{+1}{-0}\right] = -\infty;$$

3) Випадок, коли $\{h_n\}$ є довільною послідовністю, яка прагне до нуля, є аналогічним загальному випадку прикладу 2.5 а).

<u>Висновок</u>: в точках $x = k \in \mathbb{Z}$ функція має два похідні числа: 1 і $-\infty$.

г) Графік функції $f(x) = \{\sin \pi x\}$ зображено на рис. 2.14.

Точка $x = -\dfrac{1}{2}$ не є точкою розриву функції, і в достатньо малому околі цієї точки функція задається формулою $f(x) = \sin x + 1$. Отже, в цій точці функція диференційовна, а її похідні числа дорівнюють похідній

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi \cos \pi x\Big|_{x=-\frac{1}{2}} = 0.$$

Той самий висновок можна отримати із геометричного змісту похідної (див. рис. 2.14): дотична до графіку в цій точці паралельна осі абсцис, тому має кутовий коефіцієнт, що дорівнює 0, йому і дорівнює значення похідної.

Нехай $x = 0$, тоді в цій точці функція має розрив першого роду.

1) У випадку $\{h_n > 0\}$ і $h_n \to 0$

$$\lim_n \frac{f(0+h_n) - f(0)}{h_n} = \lim_n \frac{\sin \pi h_n - \overbrace{[\sin \pi h_n]}^{=0} - 0}{h_n} = \lim_n \frac{\sin \pi h_n}{h_n} = \pi.$$

2) У випадку $\{h_n < 0\}$ і $h_n \to 0$

$$\lim_n \frac{f(0+h_n) - f(0)}{h_n} = \lim_n \frac{\sin \pi h_n - \overbrace{[\sin \pi h_n]}^{=-1} - 0}{h_n} = \lim_n \frac{\sin \pi h_n - (-1)}{h_n} = \left[\frac{1}{-0}\right] = -\infty.$$

3) Загальний випадок аналогічний прикладу 2.5 а).

Висновок: в точці $x=0$ функція має два похідні числа: π і $+\infty$.

Нехай $x=\frac{1}{2}$, тоді в цій точці функція має усувний розрив.

1) У випадку $\{h_n>0\}$ і $h_n\to 0$

$$\lim_n \frac{f\left(\frac{1}{2}+h_n\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{h_n}=\lim_n \frac{\sin\pi\left(\frac{1}{2}+h_n\right)-\overbrace{\left[\sin\pi\left(\frac{1}{2}+h_n\right)\right]}^{=0}-0}{h_n}=$$

$$=\lim_n \frac{\cos\pi h_n}{h_n}=\left[\frac{1}{+0}\right]=+\infty.$$

2) У випадку $\{h_n<0\}$ і $h_n\to 0$

$$\lim_n \frac{f\left(\frac{1}{2}+h_n\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{h_n}=\lim_n \frac{\sin\pi\left(\frac{1}{2}+h_n\right)-\overbrace{\left[\sin\pi\left(\frac{1}{2}+h_n\right)\right]}^{=0}-0}{h_n}=$$

$$=\lim_n \frac{\cos\pi h_n}{h_n}=\left[\frac{1}{-0}\right]=-\infty.$$

3) Загальний випадок аналогічний прикладу 2.5 а).

Висновок: в точці $x=\frac{1}{2}$ функція має два похідні числа: $-\infty$ і $+\infty$. ■

Зауважимо, що в точках розриву I роду або усувних можна спостерігати наступне. Якщо односторонній стрибок в точці дорівнює нулю, то одне із похідних чисел дорівнює відповідній односторонній похідній. Якщо односторонній стрибок додатній (від'ємний), то одне із похідних чисел дорівнює $+\infty$ ($-\infty$).

4. Дослідження функцій на обмеженість їх зміни. Необхідна умова обмеженості варіації.

Приклад 2.6. Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{при } x=0,\\ x^2\cos\frac{\pi}{x}, \text{при } x\neq 0\end{cases}$$

має обмежену варіацію на відрізку $[0;1]$.

Розв'язання. Обчислимо похідну цієї функції у кожній точці відрізка $[0;1]$. Нехай спочатку $x\in(0;1]$, тоді

$$f'(x)=2x\cdot\cos\frac{\pi}{x}+\pi\sin\frac{\pi}{x}.$$

В точці $x=0$:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\cos\frac{\pi}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\underbrace{\Delta x}_{нмф}\cdot\underbrace{\cos\frac{\pi}{\Delta x}}_{обм}=0.$$

Тоді

$$f'(x)=\begin{cases}2x\cdot\cos\frac{\pi}{x}+\pi\sin\frac{\pi}{x}\text{ при } x\neq 0,\\ 0\text{ при } x=0.\end{cases}$$

На $(0;1]$ похідна обмежена:

$$|f'(x)|=\left|2x\cos\frac{\pi}{x}+\pi\sin\frac{\pi}{x}\right|\le\left|2x\cos\frac{\pi}{x}\right|+\left|\pi\sin\frac{\pi}{x}\right|\le 2+\pi,$$

в точці $x=0$

$$\left|f'(0)\right|=0\le 2+\pi.$$

Отже, $\forall x\in[0,1]\quad |f'(x)|\le 2+\pi$, тому похідна обмежена на $[0;1]$, звідки випливає обмеженість її варіації. ■

Приклад 2.7. Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при}\quad x=0,\\ \frac{1}{x} & \text{при}\quad x\neq 0\end{cases}$$

має необмежену варіацію на відрізку $[0,1]$.

