



**В.В. Глушевський
Н.М. Д'яченко**

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ (Частина I - МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ)

**Методичні вказівки
до виконання лабораторного практикуму і контрольних робіт
для студентів ЗДІА економічних спеціальностей
(галузь знань 0305 – «Економіка та підприємництво»)
та спеціальності «Менеджмент» (галузь знань 0306 – «Менеджмент»)
денної і заочної форм навчання**

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	5
1.1. Розв'язання задач лінійного програмування графічним методом.....	5
1.2. Розв'язання задач лінійного програмування за допомогою інструмента “Поиск решения”.....	8
1.3. Розв'язання задач лінійного програмування симплексним методом.....	14
2. ДВОЇСТА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	20
2.1. Математична модель двоїстої задачі.....	20
2.2. Метод штучного базису розв'язання задач лінійного програмування	21
2.3. Економіко-математичний аналіз результатів.....	24
3... МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРАНСПОРТНОГО ЗАВДАННЯ	27
3.1. Математична модель транспортної задачі	27
3.2. Метод потенціалів розв'язання транспортної задачі	29
3.3. Розв'язання транспортної задачі з використанням інструмента “Поиск решения”	35
4. ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ.....	40
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	52

**Міністерство освіти і науки України
Запорізька державна інженерна академія**

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ (Частина I - МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ)

**Методичні вказівки
до виконання лабораторного практикуму і контрольних робіт
для студентів ЗДІА економічних спеціальностей
(галузь знань 0305 – «Економіка та підприємництво»)
та спеціальності «Менеджмент» (галузь знань 0306 – «Менеджмент»)
денної і заочної форм навчання**

*Рекомендовано до видання
на засіданні кафедри ЕК
протокол №__ від «__» _____ 2007*

Економіко-математичне моделювання (Частина I – Математичне програмування). Методичні вказівки до виконання лабораторного практикуму і контрольних робіт для студентів ЗДІА економічних спеціальностей (галузь знань 0305 – «Економіка та підприємництво») та спеціальності «Менеджмент» (галузь знань 0306 – «Менеджмент») денної і заочної форм навчання / Укл.: В.В. Глущевський, Н.М. Д'яченко, - Запоріжжя: ЗДІА, 2007. – 52с.

Методичні вказівки призначені для студентів, що вивчають економіко-математичне моделювання. Рекомендації містять указівки щодо методів розв'язання задач лінійного програмування, передбачені навчальною програмою дисципліни, варіанти лабораторних (контрольних) робіт, а також список рекомендованої літератури.

Укладачі: *к.е.н., доц. В.В. Глущевський,*
к. ф.-м.н., доц. Н.М. Д'яченко

Відповідальний за випуск : *зав. кафедри ЕК*
к.е.н., доц. С.В.Солодухін

ВСТУП

На практиці для випуску асортименту своєї продукції виробничі підприємства мають у своєму розпорядженні деякий запас, як правило, обмежених ресурсів (сировинних, трудових, енергетичних, паливних, грошових), деякий набір взаємозамінних технологій, устаткування і т.п. Транспортна фірма, що здійснює постачання від підприємств-виробників до замовників-споживачів, має можливість вибору в розподілі вантажу. Економіст або менеджер повинен скласти такий план випуску продукції, при якому досягається найкращий (оптимальний) результат: або підприємство максимізує прибуток, або максимізує випуск продукції, або мінімізує витрати на випуск продукції, або мінімізує виробничі відходи і т.п.

Методи розв'язування подібних завдань вивчаються студентами ВНЗ у дисципліні «Економіко-математичне моделювання», зокрема в її першій частині - математичному програмуванні. Найбільш поширеним є клас задач лінійного програмування (ЗЛП); розгляду методів розв'язання деяких із них присвячені дані методичні вказівки.

Спочатку вивчається графічний метод розв'язання ЗЛП, що дозволяє наочно представити як суть математичної постановки задачі, так і її результат. Потім вивчається розв'язання задачі з використанням убудованого в Microsoft EXCEL for WINDOWS інструмента «Поиск решения». Цей інструмент дозволяє розв'язувати більш складні задачі не тільки лінійного програмування. Традиційний симплексний метод розв'язання ЗЛП дозволяє одержати багато результатів, корисних для економічного аналізу рентабельності випуску окремих видів продукції, аналізу дефіцитності ресурсів, що використовуються, їхньої взаємозамінності. Однак цей метод досить трудомісткий. Вирішити цю проблему дозволяє Microsoft EXCEL із своєю вбудованою можливістю модифікації формул.

Також вивчається розв'язання транспортної задачі, модель якої лінійна, однак розв'язання цієї задачі симплексним методом є досить трудомістким. Для розв'язання цієї задачі розроблений зручний і наочний метод потенціалів, що став класичним. Крім цього методу, розглянуто розв'язок транспортної задачі з використанням інструмента «Поиск решения».

1. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

ЗАВДАННЯ 1. Побудувати математичну модель економічної задачі.
Розв'язати задачу за допомогою побудованої моделі

- 1.1 графічним методом,
- 1.2 з використанням інструмента “Поиск решения”,
- 1.3 симплексним методом.

Зробити висновки в термінах постановки задачі.

1.1 Розв'язання задач лінійного програмування графічним методом

Розберемо розв'язок однієї задачі оптимального виробничого планування (або задачі про використання ресурсів).

Змістовна постановка задачі. Для виготовлення взуття двох моделей на фабриці використовується два сорти шкіри. Тижневі ресурси робочої сили і матеріалу, витрати праці і матеріалу для виготовлення кожної пари взуття, а також прибуток від реалізації одиниці продукції наведені в таблиці.

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальний запас ресурсів
	№1	№2	
Робочий час (люд.-год)	1	2	900
Шкіра I сорту (шмат.)	3	1	900
Шкіра II сорту (шмат.)	-	3	1200
Прибуток (грн.)	50	70	

Скласти план випуску взуття в асортименті, що максимізує щотижневий прибуток.

Розв'язання. Спочатку складемо математичну модель поставленої задачі. Вона містить у собі змінні задачі, цільову функцію і систему обмежень.

Змінні задачі. Оскільки в задачі потрібно скласти тижневий план випуску взуття, то змінними задачі є:

- x_1 пар взуття – тижневий план випуску моделі №1,
- x_2 пар взуття – тижневий план випуску моделі №2.

Цільова функція задачі. Оскільки прибуток від випуску 1 пари взуття моделі №1 складає 50 грн., а моделі №2 – 70 грн., то загальний тижневий прибуток від випуску x_1 пар взуття моделі №1 і x_2 пар взуття моделі №2 складатиме $50x_1 + 70x_2$ (грн.). Таким чином, цільова функція задачі, яку необхідно максимізувати, має вигляд

$$F(x_1, x_2) = 50x_1 + 70x_2 \rightarrow \max.$$

Система обмежень задачі. З урахуванням наведених у таблиці даних можна скласти такі обмеження у вигляді нерівностей.

- **Робочий час**, затрачений на випуск запланованого взуття, складає $x_1 + 2x_2$ (люд.-год.). З урахуванням загального фонду робочого часу в 900 люд.-год., який не можна перевищити, одержимо нерівність:

$$x_1 + 2x_2 \leq 900 .$$

- *Витрата шкіри I сорту* (у шматках) на виготовлення запланованої партії взуття представиться за аналогією з попередньою нерівністю:

$$3x_1 + x_2 \leq 900 .$$

- *Витрата шкіри II сорту* (у шматках) – відповідно:

$$3x_2 \leq 1200 .$$

Якщо обидві частини останньої нерівності поділити на 3, то одержимо:

$$x_2 \leq 400 .$$

- План випуску взуття за смислом не може набувати від'ємних значень, тому останнє обмеження *невід'ємності змінних*:

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 .$$

Таким чином, математична модель задачі має вигляд:

x_1 пар взуття – тижневий план випуску моделі №1,

x_2 пар взуття – тижневий план випуску моделі №2,

$$F(x_1, x_2) = 50x_1 + 70x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 900 \\ 3x_1 + x_2 \leq 900 \\ x_2 \leq 400 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Математична модель виражається через дві змінні, тому для розв'язання задачі можна застосовувати графічний метод.

