# 2. ПРАКТИКУМ З РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

## 2.2 Інтеграл Рімана – Стілтьєса (модуль №2)

### 1. Обчислення інтегралів Стілтьєса.

**Приклад 2.28.** Обчислити інтеграл Стілтьєса $(S)\int\limits_0^{0,75}\frac{d\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)}{(x+1)}$.

**Розв'язання.** В даному випадку $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Функція $f(x)$ – неперервна на $[0;0,75]$, функція $g(x)$ має неперервну, а тому інтегровну на $[0;0,75]$ похідну $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Тому застосовуємо теорему про зв'язок між інтегралом Стілтьєса і Рімана:

$$(S)\int\limits_0^{0,75}\frac{d\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)}{(x+1)}=(R)\int\limits_0^{0,75}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}=\left|\begin{array}{ll} t=\dfrac{1}{x+1} & dx=-\dfrac{dt}{t^2} \\ x=\dfrac{1}{t}-1 & \dfrac{x}{t}\Big|\dfrac{0}{1}\Big|\dfrac{0,75}{4/7}\end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_1^{4/7}\frac{-\dfrac{dt}{t^2}}{\dfrac{1}{t}\sqrt{\left(\dfrac{1}{t}-1\right)^2+1}}=-\int\limits_{4/7}^{1}\frac{-dt}{t\sqrt{\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{2}{t}+2}}=\int\limits_{4/7}^{1}\frac{dt}{t\sqrt{1-2t+2t^2}}=$$

$$=\int\limits_{4/7}^{1}\frac{dt}{t\sqrt{2\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right|\Bigg|_{4/7}^{1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\left|\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right|-\;-\ln\left|\frac{1}{14}+\frac{5}{7\sqrt{2}}\right|\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{4\sqrt{2}+9}{7}.\quad\blacksquare$$

**Приклад 2.29.** Обчислити інтеграл Стілтьєса $(S)\int\limits_0^{a}x^3d\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)$

**Розв'язання.** Формально застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$(S)\int_0^a x^3 d\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)=\left(x^3\cdot\sqrt{a^2-x^2}\right)\Big|_0^a-(S)\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,d\left(x^3\right)=$$

$$=-(S)\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,d\left(x^3\right).$$

Розглянемо інтеграл $(S)\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,d\left(x^3\right)$. Тут $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ – неперервна на $[0,a]$, $g(x)=x^3$ має неперервну похідну на $[0,a]$, тому інтеграл Стілтьєса існує. Отже, формальне застосування формули інтегрування частинами є коректним. Крім того, можна застосувати формулу зв'язку між інтегралами Стілтьєса і Рімана:

$$(S)\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,d\left(x^3\right)==(R)\int_0^a 3x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l} x=a\sin t \\ dx=a\cos t dt \\ a^2-x^2=a^2\cos^2 t \end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} \dfrac{x\ 0}{t\ 0} & \dfrac{a}{\pi/2} \end{array}\right|=$$

$$=3\int_0^{\pi/2} a^2\sin^2 t\sqrt{a^2\cos^2 t}\,a\cos t dt=3\int_0^{\pi/2} a^4\sin^2 t\cos^2 t dt=3\frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t dt=$$

$$=3\frac{a^4}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)dt=3\frac{a^4}{8}\left(t+\frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{3\pi a^4}{16}.$$

Отже, $(S)\int_0^a x^3 d\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)=-\dfrac{3\pi a^4}{16}$. ■

**Приклад 2.30.** Обчислити інтеграли:

а) $(S)\int_{-1}^{3} x\,dg(x)$, де $g(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x=-1, \\ 1 & \text{при } -1<x<2, \\ -1 & \text{при } 2\le x\le 3; \end{cases}$

б) $(S)\int_0^2 x^2 dg(x)$, де $g(x)=\begin{cases} -1 & \text{при } 0\le x<\dfrac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } \dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{3}{2}, \\ 2 & \text{при } x=\dfrac{3}{2}, \\ -2 & \text{при } \dfrac{3}{2}<x\le 2. \end{cases}$

**Розв'язання.** а) В цьому прикладі задано кусково-сталу функцію $g(x)$ і неперервну функцію $f(x)=x$ на $[-1;3]$, тому для обчислення будемо застосовувати формулу (1.14).