Розв'язання. Дана функція є необмеженою, оскільки вона є нескінченно великою в точці $x=0$: $\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty$. Будь-яка необмежена функція має необмежену варіацію (необхідна умова обмеженості варіації). ■

Приклад 2.8. Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при}\quad x=0,\\ x\ \sin\frac{1}{x} & \text{при}\quad x\neq 0\end{cases}$$

має необмежену варіацію на відрізку $\left[0,\frac{2}{\pi}\right]$.

Розв'язання. Нехай k – довільне натуральне число. Розглянемо розбиття відрізку $\left[0,\frac{2}{\pi}\right]$ точками

$$R_k^*:\ 0<\frac{2}{\pi(2k+1)}<\frac{2}{\pi(2k-1)}<\ldots<\frac{2}{3\pi}<\frac{2}{\pi}$$

на $k+1$ відрізок і утворимо суми σ_k

$$\sigma_k=\left(\frac{2}{\pi(2k+1)}-0\right)+\left(\frac{2}{\pi(2k+1)}+\frac{2}{\pi(2k-1)}\right)+\left(\frac{2}{\pi(2k-1)}+\frac{2}{\pi(2k-3)}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{2}{5\pi}+\frac{2}{3\pi}\right)+\left(\frac{2}{3\pi}+\frac{2}{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\left[1+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\ldots+\frac{2}{2k+1}\right].$$

В квадратних дужках знаходиться k-та частинна сума розбіжного ряду $1+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\ldots+\frac{2}{2k+1}+\ldots$; при $k\to\infty$ ця сума прагне до нескінченності. Отже,

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\sup_R V(f,R)\geq\sup_k V(f,R_k^*)=\sup_k\left(1+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\ldots+\frac{2}{2k+1}\right)=\infty.\ \blacksquare$$

Приклад 2.9. Знайти варіацію функції $f(x)=\operatorname{sgn}x$ на відрізку $[-1,1]$.

Розв'язання. На цьому відрізку функція зростає нестрого, тому

$$\overset{1}{\underset{-1}{V}}(f)=f(1)-f(-1)=1-(-1)=2.\ \blacksquare$$

5. Обчислення варіацій функції.

Приклад 2.10. Обчислити $\overset{2}{\underset{0}{V}}(f)$, якщо

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{при } x\in[0;1),\\ 5, & \text{при } x=1,\\ -x+3, & \text{при } x\in(1;2].\end{cases}$$

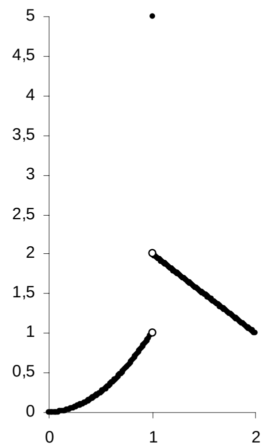

Рис. 2.6

Розв'язання. Графік функції зображено на рис. 2.6. Розіб'ємо відрізок $[0,2]$ на два відрізки $[0,1]$ і $[1,2]$. На відрізку $[0,1]$ функція зростає, а на відрізку $[1,2]$ – спадає, тому

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}f=f(1)-f(0)=5-0=5,$$

$$\overset{2}{\underset{1}{V}}(f)=f(1)-f(2)=5-1=4,$$

звідки в силу адитивності повної варіації

$$\overset{2}{\underset{0}{V}}(f)=\overset{1}{\underset{0}{V}}(f)+\overset{2}{\underset{1}{V}}(f)=5+4=9\ .\ \blacksquare$$

Приклад 2.11. Нехай функція $f(x)$ на півінтервалі $[a,b)$ зростає, а в точці b приймає значення $f(b)$ і границя $\exists f(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$ скінченна. Довести, що

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\left[f(b-0)-f(a)\right]+\left|f(b)-f(b-0)\right|.$$

Розв'язання. Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ точками $a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b$. Тоді

$$V=\sum_{i=1}^{n}\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_{i-1}\right)\right|=f\left(x_1\right)-f\left(x_0\right)+f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)+...+$$
$$+f\left(x_{n-1}\right)-f\left(x_{n-2}\right)+\left|f\left(x_n\right)-f\left(x_{n-1}\right)\right|=f\left(x_{n-1}\right)-f\left(x_0\right)+$$
$$+\left|f\left(x_n\right)-f\left(x_{n-1}\right)\right|=f\left(x_{n-1}\right)-f\left(a\right)+\left|f\left(b\right)-f\left(x_{n-1}\right)\right|;$$
$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\sup_R V=\lim_{x_{n-1}\to b-0}f\left(x_{n-1}\right)-f\left(a\right)+\left|f\left(b\right)-\lim_{x_{n-1}\to b-0}f\left(x_{n-1}\right)\right|=$$
$$=\left[f(b-0)-f(a)\right]+\left|f(b)-f(b-0)\right|.\ \blacksquare$$