На координатній площині $x_1 O x_2$ зобразимо множину точок Ω , координати яких задовольняють системі обмежень. Ця множина називається *областю припустимих розв'язків (областю припустимих значень)*.

Спочатку зауважимо, що система обмежень містить нерівності $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$, які означають, що шукана область Ω лежить у першій чверті. Далі побудуємо прямі

$$x_1 + 2x_2 = 900, \tag{1}$$

$$3x_1 + x_2 = 900, \tag{2}$$

$$x_2 = 400. \tag{3}$$

Для цього знайдемо по дві пари точок, через які проходить кожна з цих прямих:

$$1. \quad x_1 + 2x_2 = 900: \quad (0, 450), \quad (900, 0);$$

$$2. \quad 3x_1 + x_2 = 900: \quad (0, 900), \quad (300, 0);$$

$$3. \quad x_2 = 400: \quad (0, 400), \quad (500, 400).$$

Ці прямі з відповідними мітками зображені на рис. 1.1.

Множина точок, які задовольняють нерівності $x_1 + 2x_2 \leq 900$, являє собою півплощину, що обмежена прямою $x_1 + 2x_2 = 900$. Оскільки точка $O(0,0)$ задовольняє нерівності ($0 + 2 \cdot 0 \leq 900$ - вірно), то шукана півплощина містить цю точку; це зображено на рис. 1.1 за допомогою стрілок. Аналогічно, точка $O(0,0)$ задовольняє кожній із нерівностей $3x_1 + x_2 \leq 900$ і $x_2 \leq 400$, тому ця

точка міститься у відповідних півплощинах (див. рис. 1.1). З урахуванням розташування в першій чверті область припустимих розв'язків Ω являє собою заштрихований багатокутник OABCD.

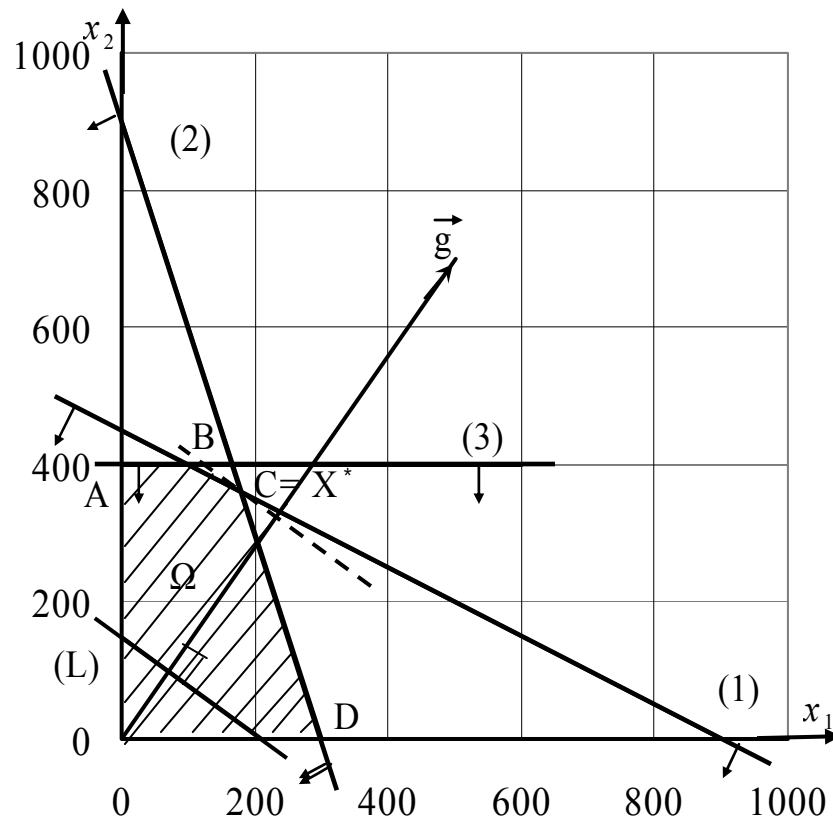


Рис. 1.1 – Розв'язання задачі лінійного програмування графічним методом

Тепер зобразимо вектор $\vec{g}$ найшвидшого росту цільової функції $F(x_1, x_2) = 50x_1 + 70x_2$, яким є вектор, співспрямований її *градієнту*. Координатами вектора градієнта (для лінійної відносно змінних функції) є коефіцієнти при змінних цільової функції, тобто $\overrightarrow{grad} = (50, 70)$. Як вектор $\vec{g}$ оберемо для зручності побудови вектор

$$\vec{g} = 10 \cdot \overrightarrow{grad} = (500, 700) .$$

Для зображення цього вектора з'єднуємо спрямованим відрізком точки з координатами $(0, 0)$ і $(500, 700)$. Довільна *лінія рівня цільової функції* (L) проходить перпендикулярно до вектора $\vec{g}$.

Для пошуку точки області припустимих розв'язків, у якій цільова функція досягає свого максимуму (мінімуму), необхідно лінію рівня пересувати в напрямку вектора градієнта (відповідно у зворотному напрямку). Крайня точка X^* області Ω при такому русі буде відповідати *оптимальному розв'язку*. У даній задачі такою точкою X^* буде точка C. Знайдемо її координати, зауваживши, що вона є точкою перетинання прямих (1) і (2). Тому розв'яжемо систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 900 \\ 3x_1 + x_2 = 900 \end{cases}.$$

Із першого рівняння виразимо x_1 :

$$x_1 = 900 - 2x_2. \quad (4)$$

Потім підставимо знайдений вираз у друге рівняння:

$$3 \cdot (900 - 2x_2) + x_2 = 900,$$

звідки одержимо

$$2700 - 6x_2 + x_2 = 900$$

$$5x_2 = 1800$$

$$x_2 = 360.$$

Знаючи x_2 , за допомогою (4) знаходимо x_1 :

$$x_1 = 900 - 2 \cdot 360 = 180.$$

У результаті дійдемо висновку, що $x_1^* = 180$, $x_2^* = 360$, а точка, яка відповідає оптимальному розв'язку, має координати $X^* = C(180, 360)$. Максимальне значення цільової функції:

$$F_{\max}(X) = F(X^*) = 50x_1^* + 70x_2^* = 50 \cdot 180 + 70 \cdot 360 = 34200 \text{ (грн.)}.$$

Відповідь. Для одержання максимального тижневого прибутку, що складає 34200 грн., фабрика повинна випускати 180 пар взуття моделі №1 і 360 пар взуття моделі №2 за тиждень.

1.2 Розв'язання задач лінійного програмування за допомогою інструмента “Поиск решения”

Відповідно до математичної моделі поставленої задачі підготуємо аркуш EXCEL для застосування інструмента «Поиск решения» (див. рис. 1.2):

- 1) комірки B2:D2 резервуємо для оптимальних значень змінних x_1 і x_2 (оптимального плану задачі), що будуть знайдені як результат застосування процедури «Поиск решения»;
- 2) комірку D3 резервуємо для значення цільової функції на оптимальному плані;
- 3) у комірки B3:D3 вносимо значення коефіцієнтів цільової функції;
- 4) комірки B5:C5, B6:C6, B7:C7 заповнюємо коефіцієнтами при змінних у лівій частині відповідних обмежень;
- 5) у комірки F5:F7 записуємо значення правих частин відповідних обмежень;
- 6) у комірки E5:E7 вносимо знак нерівності у відповідному обмеженні;
- 7) комірки D5:D7 резервуємо для значень лівих частин системи обмежень на оптимальному плані.

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the following data in the spreadsheet:

	A	B	C	D	E	F
1	Змінні	X1	X2			
2	Значення			Значення ЦФ		
3	Коеф-ти ЦФ	50	70			
4		Обмеження	Ліва частина	Знак	Права частина	
5	Робочий час	1	2		<=	900
6	Шкіра I сорту	3	1		<=	900
7	Шкіра II сорту	0	1		<=	400

A callout bubble points to cell D3, indicating where a formula is being entered.