Функція $g(x)$ має стрибок 1 при $x=-1$ і стрибок —2 при $x=2$, причому $f(-1)=-1,\quad f(2)=2$. Тому

$$(S)\int_{-1}^{3} xdg(x)= f(-1)\cdot\left[g(-1+0)-g(-1)\right]+ f(2)\cdot\left[g(2+0)-g(2-0)\right]=$$

$$=(-1)\cdot 1+2\cdot(-2)=-5.$$

б) За тих же причин, що і в прикладі 2.30 а), застосовуємо формулу (1.14). При $x=\dfrac{1}{2}$ функція $g(x)$ має стрибок 1, а при $x=\dfrac{3}{2}$ її стрибок дорівнює $-2$ (значення функції $g(x)$ при $x=\dfrac{3}{2}$ не впливає на результат). Маємо:

$$(S)\int_{-0}^{2} x^2dg(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 1+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot(-2)=-\frac{17}{4}. \quad ■$$

**Приклад 2.31.** Обчислити інтеграли $(S)\int_{-2}^{2} f(x)dg(x)$ і $(S)\int_{-2}^{2} g(x)df(x)$, де

$$f(x)=x^2,\quad g(x)=\begin{cases} 1, & -2<x<-1; \\ 2, & x=-2;\, x=-1; \\ 3, & -1<x<0; \\ 0, & x=0;\, x=1;\, x=2; \\ -1, & 0<x<1; 1<x<2. \end{cases}$$

**Розв'язання.** При $x=-2$ функція $g(x)$ має правий стрибок –1, при $x=-1$ її повний стрибок дорівнює $2$, при $x=1$ повний стрибок дорівнює 0, а при $x=2$ лівий стрибок дорівнює 1. Застосуємо формулу (1.14)

$$(S)\int_{-2}^{2} f(x)dg(x)=(-2)^2\cdot(-1)+(-1)^2\cdot 2+0+1^2\cdot 0+2^2\cdot 1=2,$$

а тепер – формулу інтегрування частинами:

$$(S)\int_{-2}^{2} g(x)df(x)= f(x)g(x)\Big|_a^b-(S)\int_{-2}^{2} f(x)dg(x)=$$

$$= f(2)g(2)- f(-2)g(-2)-2=2^2\cdot 0-(-2)^2\cdot 2-2=-10. \quad ■$$

**Приклад 2.32.** Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_{-2}^{2} xdg(x)$, б) $\int\limits_{-2}^{2} x^2dg(x)$, в) $\int\limits_{-2}^{2} (x^3+1)dg(x)$,

де $g(x)=\begin{cases} x+2 & \text{при} -2\le x\le -1, \\ 2 & \text{при} -1<x<0, \\ x^2+3 & \text{при } 0\le x\le 2. \end{cases}$

**Розв'язання.** В цьому прикладі задано функцію $g(x)$ так, що $\exists g'(x)$ – інтегровна за Ріманом у всіх точках відрізку $[-2;2]$, окрім двох точок $x=-1$ і $x=0$. Функції $f(x)$ неперервні на цьому відрізку. Тому для обчислення будемо застосовувати формулу (1.15).

Функція $g(x)$ має стрибки, що дорівнюють 1, при $x=-1$ і $x=0$. Похідна цієї функції:

$$g'(x)=\begin{cases} 1 & \text{при } -2\le x<-1, \\ 0 & \text{при } -1<x<0, \\ 2x & \text{при } 0<x\le 2. \end{cases}$$

Тому

$$\int\limits_{-2}^{2} xdg(x)=\int\limits_{-2}^{-1} xdx+\int\limits_{0}^{2} x\cdot 2xdx+(-1)\cdot 1+0\cdot 1=2\frac{5}{6},$$

$$\int\limits_{-2}^{2} x^2dg(x)=\int\limits_{-2}^{-1} x^2dx+\int\limits_{0}^{2} x^2\cdot 2xdx+(-1)^2\cdot 1+0^2\cdot 1=11\frac{1}{3},$$

$$\int\limits_{-2}^{2} (x^3+1)dg(x)=\int\limits_{-2}^{-1} (x^3+1)dx+\int\limits_{0}^{2} (x^3+1)\cdot 2xdx+2\cdot 1+1\cdot 1=15\frac{1}{20}. \quad \blacksquare$$

**Приклад 2.33.** Обчислити інтеграли

а) $(S)\int\limits_{-2}^{2} x^3d\{x\}$; б) $(S)\int\limits_{-2}^{2} xd\{\sin\pi x\}$

(тут $[t]$ – ціла частина дійсного числа $t$, а $\{t\}=t-[t]$ – дробова частина числа $t$).

**Розв'язання. а)** Маємо:

$$(S)\int\limits_{-2}^{2} x^3d\{x\}=(S)\int\limits_{-2}^{2} x^3d\left(x-[x]\right)=(S)\int\limits_{-2}^{2} x^3d(x)-(S)\int\limits_{-2}^{2} x^3d[x],$$

$$(S)\int\limits_{-2}^{2} x^3dx=(R)\int\limits_{-2}^{2} x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-2}^{2}=0.$$

Функція $[x]$ має стрибки, рівні 1, у всіх точках розриву $x=-1,0,1,2$ із відрізку $[-2;2]$. Застосуємо формулу (1.14)

$$(S)\int_{-2}^{2} x^3 d[x] = (-1)^3\cdot 1 + 0 + 1^3\cdot 1 + 2^3\cdot 1 = 8 .$$

Звідки $(S)\int_{-2}^{2} x^3 d\{x\} = 0-8 = -8$.