Приклад 2.12. Нехай функція $f(x)$ на інтервалі (a,b) монотонна, а в точках a і b приймає значення $f(a)$ і $f(b)$, а також $\exists f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ і $\exists f(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$ скінченні. Довести, що

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\left|f(a+0)-f(a)\right|+\left|f(b-0)-f(a+0)\right|+\left|f(b)-f(b-0)\right|.$$

Розв'язання. Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на два відрізки $[a,c]$ і $[c,b]$ $(a<c<b)$, тоді $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)$. На кожному із двох нових відрізків функція задовольняє умовам, аналогічним попередньому прикладу, тому

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)=\left|f(a+0)-f(a)\right|+\left|f(c)-f(a+0)\right|+$$
$$+\left|f(b-0)-f(c)\right|+\left|f(b)-f(b-0)\right|.$$

Внаслідок монотонності функції обидва модулі в сумі $\left|f(c)-f(a+0)\right|+\left|f(b-0)-f(c)\right|$ відкриваються з однаковими знаками, тому ця сума дорівнює $\left|f(b-0)-f(a+0)\right|$. Звідки і отримаємо потрібну формулу. $\blacksquare$

Приклад 2.13. Нехай функція $f(x)$ монотонна на кожному із інтервалів $(c_0,c_1),(c_1,c_2),...,(c_{m-1},c_m)$ де

$$a = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_{m-1} < c_m = b.$$

Тоді

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sum_{k=1}^{m}\Big[\big|f(c_{k-1}+0) - f(c_{k-1})\big| + \big|f(c_k - 0) - f(c_{k-1}+0)\big| + \big|f(c_k) - f(c_k - 0)\big|\Big]. \quad (2.1)$$

Якщо на зазначених інтервалах функція постійна, то

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \big|f(c_0+0) - f(c_0)\big| + \sum_{k=1}^{m-1}\Big[\big|f(c_k+0) - f(c_k)\big| + \big|f(c_k) - f(c_k-0)\big|\Big] +$$

$$+\big|f(c_m) - f(c_m - 0)\big|. \quad (2.2)$$

Виписані формули є наслідками попереднього прикладу. (✍ Виведення здійснити самостійно!) ■

Приклад 2.14. Обчислити варіацію функції

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ 1 - x & \text{при } 0 < x < 1, \\ 5 & \text{при } x = 1 \end{cases}$$

на відрізку [0,1].

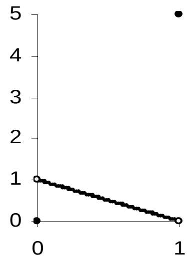

Рис.2.7

Розв'язання. Графік функції зображено на рис. 2.7. Застосуємо формулу (2.1):

$$a = c_0 = 0, b = c_1 = 1,$$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}(f) = \big|f(c_0+0) - f(c_0)\big| + \big|f(c_1 - 0) - f(c_0+0)\big| +$$

$$+\big|f(c_1) - f(c_1 - 0)\big| = |1-0| + |0-1| + |5-0| = 7.$$

Приклад 2.15. Обчислити варіацію функції

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } \quad x \in [0;1), \\ 5 & \text{при } \quad x = 1, \\ x+3 & \text{при } \quad x \in (1;2] \end{cases}$$

на відрізку $[0,2]$.

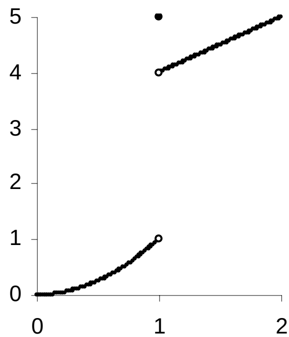

Рис. 2.8

Розв'язання. За формулою (2.1)

$$a = c_0 = 0, c_1 = 1, b = c_2 = 2,$$

$$\overset{2}{\underset{0}{V}}(f) = \big|f(c_0+0) - f(c_0)\big| +$$

$$+\big|f(c_1 - 0) - f(c_0+0)\big| + \big|f(c_1) - f(c_1 - 0)\big| +$$

$$+\big|f(c_1+0) - f(c_1)\big| + \big|f(c_2 - 0) - f(c_1+0)\big| + \big|f(c_2) - f(c_2 - 0)\big| =$$

$$= 0 + 1 + 4 + 1 + 1 + 0. = 7.$$ ■

Приклад 2.16. Знайти варіацію функції

$$f\left(x\right)=\begin{cases}1,\text{якщо} & x\neq 1,2,3,\\ 5,\text{якщо} & x=1,2,3\end{cases}$$

на відрізку $[0,4]$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (2.2):

$$\overset{4}{\underset{0}{V}}\left(f\right)=\left|f\left(1\right)-f\left(1-0\right)\right|+\left|f\left(1+0\right)-f\left(1\right)\right|+\left|f\left(2-0\right)-f\left(2\right)\right|+$$

$$+\left|f\left(2\right)-f\left(2+0\right)\right|+\left|f\left(3-0\right)-f\left(3\right)\right|+\left|f\left(3\right)-f\left(3+0\right)\right|=$$

$$=4+4+4+4+4+4=24. \quad \blacksquare$$

Приклад 2.17. Знайти варіацію функцій

$$f(x)=\left[x^2\right] \text{ і } g(x)=\left\{x^2\right\}$$

на відрізку $\left[-\sqrt{2},\sqrt{5}\right]$ (тут $[t]$ – ціла частина дійсного числа t; $\{t\}=t-[t]$ – дробова частина числа t).