Рис. 1.2 - Представлення вихідних даних на аркуші EXCEL

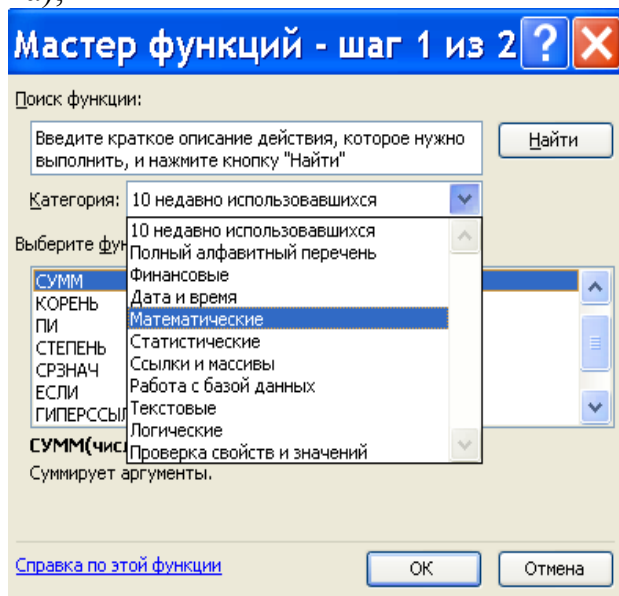
Внесемо формули, помітивши, що значення цільової функції (комірка D3) дорівнює сумі добутків¹ невідомих значень змінних (комірки B2:C2) на коефіцієнти цільової функції (комірки B3:D3), а значення лівих частин системи обмежень (комірки D5, D6 і D7) дорівнюють сумі добутків невідомих значень змінних (комірки B2:C2) на коефіцієнти лівих частин системи обмежень (комірки B5:C5, B6:C6, B7:C7 відповідно). Для цього в цільову комірку D3 вносимо формулу

СУММПРОИЗВ(\$B\$2;\$C\$2;B3:C3),

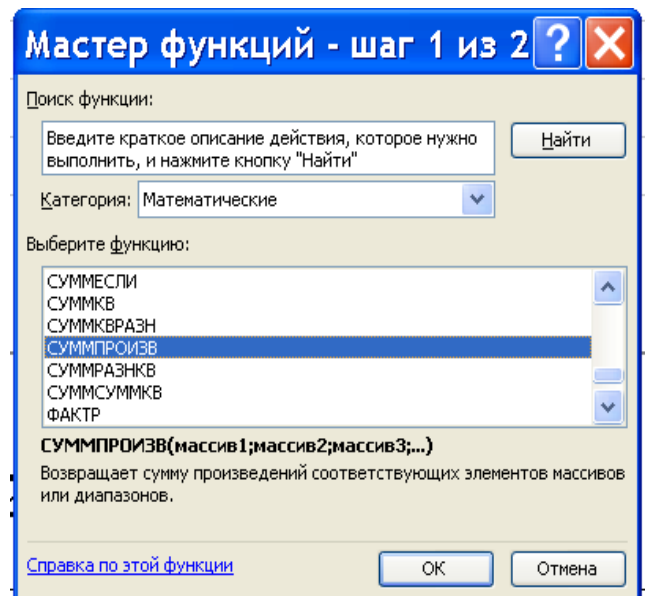
яку копіюємо в комірки D5, D6 і D7 з модифікаціями.

Для внесення в комірку D3 зазначених формул необхідно

- 1) поставити курсор у комірку D3;
- 2) викликати «Мастер функций» за допомогою кнопки f_x (див. рис. 1.2);
- 3) серед категорій майстра функцій вибрати «Математические» (рис. 1.3, а);



а)



б)

Рис. 1.3 - Экранна форма «Мастер функций»

¹ Рос. «сумма произведений».

4) серед вбудованих функцій цієї категорії відмітити «СУММПРОИЗВ» (рис. 1.3, б) і натиснути «ОК»;

5) в екранній формі (див. рис. 1.4), що з'явилася, поставити курсор у «Массив 1», виділити на аркуші EXCEL комірки B2:C2 (відповідають зарезервованим значенням змінних), потім привласнити їм абсолютні адреси натисканням функціональної клавіші F4; перевести курсор у «Массив 2» і виділити на аркуші EXCEL комірки B3:C3 (відповідають значенням коефіцієнтів цільової функції).

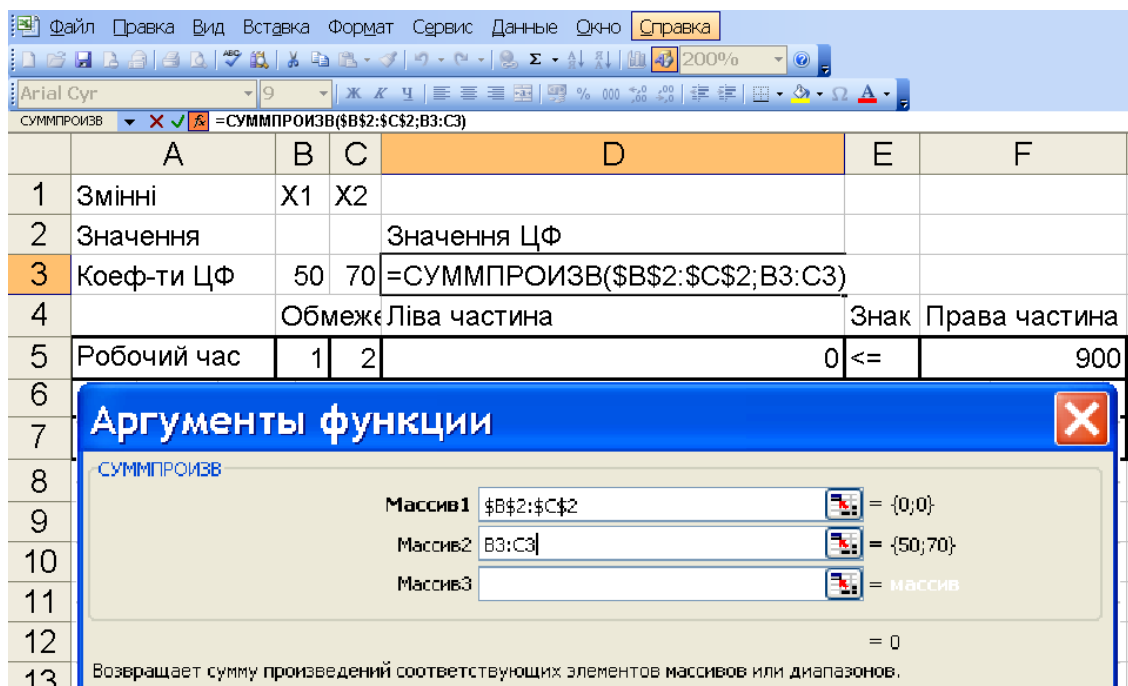


Рис. 1.4 - Програмування цільової комірки

Після копіювання формул у комірки D5, D6 і D7 вони будуть модифіковані так, як показано на рис. 1.5.

	A	B	C	D	E	F
1	Змінні	X1	X2			
2	Значення			Значення ЦФ		
3	Коеф-ти ЦФ	50	70	=СУММПРОИЗВ(\$B\$2:\$C\$2;B3:C3)		
4		Обмеж. Ліва частина			Знак	Права частина
5	Робочий час	1	2	=СУММПРОИЗВ(\$B\$2:\$C\$2;B5:C5)	<=	900
6	Шкіра I сорту	3	1	=СУММПРОИЗВ(\$B\$2:\$C\$2;B6:C6)	<=	900
7	Шкіра II сорту	0	1	=СУММПРОИЗВ(\$B\$2:\$C\$2;B7:C7)	<=	400

Рис. 1.5 - Програмування комірок, що відповідають значенню цільової функції і значенням лівих частин системи обмежень

Якщо перелік процедур «Сервис» у меню Microsoft EXCEL не містить інструмент «Поиск решения», то для додавання цього інструмента в перелік необхідно виконати такі дії:

- 1) натиснути «Сервис», потім «Надстройки» (рис. 1.6 а);
- 2) в екранній формі, що з'явилася, відмітити «Поиск решения» (рис. 1.6, б).