**б)** Маємо

$$(S)\int_{-2}^{2} xd\{\sin\pi x\} = (S)\int_{-2}^{2} xd(\sin\pi x) - (S)\int_{-2}^{2} xd[\sin\pi x],$$

$$(S)\int_{-2}^{2} xd(\sin\pi x) = x\sin\pi x\Big|_{-2}^{2} - (S)\int_{-2}^{2}\sin\pi x dx = -(R)\int_{-2}^{2}\sin\pi x dx = 0 .$$

На рис. 2.13 зображено графік функції $y=[\sin\pi x]$ на відрізку $[-1,;4]$. Побудуйте самостійно ✍ графік цієї функції на $[-2;2]$. В точках розриву $x=-\dfrac{3}{2}$ і $x=\dfrac{1}{2}$ повний стрибок цієї функції дорівнює 0, в точках $x=\pm 1$ стрибок дорівнює 1, в точці $x=0$ він дорівнює –1, а в точці $x=2$ лівий стрибок дорівнює –1. Застосувавши формулу (1.14), отримаємо

$$(S)\int_{-2}^{2} xd[\sin\pi x] = (-1)\cdot 1 + 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) = -2 .$$

Звідки $(S)\int_{-2}^{2} xd\{\sin\pi x\} = 0-(-2) = 2$. ■

**2. Застосування інтегралу Стілтьєса у функціональному аналізі.**

**Приклад 2.34.** Представити лінійний неперервний функціонал в просторі $C[-1;1]$ інтегралом Стілтьєса і обчислити його норму, якщо

а) $F(f) = \int_{-1}^{1} xf(x)dx + f(0) + \dfrac{f(-1)+f(1)}{2}$,

б) $F(f) = \int_{-1}^{1} xf(x)dx + f(0) - \dfrac{f(-1)+f(1)}{2}$.

**Розв'язання. а)** Розглянувши представлення функціонала і формулу (1.15), можна прийти до висновку: $g'(x)=x$, повний стрибок функції $g(x)$ в точці $x=0$ дорівнює 1, в точках $x=-1$ і $x=-1$ відповідно правий і лівий стрибки дорівнюють $\dfrac{1}{2}$.

Оскільки $g'(x) = x$, то $g(x) = \frac{x^2}{2} + C$. Зважаючи на значення стрибків, в якості функції $g(x)$ можна обрати наступну функцію:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = -1; \\ \frac{x^2}{2}, & -1 < x < 0; \\ \frac{x^2}{2} + 1, & 0 \le x < 1; \\ 2, & x = 1. \end{cases}$$

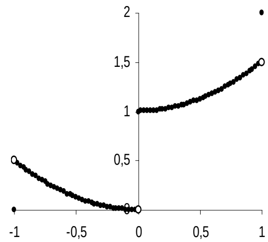

Рис. 2.20

Графік див. на рис. 2.20.

Тоді $F(f) = (S)\int_{-1}^{1} f(x)d(g(x))$. Норма цього функціоналу дорівнює

$$\|F\| = \overset{2}{\underset{-1}{V}}(g) = |g(-1+0) - g(-1)| + |g(0-0) - g(-1+0)| +$$
$$+|g(0) - g(0+0)| + |g(1-0) - g(0)| + |g(1) - g(1-0)| =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3.$$

б) Повний стрибок функції $g(x)$ в точці $x = 0$ дорівнює 1, в точках $x = -1$ і $x = -1$ відповідно правий і лівий стрибки дорівнюють $-\frac{1}{2}$. Оскільки $g'(x) = x$, то $g(x) = \frac{x^2}{2} + C$. Зважаючи на значення стрибків, в якості функції $g(x)$ можна обрати наступну функцію:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x = -1; \\ \frac{x^2}{2}, & -1 < x < 0; \\ \frac{x^2}{2} + 1, & 0 \le x < 1; \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

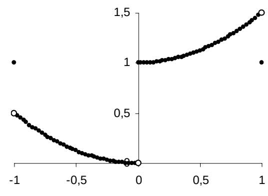

Рис. 2.21

Графік див. на рис. 2.21.

Тоді $F(f) = (S)\int_{-1}^{1} f(x)d(g(x))$. Норма цього функціоналу дорівнює

$$\|F\| = \overset{2}{\underset{-1}{V}}(g) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3. \blacksquare$$