Розв'язання. Усі можливі точки розриву знаходимо, розв'язуючі рівняння в межах заданого відрізка:

$$x^2=n,\quad n=0,1,2,3,4;$$

$$x=\pm\sqrt{n},\quad n=0,1,2,3,4;$$

$$x=-\sqrt{2},-1,0,1,\sqrt{2},\sqrt{3},2,\sqrt{5}.$$

Графік функції $f(x)$ зображено на рис. 2.9. Точка $x=0$ є точкою неперервності цієї функції.

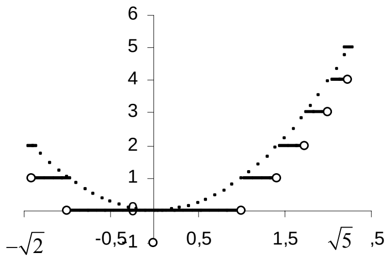

Рис. 2.9

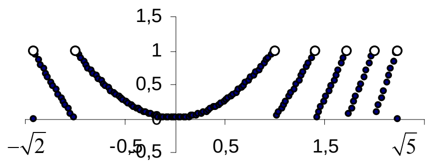

Рис. 2.10

Розіб'ємо відрізок $\left[-\sqrt{2},\sqrt{5}\right]$ на два відрізки $\left[-\sqrt{2},0\right]$ і $\left[0,\sqrt{5}\right]$, на кожному з яких функція $f(x)$ монотонна, тому

$$\overset{0}{\underset{-\sqrt{2}}{V}}\left(f\right)=2-0=2;\quad \overset{\sqrt{5}}{\underset{0}{V}}\left(f\right)=5-0=5;$$

$$\overset{\sqrt{5}}{\underset{-\sqrt{2}}{V}}\left(f\right)=\overset{0}{\underset{-\sqrt{2}}{V}}\left(f\right)+\overset{\sqrt{5}}{\underset{0}{V}}\left(f\right)=2+5=7.$$

Графік функції $g(x)$ зображено на рис. 2.10. Для обчислення варіації цієї функції застосуємо формулу (2.1):

$$\underset{-\sqrt{2}}{\overset{\sqrt{5}}{V}}(g)=\left|g\left(-\sqrt{2}+0\right)-g\left(-\sqrt{2}\right)\right|+\left|g(-1-0)-g\left(-\sqrt{2}+0\right)\right|+\underbrace{\left|g(-1-0)-g(-1)\right|}_{=0}+$$

$$+\left|g(-1+0)-g(-1)\right|+\left|g(0)-g(-1+0)\right|+\left|g(1-0)-g(0)\right|+\left|g(1)-g(1-0)\right|+$$

$$+\underbrace{\left|g(1+0)-g(1)\right|}_{=0}+\left|g\left(\sqrt{2}-0\right)-g(1)\right|+\left|g\left(\sqrt{2}\right)-g\left(\sqrt{2}-0\right)\right|+$$

$$+\left|g\left(\sqrt{3}-0\right)-g\left(\sqrt{2}\right)\right|+\left|g\left(\sqrt{3}\right)-g\left(\sqrt{3}-0\right)\right|+\left|g(2-0)-g\left(\sqrt{3}\right)\right|+\left|g(2)-g(2-0)\right|+$$

$$+\left|g\left(\sqrt{5}-0\right)-g(2)\right|+\left|g\left(\sqrt{5}\right)-g\left(\sqrt{5}-0\right)\right|=14. \quad \blacksquare$$

Приклад2.18. Знайти варіацію функцій

$$f(x)=\left[\ln x\right] \text{ і } g(x)=\left\{\ln x\right\}$$

на відрізку $[0{,}1;10]$ (тут $[t]$ – ціла частина дійсного числа t, а $\{t\}=t-[t]$ – дробова частина числа t).

Розв'язання. Спочатку знайдемо значення функції $\ln x$ на кінцях відрізка:

$$\ln 0{,}1=-\ln 10\approx -2{,}3;\ \ln 10\approx 2{,}3.$$

Можливі точки розриву в межах заданого відрізку знаходимо для натуральних n, що змінюються від $[-2{,}3]=-3$ до $[2{,}3]=2$:

$$\ln x=n,\quad n=-3;-2;-1;0;1;2;$$

$$x=\frac{1}{e^3};\frac{1}{e^2};\frac{1}{e};0;e;e^2,\quad \frac{1}{e^3}\notin[0{,}1;10].$$

Графіки функцій зображено на рис. 2.11 і рис. 2.12.