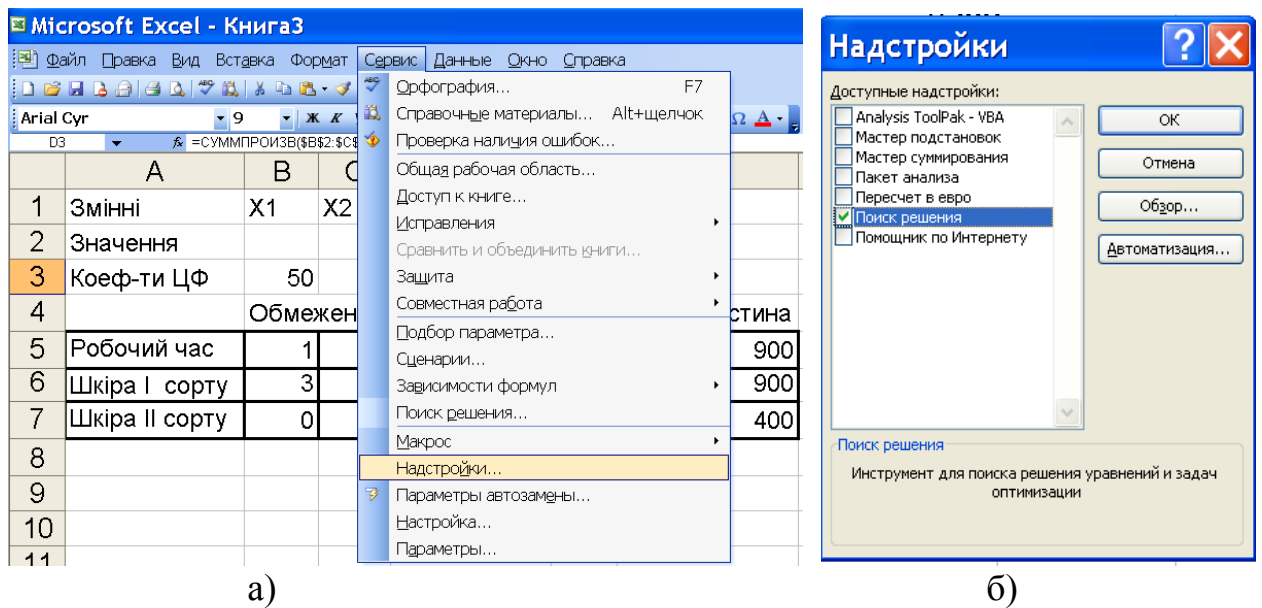


Рис. 1.6 - Додавання процедури «Поиск решения» в меню «Сервис» Microsoft EXEL

У результаті пророблених операцій аркуш EXEL готовий для запуску процедури «Поиск решения». Вибираємо в «Сервис» процедуру «Поиск решения» (див. рис. 1.7).

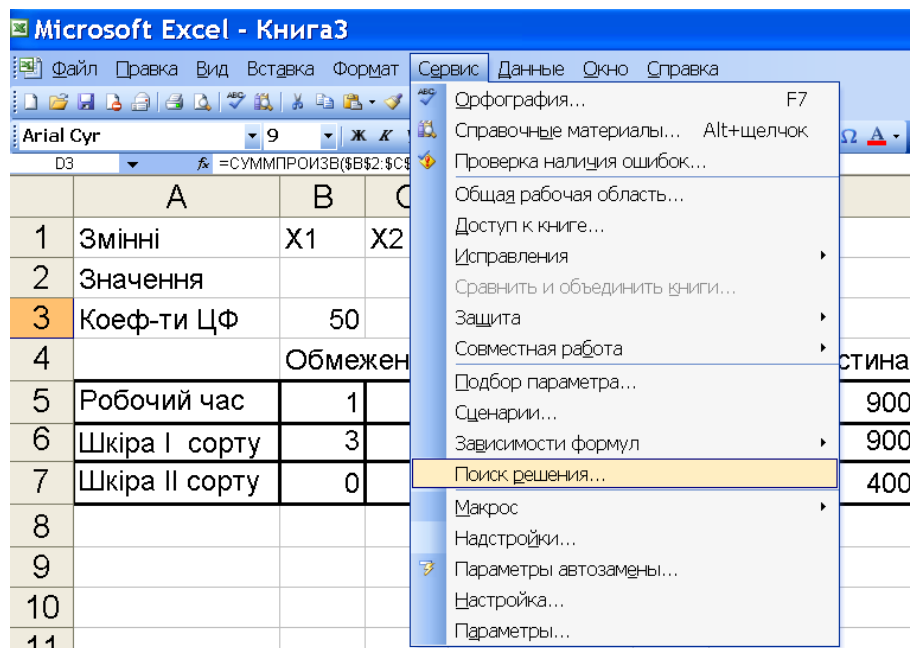


Рис. 1.7 - Запуск процедуры «Поиск решения»

В екранній формі «Поиск решения» (див. рис 1.8)

- 1) устанавливаем целевую ячейку \$D\$3, выделяя ее на листе EXEL;
- 2) устанавливаем прапорцем тип оптимизации, исходя из условий задачи: в данном случае – это максимизация;
- 3) переводим курсор в «Изменяя ячейки» и выделяем на листе EXEL ячейки \$B\$2:\$C\$2, которые зарезервированы значениям переменных;
- 4) переводим курсор в «Ограничения», нажимаем «Добавить»;

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной: ☒ максимальному значению ☐ значению: ☐ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

Рис. 1.8 - Экранна форма «Поиск решения»

Добавление ограничения

Ссылка на ячейку: Ограничение:

Рис. 1.9 - Экранна форма «Добавление ограничений»

Параметры поиска решения

Максимальное время: секунд

Предельное число итераций:

Относительная погрешность:

Допустимое отклонение: %

Сходимость:

☒ Линейная модель ☐ Автоматическое масштабирование

☒ Неотрицательные значения ☐ Показывать результаты итераций

Оценки: ☒ линейная ☐ квадратичная

Разности: ☒ прямые ☐ центральные

Метод поиска: ☒ Ньютона ☐ сопряженных градиентов

Рис. 1.10 - Экранна форма «Параметры поиска решений»

5) в екранній формі «Добавление ограничений» (рис. 1.9)

а) робимо посилання на комірки (шляхом їхнього виділення на аркуші EXEL), що відповідають лівим частинам системи обмежень $SD\$5:SD\7 ; ці комірки містять результат обчислень відповідно до введених раніше формул;

б) установлюємо знак, що відповідає знаку нерівності системи обмежень: у даному випадку це « $\leq$ »; якщо не всі обмеження мають однаковий знак, то, розташувавши поруч нерівності одного знака, програмують окремо кожну з груп, що утворилися;

в) переводимо курсор в «Ограничения», посилаючись на комірки, що відповідають правим частинам системи обмежень $FF\$5:FF\7 , виділяючи їх на аркуші EXEL;

г) натискання «ОК» повертає нас в екранну форму «Поиск решения»;

б) натискаємо «Параметри», в екранній формі, що з'явилася, (рис. 1.10) відмічаємо прапорцями «Линейная модель» і «Неотрицательные значения», після чого натискання «ОК» повертає нас до екранної форми «Поиск решения»;

7) натискаємо «Выполнить», у результаті чого (рис. 1.11) на аркуші EXEL у комірках B2:C2 висвічуються шукані значення оптимальних змінних (оптимальний план), у комірці D3 - значення цільової функції на оптимальному плані, а в екранній формі, що з'явилися, «Результаты поиска решения», пропонується зробити один з видів звіту, з яких вибираємо звіт по стійкості² і натискаємо «ОК». Аркуш «Отчет по устойчивости» представленний на рис. 1.12.

	A	B	C	D	E	F
1	Змінні	X1	X2			
2	Значення	180	360	Значення ЦФ		
3	Коеф-ти ЦФ	50	70	34200		
4		Обмеження		Ліва частина	Знак	Права частина
5	Робочий час	1	2	900	$\leq$	900
6	Шкіра I сорту	3	1	900	$\leq$	900
7	Шкіра II сорту	0	1	360	$\leq$	400

Результаты поиска решения

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Тип отчета

- Результаты
- Устойчивость
- Пределы

☒ Сохранить найденное решение

☐ Восстановить исходные значения

ОК Отмена Сохранить сценарий... Справка

Рис. 1.11 - Результаты работы процедуры «Поиск решения»

² Рос. «устойчивость».

A1		Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости						
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости							
2	Рабочий лист: [Книга3.xls]Лист1							
3	Отчет создан: 22.12.2006 23:52:34							
4								
5								
6	Изменяемые ячейки							
7								
8	Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение	
9	\$B\$2	Значения X1	180	0	50	160	15	
10	\$C\$2	Значения X2	360	0	70	30	53,33333333	
11								
12	Ограничения							
13								
14	Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение	
15	\$D\$5	Рабочее время Левая часть	900	32	900	66,66666667	600	
16	\$D\$6	Кожа I сорта Левая часть	900	6	900	1800	200	
17	\$D\$7	Кожа II сорта Левая часть	360	0	400	1E+30	40	
18								

Рис. 1.12 - Экранна форма аркуша «Отчет по устойчивости»

1.3 Розв'язання задач лінійного програмування симплексним методом

Крок 1. Випишемо математичну модель вихідної задачі:

x_1 пар взуття – тижневий план випуску моделі №1,

x_2 пар взуття – тижневий план випуску моделі №2,

$$F(x_1, x_2) = 50x_1 + 70x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 900 \\ 3x_1 + x_2 \leq 900 \\ x_2 \leq 400 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Крок 2. Зведемо математичну модель вихідної задачі до *канонічного виду*, уводячи додаткові невід'ємні змінні x_3, x_4, x_5 . Помітимо, що кількість додаткових змінних відповідає кількості нерівностей у системі обмежень. Оскільки всі нерівності системи обмежень виражаються знаком « $\leq$ », то додаткові змінні в систему обмежень увійдуть з коефіцієнтом «+1». У цільову ж функцію вони ввійдуть з коефіцієнтом «0». *Канонічний вид запису даної задачі:*

$$F(x_1, x_2) = 50 \cdot x_1 + 70 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 900 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 900 \\ x_2 + x_5 = 400 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

Крок 3. Побудуємо *первинний базис* системи обмежень (*початковий опорний план задачі*).

По-перше, усі вільні елементи системи (5) – невід'ємні. По-друге, основна матриця системи (5)

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

містить одиничну підматрицю, якій відповідають змінні x_3, x_4, x_5 . Тому ці змінні є *базисними*, а їхня кількість дорівнює кількості рівнянь системи (5), значить система (5) має первинний базис, який утворено тривимірними одиничними векторами $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(0; 0; 1)$, що відповідають базисним змінним x_3, x_4, x_5 . У результаті одержано: кількість основних змінних $n = 2$, базисних - $m = 3$.

Крок 4. Складаємо *першу симплексну таблицю*.

- Заносимо вихідні дані в таблицю EXEL (див. першу симплексну таблицю на рис. 1.13 і 1.14):

- 1) у комірки D3:H3 вносимо найменування змінних;
- 2) у комірки D2:H2 – коефіцієнти цільової функції при відповідних змінних;
- 3) у комірки D4:H6 – основну матрицю системи (5);
- 4) у комірки A4:A6 – найменування базисних змінних;
- 5) у комірки B4:B6 – коефіцієнти цільової функції при базисних змінних;
- 6) у комірки C4:C6 – стовпець вільних елементів.

- Знайдемо опорний план, що відповідає побудованій симплексній таблиці. Для цього ставимо у відповідність змінній базису те значення, що знаходиться у стовпці « b_i » того ж рядка. Якщо змінна не входить у базис, то її значення дорівнює нулю. У даному випадку

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 900, x_4 = 900, x_5 = 400,$$

- Заповнюємо комірки C7:H7:

- 1) комірка C7 повинна містити *значення цільової функції* на зазначеному опорному плані:

$$F(X) = \Delta_0 = \sum_{i=n+1}^{n+m} c_i b_i,$$

тому вносимо формулу в цю комірку, як показано на рис. 1.14, а на рис. 1.13 бачимо результат обчислення за цією формулою, тобто $F(X) = \Delta_0 = 0$ грн.;

- 2) комірки D7:H7 повинні містити значення *оцінок оптимальності* для зазначеного опорного плану:

$$\Delta_j = \sum_{i=n+1}^{n+m} c_i a_{ij} - c_j, \quad j = 1, \dots, n + m;$$

тому в комірку D7 вносимо формулу (див. рис. 1.14)

$$\text{СУММПРОИЗВ}(\$B\$4:\$B\$6;D4:D6)-D2,$$

у якій комірки B4:B6 мають абсолютні значення, з тієї причини, що у формулі для Δ_j коефіцієнти цільової функції c_i ($i = n + 1, n + m$), що містяться в сумі добутків не залежать від j . Потім копіюємо формулу з модифікаціями в комірки E7:H7; результати обчислень у цих комітках показані на рис. 1.13.

- **Перевірка оптимальності опорного плану.** Оцінки оптимальності Δ_j містять від'ємні значення (див. першу симплексну таблицю на рис. 1.13), тому зазначений опорний план не є оптимальним. Вибираємо серед оцінок оптимальності найбільше за модулем від'ємне значення. У даному випадку це «-70». Стовець, що відповідає цьому значенню оптимальності, є *розв'язувальним стовпцем*; виділимо його.

- У комірці I4:I6 вносимо значення *оцінних обмежень*. Для $i^{\text{го}}$ рядка оцінне обмеження дорівнює $\frac{b_i}{a_{ik}}$, де b_i - вільний елемент цього рядка, а a_{ik} - елемент матриці, що знаходиться в розв'язувальному стовпці $i^{\text{го}}$ рядка (див. рис. 1.14). Якщо $a_{ik}=0$ або $\frac{b_i}{a_{ik}} \leq 0$, то оцінне обмеження такого рядка не розглядаємо. Серед додатних оцінних обмежень вибираємо найменше. У даному випадку – це «400» (див. рис. 1.13). Рядок, що відповідає цьому значенню, є *розв'язувальним рядком*; виділимо його. Елемент, що стоїть на перетині розв'язувального рядка і розв'язувального стовпця, називається *розв'язувальним елементом*.

Крок 5. Побудова наступної симплексної таблиці. У загальному випадку, якщо розв'язувальний стовець має номер k , а розв'язувальний рядок - r , то подальший алгоритм полягає в наступному.

По-перше, змінну x_k вводимо до базису замість змінної x_r .

По-друге, робимо перетворення, за яких нова матриця буде мати $k^{\text{й}}$ стовець, що містить нулі на всіх місцях, окрім $r^{\text{го}}$. Для цього елементи нової симплексної таблиці a'_{ij} , b'_i виражаємо через елементи a_{ij} , b_i попередньої симплексної таблиці за формулами:

- елементи розв'язувального рядка ділимо на розв'язувальний елемент і записуємо у відповідному за номером рядку нової таблиці:

$$a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}}, \quad b'_r = \frac{b_r}{a_{rk}}, \quad \text{при } i = r; \quad (*)$$

- усі інші елементи нової таблиці розраховуємо за формулами:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik} \cdot a_{rj}}{a_{rk}}, \quad b'_i = b_i - \frac{a_{ik} \cdot b_r}{a_{rk}} \quad \text{при } i \neq r. \quad (**)$$

Тут a_{rk} - *розв'язувальний елемент*, він міститься в обох формулах (*) і (**) незалежно від i чи j , тому йому потрібно привласнити абсолютне значення, тобто після його введення натиснути функціональну клавішу F4. Формула (**) містить a_{ik} для усіх j , тому цьому елементу також привласнюється абсолютне значення.

Відповідно до зазначеного алгоритму будуємо **другу симплексну таблицю**.

- Заповнюємо таблицю EXEL (див. другу симплексну таблицю на рис. 1.13 і 1.14):

- 1) перші два рядки симплексної таблиці не змінюються;
- 2) змінну x_2 вводимо до базису замість змінної x_5 ;
- 3) у комірках B11:B13 поміщаємо коефіцієнти при базисних змінних;
- 4) для заповнення комірок C11:H13 формулами (див. рис. 1.14) відповідно до співвідношень (*) і (**) вносимо спочатку формули у комірки C11:C13 і копіюємо їх з модифікаціями.

Зауважимо, що в комірки C14:H14 можна внести як формули, аналогічні коміркам C11:H11 чи C12:H12 (див. рис. 1.14), так і формули, аналогічні C7:H7. Результат буде той самий.