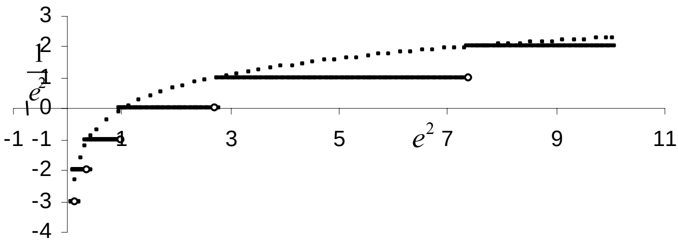

Рис. 2.11

Функція $f(x)$ зростає на даному відрізку, тому

$$\underset{0,1}{\overset{10}{V}}(f)=[\ln 10]-[\ln 0{,}1]=2-(-3)=5.$$

Зважаючи на те, що

$$\{\ln 0{,}1\}=\{-\ln 10\}=-\ln 10-[-\ln 10]=-\ln 10+3,$$

$$\{\ln 10\}=\ln 10-[\ln 10]=\ln 10-2,$$

за формулою (2.1) отримаємо

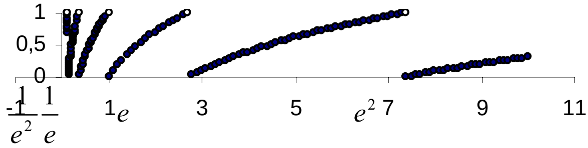

Рис. 2.12

$$\overset{10}{\underset{0,1}{V}}(g)=\underbrace{|g(0,1+0)-g(0,1)|}_{=0}+\left|g\left(\frac{1}{e^2}-0\right)-g(0,1)\right|+\left|g\left(\frac{1}{e^2}\right)-g\left(\frac{1}{e^2}-0\right)\right|+$$

$$+\left|g\left(\frac{1}{e}-0\right)-g\left(\frac{1}{e^2}\right)\right|+\left|g\left(\frac{1}{e}\right)-g\left(\frac{1}{e}-0\right)\right|+\left|g(1-0)-g\left(\frac{1}{e}\right)\right|+\left|g(1)-g(1-0)\right|+$$

$$+\left|g(e-0)-g(1)\right|+\left|g(e)-g(e-0)\right|+\left|g\left(e^2-0\right)-g(e)\right|+\left|g\left(e^2\right)-g\left(e^2-0\right)\right|+$$

$$+\left|g(10)-g\left(e^2\right)\right|=\left|1-(3-\ln 10)\right|+9+\left|(\ln 10-2)-0\right|=2\ln 10+5. \quad \blacksquare$$

Приклад 2.19. Знайти варіацію функцій

$$f(x)=[\sin \pi x] \text{ і } g(x)=\{\sin \pi x\}$$

на відрізку $[-1;5]$ (тут $[t]$ – ціла частина дійсного числа t, а $\{t\}=t-[t]$ – дробова частина числа t).

Розв’язання. Можливі точки розриву в межах заданого відрізку:

$\sin \pi x = n, \quad n=-1,0,1,$

$$\sin \pi x=-1 \qquad \sin \pi x = 0 \qquad \sin \pi x = 1$$

$$x=-\frac{1}{2}+2k \qquad x=m \qquad x=\frac{1}{2}+2l$$

$$k\in\mathbb{Z} \qquad m\in\mathbb{Z} \qquad l\in\mathbb{Z}$$

$$x=-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4,\frac{9}{2},5.$$

Графіки функцій зображено на рис. 2.13 і рис. 2.14.

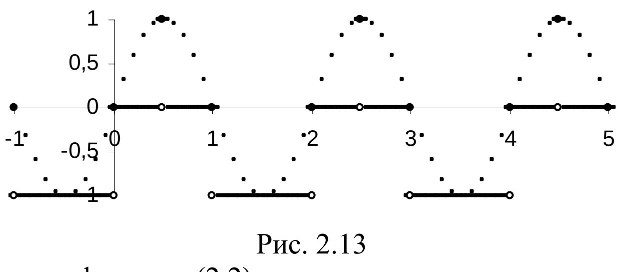

Рис. 2.13

Застосовуємо формулу (2.2):

$$\overset{5}{\underset{-1}{V}}(f)=|f(-1+0)-f(-1)|+|f(0)-f(0-0)|+\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}-0\right)\right|+\left|f\left(\frac{1}{2}+0\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+$$

$$+\left|f(1+0)-f(1)\right|+\left|f(2)-f(2-0)\right|+\left|f\left(\frac{5}{2}\right)-f\left(\frac{5}{2}-0\right)\right|+\left|f\left(\frac{5}{2}+0\right)-f\left(\frac{5}{2}\right)\right|+$$

$$+\left|f(3+0)-f(3)\right|+\left|f(4)-f(4-0)\right|+\left|f\left(\frac{9}{2}\right)-f\left(\frac{9}{2}-0\right)\right|+\left|f\left(\frac{9}{2}+0\right)-f\left(\frac{9}{2}\right)\right|=12.$$