- Опорний план, що відповідає другій симплекс-таблиці:

$$x_1 = 0, x_2 = 400, x_3 = 100, x_4 = 500, x_5 = 0,$$

а значення цільової функції на ньому $F(X) = 28000$ грн.

- Аналогічно першій симплексній таблиці в другій симплексній таблиці вибираємо розв'язувальний стовпець, що відповідає найбільшій за модулем від'ємній оцінці Δ_j оптимальності (див. другу симплексну таблицю рис. 1.13). Потім обчислюємо оцінні обмеження, за якими вибираємо розв'язувальний рядок.

Ітераційний процес симплексного методу продовжуємо доти, поки оцінки оптимальності Δ_j ($j = 1, \dots, n + m$) містять від'ємні елементи. У даному випадку вже четверта симплексна таблиця не містить від'ємних оцінок оптимальності, тому опорний план, що відповідає їй, є оптимальним:

$$x_1^* = 180, x_2^* = 360, x_3^* = 0, x_4^* = 0, x_5^* = 40,$$

а значення цільової функції на ньому $F(X^*) = 34200$ грн. – максимальним.

Відповідь. Для одержання максимального тижневого прибутку, що складає 34200 грн., фабрика повинна випускати 180 пар взуття моделі №1 і 360 пар взуття моделі №2 за тиждень.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				Перша симплексна таблиця					
2				50	70	0	0	0	
3	базис	c _b	b _i	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	b _i /a _{ik}
4	x ₃	0	900	1	2	1	0	0	450
5	x ₄	0	900	3	1	0	1	0	900
6	x ₅	0	400	0	1	0	0	1	400
7		Δ _j	0	-50	-70	0	0	0	
8				Друга симплексна таблиця					
9				50	70	0	0	0	
10	базис	c _b	b _i	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	b _i /a _{ik}
11	x ₃	0	100	1	0	1	0	-2	100
12	x ₄	0	500	3	0	0	1	-1	166,6667
13	x ₂	70	400	0	1	0	0	1	
14		Δ _j	28000	-50	0	0	0	70	
15				Третя симплексна таблиця					
16				50	70	0	0	0	
17	базис	c _b	b _i	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	b _i /a _{ik}
18	x ₁	50	100	1	0	1	0	-2	
19	x ₄	0	200	0	0	-3	1	5	40
20	x ₂	70	400	0	1	0	0	1	400
21		Δ _j	33000	0	0	50	0	-30	
22				Четверта симплексна таблиця					
23				50	70	0	0	0	
24	базис	c _b	b _i	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	
25	x ₁	50	180	1	0	-0,2	0,4	0	
26	x ₅	0	40	0	0	-0,6	0,2	1	
27	x ₂	70	360	0	1	0,6	-0,2	0	
28		Δ _j	34200	0	0	32	6	0	
29				y ₄	y ₅	y ₁	y ₂	y ₃	

Рис. 1.13- Результати розрахунків симплексним методом

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				Перша симплексна таблиця					
2				50		0	0	0	
3	базис	c _B	b _i	x ₁		x ₃	x ₄	x ₅	b _i /a _{ik}
4	x ₃	0	900	1	2	1	0	0	=C4/E4
5	x ₄	0	900	3	1	0	1	0	=C5/E5
6	x ₅	0	400	0	1	0	0	1	=C6/E6
7	Δ	=СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$B\$6;C4:C6)		=СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$B\$6;D4:D6)-D2	=СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$B\$6;E4:E6)-E2	=СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$B\$6;F4:F6)-F2	=СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$B\$6;G4:G6)-G2	=СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$B\$6;H4:H6)-H2	
8				Друга симплексна таблиця					
9				50	70	0	0	0	
10	базис	c _B	b _i	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	b _i /a _{ik}
11	x ₃	0	=C4-C6*\$E\$4/\$E\$6	=D4-D6*\$E\$4/\$E\$6	=E4-E6*\$E\$4/\$E\$6	=F4-F6*\$E\$4/\$E\$6	=G4-G6*\$E\$4/\$E\$6	=H4-H6*\$E\$4/\$E\$6	=C11/D11
12	x ₄	0	=C5-C6*\$E\$5/\$E\$6	=D5-D6*\$E\$5/\$E\$6	=E5-E6*\$E\$5/\$E\$6	=F5-F6*\$E\$5/\$E\$6	=G5-G6*\$E\$5/\$E\$6	=H5-H6*\$E\$5/\$E\$6	=C12/D12
13	x ₂	70	=C6/\$E\$6	=D6/\$E\$6	=E6/\$E\$6	=F6/\$E\$6	=G6/\$E\$6	=H6/\$E\$6	
14	Δ	=C7-C6*\$E\$7/\$E\$6		=D7-D6*\$E\$7/\$E\$6	=E7-E6*\$E\$7/\$E\$6	=F7-F6*\$E\$7/\$E\$6	=G7-G6*\$E\$7/\$E\$6	=H7-H6*\$E\$7/\$E\$6	
15				Третя симплексна таблиця					
16				50	70	0	0	0	
17	базис	c _B	b _i	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	b _i /a _{ik}
18	x ₁	50	=C11/\$D\$11	=D11/\$D\$11	=E11/\$D\$11	=F11/\$D\$11	=G11/\$D\$11	=H11/\$D\$11	
19	x ₄	0	=C12-C11*\$D\$12/\$D\$11	=D12-D11*\$D\$12/\$D\$11	=E12-E11*\$D\$12/\$D\$11	=F12-F11*\$D\$12/\$D\$11	=G12-G11*\$D\$12/\$D\$11	=H12-H11*\$D\$12/\$D\$11	=C19/H19
20	x ₂	70	=C13-C11*\$D\$13/\$D\$11	=D13-D11*\$D\$13/\$D\$11	=E13-E11*\$D\$13/\$D\$11	=F13-F11*\$D\$13/\$D\$11	=G13-G11*\$D\$13/\$D\$11	=H13-H11*\$D\$13/\$D\$11	=C20/H20
21	Δ	=C14-C11*\$D\$14/\$D\$11		=D14-D11*\$D\$14/\$D\$11	=E14-E11*\$D\$14/\$D\$11	=F14-F11*\$D\$14/\$D\$11	=G14-G11*\$D\$14/\$D\$11	=H14-H11*\$D\$14/\$D\$11	
22				Четверта симплексна таблиця					
23				50	70	0	0	0	
24	базис	c _B	b _i	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	
25	x ₁	50	#ЗНАЧ!	=D18-D19*\$H\$18/\$H\$19	=E18-E19*\$H\$18/\$H\$19	=F18-F19*\$H\$18/\$H\$19	=G18-G19*\$H\$18/\$H\$19	=H18-H19*\$H\$18/\$H\$19	
26	x ₅	0	=C19/\$H\$19	=D19/\$H\$19	=E19/\$H\$19	=F19/\$H\$19	=G19/\$H\$19	=H19/\$H\$19	
27	x ₂	70	=C20-C19*\$H\$20/\$H\$19	=D20-D19*\$H\$20/\$H\$19	=E20-E19*\$H\$20/\$H\$19	=F20-F19*\$H\$20/\$H\$19	=G20-G19*\$H\$20/\$H\$19	=H20-H19*\$H\$20/\$H\$19	
28	Δ	=C21-C19*\$H\$21/\$H\$19		=D21-D19*\$H\$21/\$H\$19	=E21-E19*\$H\$21/\$H\$19	=F21-F19*\$H\$21/\$H\$19	=G21-G19*\$H\$21/\$H\$19	=H21-H19*\$H\$21/\$H\$19	

Рис.1.14- Формули розрахунку симплексного методу в таблицях EXCEL

2. ДВОЇСТА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

ЗАВДАННЯ 2. Побудувати математичну модель двоїстої задачі. Розв'язати двоїсту задачу симплексним методом. Порівняти отриманий результат із тим, що отримано, виходячи з останньої симплексної таблиці прямої задачі, а також, виходячи зі звіту по стійкості процедури «Поиск решения» прямої задачі. Зробити економічний аналіз результатів.