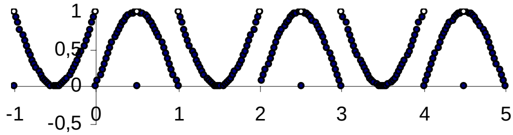

Рис. 2.14

А тепер – формулу (2.1):

$$\overset{5}{\underset{-1}{V}}(g)=\left|g(-1+0)-g(-1)\right|+\left|g\left(-\frac{1}{2}\right)-g(-1+0)\right|+\left|g(0-0)-g\left(-\frac{1}{2}\right)\right|+\left|g(0)-g(0-0)\right|+$$

$$+\left|g\left(\frac{1}{2}-0\right)-g(0)\right|+\left|g\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{2}-0\right)\right|+\left|g\left(\frac{1}{2}+0\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)\right|+\left|g(1)-g\left(\frac{1}{2}+0\right)\right|+$$

$$+\left|g(1)-g(1+0)\right|+\left|g\left(\frac{3}{2}\right)-g(1+0)\right|+\left|g(2-0)-g\left(\frac{3}{2}\right)\right|+\left|g(2)-g(2-0)\right|+$$

$$+\left|g\left(\frac{5}{2}-0\right)-g(2)\right|+\left|g\left(\frac{5}{2}\right)-g\left(\frac{5}{2}-0\right)\right|+\left|g\left(\frac{5}{2}+0\right)-g\left(\frac{5}{2}\right)\right|+\left|g(3)-g\left(\frac{5}{2}+0\right)\right|+$$

$$+\left|g(3+0)-g(3)\right|+\left|g\left(\frac{7}{2}\right)-g(3+0)\right|+\left|g(4-0)-g\left(\frac{7}{2}\right)\right|+\left|g(4)-g(4-0)\right|+$$

$$+\left|g\left(\frac{9}{2}-0\right)-g(4)\right|+\left|g\left(\frac{9}{2}\right)-g\left(\frac{9}{2}-0\right)\right|+\left|g\left(\frac{9}{2}+0\right)-g\left(\frac{9}{2}\right)\right|+\left|g(5)-g\left(\frac{9}{2}+0\right)\right|=24.$$

Приклад 2.20. Довести, що характеристична функція $\chi_E(x)$ множини $E\subset[a,b]$ має обмежену варіацію на $[a,b]$ тоді і тільки тоді, коли множина E має лише скінченну кількість межових точок.

Розв'язання. У випадку, коли E має лише скінченне число межових точок, то $\chi_E(x)$ має обмежену варіацію на $[a,b]$. Дійсно, кожна межова точка множини E може стати точкою розриву її характеристичної функції. Якщо в такій точці розрив I роду, то модуль стрибка дорівнює 1, якщо в точці усувний розрив, то сума модулів правого і лівого стрибків дорівнює 2. Отже,

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(\chi_E)\le 2K,$$

де K – кількість межових точок множини**.**

У випадку, коли E має нескінченну множину межових точок, то $\chi_E(x)$ має необмежену варіацію на відрізку $[a,b]$. Дійсно, оберемо довільне натуральне число N і з множини усіх межових точок, що лежать всередині $[a,b]$, розглянемо N точек, розташувавши їх в порядку зростання:

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_N < b .$$

Навколо цих точок побудуємо околи, що попарно не перетинаються $V(x_1), V(x_2), \ldots, V(x_N)$ і в кожному із цих околів візьмемо по дві точки $\zeta_i \in E, \eta_i \notin E$. Тоді

$$\mathop{V}_a^b(\chi_E) \geq \sum_{i=1}^{N} \left|\chi_E(\eta_i) - \chi_E(\zeta_i)\right| = N .$$

Отже, варіація функції $\chi_E(x)$ на відрізку $[a,b]$ більша за будь-яке натуральне число N; таким чином, вона дорівнює нескінченності. ■

Приклад 2.21. Чи є справедливим твердження: «Якщо $|f(x)|$ має обмежену варіацію на $[a,b]$, то і $f(x)$ має обмежену варіацію на цьому відрізку»?

Розв'язання. Ні. Це твердження є хибним. Наведемо приклад:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{при} \quad x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Тоді $|f(x)| = 1 \; \forall x$, тому $|f(x)|$ має обмежену варіацію на $[a,b]$ ($\mathop{V}_a^b(|f|) = 0$), тоді як $f(x)$ – функція необмеженої варіації на тому ж відрізку. Обґрунтування цього здійснюється аналогічно попередньому прикладу. Дійсно, оберемо довільне натуральне число N і розглянемо N раціональних чисел, розташувавши їх в порядку зростання:

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_N < b .$$

Навколо цих точок побудуємо околи, що попарно не перетинаються $V(x_1), V(x_2), \ldots, V(x_N)$ і в кожному із цих околів візьмемо по два ірраціональних числа таких, що $\zeta_i < x_i < \eta_i$. Тоді

$$\mathop{V}_a^b(f) \geq \sum_{i=1}^{N} \left(\left|f(x_i) - f(\zeta_i)\right| + \left|f(\eta_i) - f(x_i)\right| \right) = 4N .$$

Отже, варіація функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ більша за будь-яке число $4N$; таким чином, вона дорівнює нескінченності. ■

Приклад 2.22. Довести, що якщо функція $f(x)$ має обмежену варіацію на $[a,b]$, то її абсолютна величина $|f(x)|$ також має обмежену варіацію на цьому відрізку.

Розв'язання. Це випливає із нерівності $|\alpha-\beta| \ge \big||\alpha|-|\beta|\big| \; \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Розглянемо розбиття $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ відрізка $[a,b]$, тоді

$$\sum_{k=1}^{n} \big| |f(x_k)| - |f(x_{k-1})| \big| \le \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \le \overset{b}{\underset{a}{V}} f .$$

Після переходу до точної верхньої межі отримаємо

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(|f|) \le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) .$$

Отже, функція $|f(x)|$ має обмежену варіацію на $[a,b]$. ■

6. Представлення функції обмеженої варіації різницею зростаючих функцій

Приклад 2.23. Функцію

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при} \quad x \in [0;1), \\ 5 & \text{при} \quad x = 1, \\ x+3 & \text{при} \quad x \in (1;2] \end{cases}$$

представити у вигляді різниці двох зростаючих функцій на $[0;2]$

Розв'язання. Функцію $f(x)$ представимо у вигляді різниці зростаючих $f(x) = \pi(x) - \varphi(x)$, де, $\pi(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \overset{x}{\underset{0}{V}}(f), & x \ne 0, \end{cases}$ $\varphi(x) = \pi(x) - f(x)$.

При побудові функції $\pi(x)$ бачимо, що варіація $\overset{x}{\underset{0}{V}}(f)$ даної функції $f(x)$ для $x \in [0;1]$ зростає так само, як і функція $f(x)$. При $x = 1 + h \in (1;2]$ варіація дорівнює $\overset{x}{\underset{0}{V}}(f) = 6 + h = 6 + (x-1) = x + 5$. Отже,

$$\pi(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при} \quad x \in [0;1), \\ 5 & \text{при} \quad x = 1, \\ x+5 & \text{при} \quad x \in (1;2], \end{cases}$$

тоді

$$\varphi(x) = \pi(x) - f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \in [0,1], \\ 2 \text{ при } x \in (1;2]. \end{cases}$$ ■

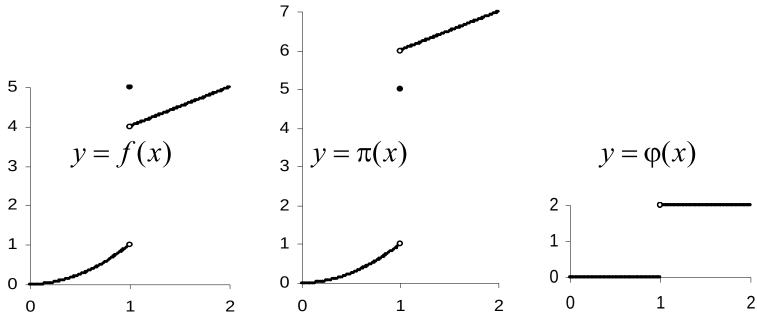

Рис. 2.15

Приклад 2.24. Функцію

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & \text{при} \quad x\in[0;1),\\ 1, & \text{при} \quad x=1,\\ 3-x, & \text{при} \quad x\in(1;2]\end{cases}$$

представити у вигляді різниці двох зростаючих функцій на $[0;2]$.

Розв'язання. Функцію $f(x)$ представимо у вигляді різниці зростаючих $f(x)=\pi(x)-\varphi(x)$. Якщо $x\in[0,1)$, то $\overset{x}{\underset{0}{V}}(f)$ лінійно зростає від 0 до значень, близьких до 1, тому $\overset{x}{\underset{0}{V}}(f)=x$. Якщо $x=1$, то $\overset{x}{\underset{0}{V}}(f)=2$. Якщо $x\in(1;2]$, то $\overset{x}{\underset{0}{V}}(f)$ лінійно зростає від значень, близьких до 3, до значення 4, тому $\overset{x}{\underset{0}{V}}(f)=x+2$. Отже,

$$\pi(x)=\begin{cases}x, & \text{при} \quad x\in[0;1),\\ 2, & \text{при} \quad x=1,\\ x+2, & \text{при} \quad x\in(1;2];\end{cases}$$

$$\varphi(x)=\pi(x)-f(x)=2x-1.$$

Рекомендуємо читачеві побудувати графіки усіх трьох функцій. ■

7. Представлення функції обмеженої варіації сумою функції її стрибків і неперервною функцією.

Приклад 2.25. Функцію

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x=0,\\ 1-x & \text{при } 0<x<1,\\ 5 & \text{при } x=1\end{cases}$$

представити у вигляді суми функції її стрибків і неперервної функції на $[0;1]$.

Розв'язання. Побудуємо спочатку функцію стрибків функції $f(x)$:

$$s_f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x\in(0,1).\\ 1+5=6, & x=1.\end{cases}$$

Тоді

$$\varphi(x)=f(x)-s_f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ -x, & x\in(0,1),=-x\\ -1, & x=1\end{cases}$$

є неперервною на $[0;1]$. Отже, $f(x)=s_f(x)+\varphi(x)$.