2.1 Математична модель двоїстої задачі

Випишемо математичну модель прямої (вихідної) задачі:

x_1 пар взуття – тижневий план випуску моделі №1,

x_2 пар взуття – тижневий план випуску моделі №2,

$$F(x_1, x_2) = 50x_1 + 70x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 900 \\ 3x_1 + x_2 \leq 900 \\ x_2 \leq 400 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Складемо математичну модель двоїстої задачі.

1) Дана пряма задача на максимум, у ній усі нерівності системи обмежень мають знак « $\leq$ », тому змінювати форму запису математичної моделі прямої задачі немає необхідності.

2) Випишемо розширену матрицю системи і рядок коефіцієнтів цільової функції

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 900 \\ 3 & 1 & 900 \\ 0 & 1 & 400 \\ \hline 50 & 70 & F \end{array} \right).$$

3) Складаємо транспоновану матрицю

$$A^t = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 50 \\ 2 & 1 & 1 & 70 \\ \hline 900 & 900 & 400 & L \end{array} \right).$$

4) Складаємо математичну модель двоїстої задачі

$$L(y_1, y_2, y_3) = 900y_1 + 900y_2 + 400y_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 \geq 50 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 70 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}.$$

Економічний зміст змінних двоїстої задачі визначається економічним змістом відповідних їм нерівностей системи обмежень прямої задачі. Оскільки першій двоїстій змінній відповідає перше обмеження по витратах робочого часу, другій – по витратах шкіри I сорту, третій – по витратах шкіри II сорту, то y_1 грн. – тіньова ціна 1 люд.-год. робочого часу; y_2 грн. – тіньова ціна 1 шматка шкіри I сорту; y_3 грн. – тіньова ціна 1 шматка шкіри II сорту.

2.2 Метод штучного базису розв'язання задач лінійного програмування

Метод штучного базису розглянемо на прикладі розв'язання двоїстої задачі до задачі про використання ресурсів.

Крок 1. Зведемо математичну модель двоїстої задачі до канонічного вигляду, уводячи додаткові невід'ємні змінні y_4, y_5 . Оскільки всі нерівності системи обмежень виражаються знаком « $\geq$ », то додаткові змінні ввійдуть у систему обмежень з коефіцієнтом «-1». У цільову функцію додаткові змінні завжди входять з коефіцієнтом «0». Оскільки двоїста задача на мінімум, то складемо допоміжну функцію $Z = -L$. Канонічний вигляд запису двоїстої задачі:

$$Z = -900 \cdot y_1 - 900 \cdot y_2 - 400 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 - y_4 = 50 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 - y_5 = 70 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

Крок 3. Побудова первинного базису.

Основна матриця системи (6)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & -1 & 0 \\ 2 & 1 & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

містить одиничний двовимірний вектор $(0; 1)$, що відповідає змінній y_3 , яка увійде у первинний базис. Ця змінна міститься у другому рівнянні системи (6) з коефіцієнтом «1». Щоб отримати одиничну підматрицю у цій матриці, введемо невід'ємну *штучну базисну змінну* y_6 , яку додамо до лівої частини першого рівняння. Штучну змінну y_6 , включимо в цільову функцію з коефіцієнтом «-10000». Зазначимо, що абсолютна величина коефіцієнтів при штучних змінних повинна бути на порядок вище за всі абсолютні величини коефіцієнтів цільової функції. У результаті складемо математичну модель *розширеної задачі*:

$$Z_1 = -900 \cdot y_1 - 900 \cdot y_2 - 400 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 - 10000 \cdot y_6 \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 - y_4 + y_6 = 50 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 - y_5 = 70 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

Отже, маємо: по-перше, усі вільні елементи системи (7) - невід'ємні; по-друге, основна матриця системи (7)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & -1 & 0 & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 2 & 1 & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & 0 & -1 & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

містить одиничну підматрицю, що утворена двовимірними векторами $(0; 1)$ і $(1; 0)$, котрим відповідають базисні змінні y_3, y_6 , причому кількість базисних змінних дорівнює кількості рівнянь системи (7), тому система (7) має первинний базис.

Крок 5. Розв'язуємо отриману задачу симплексним методом за алгоритмом, що описано в п. 1.3. Відповідні симплексні таблиці задачі і зразки формул для EXEL наведені на рис. 2.1 і рис. 2.2 відповідно.

Слід зазначити, що *ітераційний процес симплексного методу продовжується доти, поки оцінки оптимальності Δ_j містять від'ємні елементи.*

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				Перша симплексна таблиця двоїстої задачі						
2				-900	-900	-400	0	0	-10000	
3	базис	сб	bi	y1	y2	y3	y4	y5	y6	bi/aik
4	y6	-10000	50	1	3	0	-1	0	1	16,66667
5	y3	-400	70	2	1	1	0	-1	0	70
6			-528000	-9900	-29500	0	10000	400	0	
7				Друга симплексна таблиця двоїстої задачі						
8				-900	-900	-400	0	0	-10000	
9	базис	сб	bi	y1	y2	y3	y4	y5	y6	bi/aik
10	y2	-900	16,66667	0,333333	1	0	-0,33333	0	0,333333	50
11	y3	-400	53,33333	1,666667	0	1	0,333333	-1	-0,33333	32
12			-36333,3	-66,6667	0	0	166,6667	400	9833,333	
13				Третя симплексна таблиця двоїстої задачі						
14				-900	-900	-400	0	0	-10000	
15	базис	сб	bi	y1	y2	y3	y4	y5	y6	
16	y2	-900	6	0	1	-0,2	-0,4	0,2	0,4	
17	y1	-900	32	1	0	0,6	0,2	-0,6	-0,2	
18			-34200	0	0	40	180	360	9820	
19				x3	x4	x5	x1	x2		

Рис. 2.1 Результати обчислень методом штучного базису)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				Перша симплексна таблиця двоїстої задачі						
2				-900	-900	-400	0	0	-10000	
3	баз	c _b	b _i	y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	y ₆	b _i /a _{ik}
4	y ₆	-10000	50	1	3	0	-1	0	1	=C4/E4
5	y ₃	-400	70	2	1	1	0	-1	0	=C5/E5
6			=СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$B\$5;C4:C5)	=СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$B\$5;D4:D5)-D2	=СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$B\$5;E4:E5)-E2	=СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$B\$5;F4:F5)-F2	=СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$B\$5;G4:G5)-G2	=СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$B\$5;H4:H5)-H2	=СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$B\$5;I4:I5)-I2	
7				Друга симплексна таблиця двоїстої задачі						
8				-900	-900	-400	0	0	-10000	
9	баз	c _b	b _i	y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	y ₆	b _i /a _{ik}
10	y ₂	-900	=C4/\$E\$4	=D4/\$E\$4	=E4/\$E\$4	=F4/\$E\$4	=G4/\$E\$4	=H4/\$E\$4	=I4/\$E\$4	=C10/D10
11	y ₃	-400	=C5-C4*\$E\$5/\$E\$4	=D5-D4*\$E\$5/\$E\$4	=E5-E4*\$E\$5/\$E\$4	=F5-F4*\$E\$5/\$E\$4	=G5-G4*\$E\$5/\$E\$4	=H5-H4*\$E\$5/\$E\$4	=I5-I4*\$E\$5/\$E\$4	=C11/D11
12			=C6-C4*\$E\$6/\$E\$4	=D6-D4*\$E\$6/\$E\$4	=E6-E4*\$E\$6/\$E\$4	=F6-F4*\$E\$6/\$E\$4	=G6-G4*\$E\$6/\$E\$4	=H6-H4*\$E\$6/\$E\$4	=I6-I4*\$E\$6/\$E\$4	
13				Третя симплексна таблиця двоїстої задачі						
14				-900	-900	-400	0	0	-10000	
15	баз	c _b	b _i	y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	y ₆	
16	y ₂	-900	=C10-C11*\$D\$10/\$D\$11	=D10-D11*\$D\$10/\$D\$11	=E10-E11*\$D\$10/\$D\$11	=F10-F11*\$D\$10/\$D\$11	=G10-G11*\$D\$10/\$D\$11	=H10-H11*\$D\$10/\$D\$11	=I10-I11*\$D\$10/\$D\$11	
17	y ₁	-900	=C11/\$D\$11	=D11/\$D\$11	=E11/\$D\$11	=F11/\$D\$11	=G11/\$D\$11	=H11/\$D\$11	=I11/\$D\$11	
18			=C12-C11*\$D\$12/\$D\$11	=D12-D11*\$D\$12/\$D\$11	=E12-E11*\$D\$12/\$D\$11	=F12-F11*\$D\$12/\$D\$11	=G12-G11*\$D\$12/\$D\$11	=H12-H11*\$D\$12/\$D\$11	=I12-I11*\$D\$12/\$D\$11	

Рис.2.2 Формули розрахунку методу штучного базису в таблицях EXCEL

Якщо серед оцінок оптимальності немає від'ємних елементів, однак не всі штучні змінні виключені з базису, то така задача не має розв'язку.