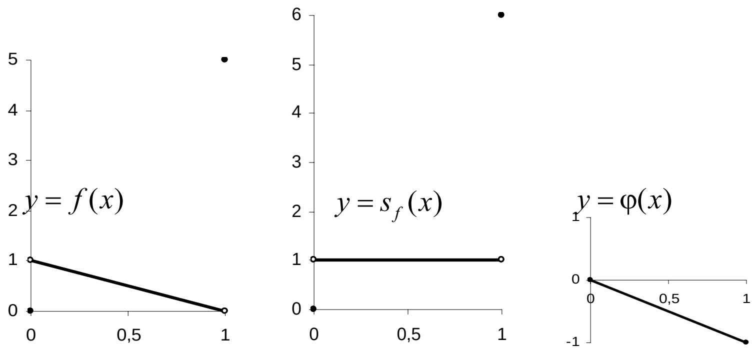

Рис. 2.16.

На рис. 2.16 зображено графіки усіх трьох функцій. ■

Приклад 2.26. Функцію

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x^2 & \text{при} \quad x\in[0;1),\\ 5 & \text{при} \quad x=1,\\ x+3 & \text{при} \quad x\in(1;2]\end{cases}$$

представити у вигляді суми функції її стрибків і неперервної функції на $[0;2]$.

Розв'язання. Функція стрибків функції $f(x)$:

$$s_f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1),\\ 4, & x=1,\\ 4-1=3, & x\in(1;2].\end{cases}$$

Неперервна на $[0;2]$ функція:

$$\varphi(x) = f(x) - s_f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1, \\ x, & x \in (1;2], \end{cases} = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1], \\ x, & x \in (1;2]. \end{cases}$$

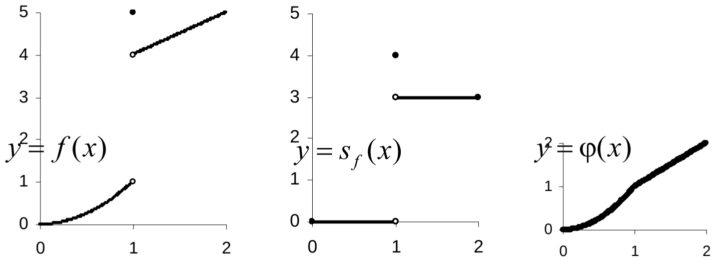

Рис. 2.17.

На рис. 2.17 зображено графіки трьох функцій. ■

Приклад 2.27. Функцію

$$f\left(x\right) = \begin{cases} x^2 \quad \text{при} \quad x \in (-3;-2) \cup (-1;1) \cup (2;3 \\ 5 \quad \text{при} \quad x \in \{\pm 3; \pm 2; \pm 1\} \\ 2 - |x-1| \, \text{при} \quad x \in (1;2) \end{cases}$$

представити у вигляді суми функції її стрибків і неперервної функції на $[-3;3]$.

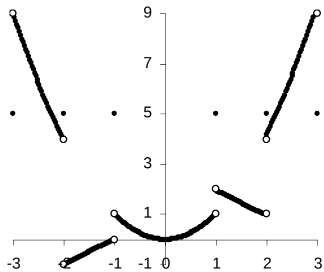

Рис. 2.18

Розв'язання. Графік даної функції див. на рис. 2.18. Шукані функції мають вигляд:

$$s_f(x) = \begin{cases} 0, & x = -3, \\ 4, & x \in (-3;-2), \\ 4+1=5, & x = -2, \\ 5-6=-1, & x \in (-2;-1), \\ -1+5=4, & x = -1, \\ 4-4=0, & x \in (-1;1), \\ 0+4=4, & x = 1, \\ 4-3=1, & x \in (1;2), \\ 1+4=5, & x = 2, \\ 5-1=4, & x \in (2;3), \\ 4-4=0, & x = 3, \end{cases} \quad \varphi(x) = f(x) - s_f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \in [-3;-2), \\ 3 - |x-1|, & x \in [-2;-1), \\ x^2, & x \in [-1;1], \\ 1 - |x-1|, & x \in (1;2], \\ x^2 - 4, & x \in (2;3]. \end{cases}$$

На рис. 2.19 зображено графіки обох шуканих функцій. ■

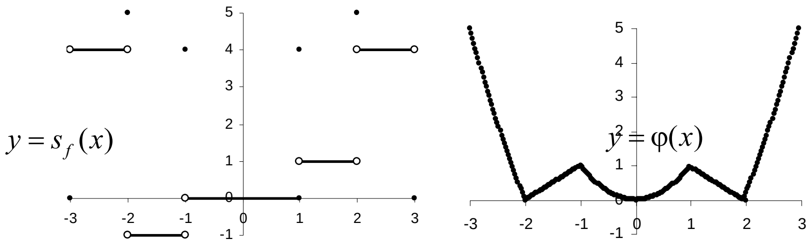

Рис. 2.19.