Із третьої симплексної таблиці двоїстої задачі випливає, що всі оцінки оптимальності Δ_j невід'ємні і всі штучні змінні виведені з базису. Це означає, що опорний план третьої ітерації є оптимальним:

$$y_1^* = 32; y_2^* = 6; y_3^* = 0; y_4^* = 0; y_5^* = 0; y_6^* = 0,$$

а значення функції $Z_1(Y^*) = -34200$ - максимальним. Оскільки $L(Y) = -Z(Y)$, то

$$L_{\min}(Y) = L(Y^*) = -Z(Y^*) = 34200 \text{ грн.}$$

2.3 Економіко-математичний аналіз результатів

Спочатку випишемо результати розв'язання прямої і двоїстої задач симплексним методом.

	Пряма задача	Двоїста задача
Цільова функція	$F_{\max}(X) = 34200$	$L_{\min}(Y) = 34200$
Основні змінні	$x_1^* = 180, x_2^* = 360$	$y_1^* = 32; y_2^* = 6; y_3^* = 0$
Додаткові змінні	$x_3^* = 0, x_4^* = 0, x_5^* = 40$	$y_4^* = 0; y_5^* = 0$

Порівняння результатів, отриманих різними способами.

Звіт по стійкості (рис. 1.12), крім значень оптимальних змінних прямої задачі, містить значення оптимальних основних змінних двоїстої задачі, занесених у стовпчик «Теневые цены»; оптимальні значення додаткових змінних двоїстої задачі можна легко обчислити, якщо підставити оптимальні значення основних змінних в систему рівнянь (6). Результати збігаються з описаними вище.

З останнього рядка симплексної таблиці прямої задачі можна визначити значення двоїстих змінних, а з останньої симплексної таблиці двоїстої задачі - значення змінних прямої задачі так, як це показано на рис. 1.13 і рис. 2.1 відповідно. Як бачимо, результати відповідають знайденим вище.

Цільові функції прямої і двоїстої задач. Із теорем про зв'язок між розв'язками прямої і двоїстої задач випливає, що мінімальне значення цільової функції двоїстої задачі $L_{\min}(Y)$ повинно збігатися з максимальним значенням цільової функції прямої задачі $F_{\max}(X)$. У даному випадку

$$L_{\min}(Y) = F_{\max}(X) = 34200 \text{ грн.} \quad (8)$$

Що стосується прямої задачі, то цільова функція в ній характеризувала тижневий прибуток від реалізації продукції, яку виготовлено на фабриці; і цей прибуток повинен бути максимальним. Для з'ясування економічного змісту цільової функції двоїстої задачі про використання ресурсів розглянемо ситуацію, коли керівництво фабрики стоїть перед альтернативним вибором: чи здійснювати процес виробництва взуття, чи реалізувати на стороні власні виробничі ресурси (продати, здати в оренду тощо) за ринковими цінами. У разі вибору першої альтернативи, оптимальний розв'язок прямої задачі саме й дає нам оптимальний план виробництва взуття, за яким прибуток (ефект від виро-

бничої діяльності підприємства) фабрики буде найбільшим. Якщо ж керівництво фабрики вирішує задачу реалізації власних ресурсів на стороні, то, з одного боку, воно прагнучиме реалізувати їх якомога дорожче, проте, з іншого боку, ринкова ціна не повинна штучно завищуватися, інакше ресурси за такими цінами не знайдуть покупця. А отже, керівництво фабрики має призначувати об'єктивні (незавищені) ціни («тіньові ціни») на виробничі ресурси, виходячи з того, що корисність обох альтернатив повинна бути однаковою, тобто дохід фабрики від реалізації власних ресурсів за цими цінами, який мінімізується, дорівнюватиме ефекту від здійснення виробничої діяльності, тобто величині прибутку фабрики, який повинен бути максимальним. Цей принцип саме й відбиває співвідношення (8), яке говорить про те, що максимальний прибуток фабрики збігається з її можливим мінімальним доходом у зв'язку із відмовою від виробничої діяльності і продажем ресурсів на сторону і складає 34200 грн. за тиждень.

Основні змінні прямої задачі. Для одержання максимального прибутку, фабрика повинна випускати $x_1^* = 180$ пар взуття моделі №1 і $x_2^* = 360$ пар взуття моделі №2 за тиждень.

Додаткові змінні прямої задачі характеризують обсяг невикористаного ресурсу.

1. Третя (додаткова) змінна x_3 відповідає першому обмеженню, причому $x_3^* = 0$ люд.-год., тому ресурс робочого часу використаний цілком, що свідчить про його дефіцитність.
2. Четверта змінна x_4 відповідає другому обмеженню, причому $x_4^* = 0$ шматків, тому ресурс шкіри І сорту використаний цілком, значить і цей ресурс дефіцитний.
3. П'ята змінна x_5 відповідає третьому обмеженню, і $x_5^* = 40$ шматків, тому 40 шматків шкіри ІІ сорти не використані, значить цей ресурс недефіцитний.

Основні змінні двоїстої задачі. Як уже відзначалося вище, економічний зміст основних змінних двоїстої задачі визначається економічним змістом відповідних їм нерівностей системи обмежень прямої задачі, а саме: їх оптимальні значення кількісно характеризують граничне значення тіньової ціни (об'єктивної ціни, рівноважної ціни і т.ін.) за одиницю обмеженого ресурсу, вище за яку його залучення (зокрема додаткове залучення) до виробничого процесу буде збитковим для фірми, що втілюється у ситуацію, коли витрати ресурсів на виробництво одиниці продукції, оцінені в грошовому вираженні ($\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^*$), перевищуватимуть зовнішню оцінку одиниці продукції – її ринкову ціну (або як в нашому випадку прибуток) c_j . А відтак, оптимальні основні двоїсті змінні надають керівництву фабрики (менеджерам з питань постачання) цінну додаткову інформацію для прийняття рішень в умовах ринкових відношень: додаткове залучення у виробництво дефіцитних ресурсів доцільно лише за умови, коли ринкова ціна за одиницю такого ресурсу не перевищує його тіньову ціну.

Тіньова ціна для першого обмеження (ресурс робочого часу) складає $y_1^* = 32$ грн. за одиницю, для другого обмеження (ресурс шкіри I сорту) – $y_2^* = 6$ грн. за одиницю, для третього (ресурс шкіри II сорту) – $y_4^* = 0$ грн. за одиницю. Із цього випливає, що

1) $y_1^* > 0$, тому ресурс робочого часу дефіцитний, і його збільшення вигідне (рентабельне), а саме: збільшення робочого часу на 1 люд.-год. призведе до збільшення прибутку на 32 грн.;

2) $y_2^* > 0$, тому ресурс шкіри I сорту є дефіцитним, і його збільшення рентабельне, а саме: збільшення запасу шкіри I сорту на 1 шматок дасть підприємству прибуток, що складатиме 6 грн.;

3) $y_4^* = 0$, тому ресурс шкіри II сорту не є дефіцитним, а збільшення його запасу не рентабельно.

Якщо деяка **додаткова змінна двоїстої задачі** позитивна, то випуск продукції, що відповідає цій змінній є нерентабельним, а величина цієї змінної характеризує розмір збитку від реалізації одиниці цієї продукції:

$\Delta_j = y_{i+n}^* = \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j$. Дана властивість дозволяє оцінити рентабельність нової продукції (з умови $\Delta_j \leq 0$), якщо відомі планові норми витрат ресурсів на виготовлення її одиниці, а також визначитися з мінімально допустимою (прийнятною) ціною за одиницю продукції, яку планується виробляти (з умови $\Delta_j = 0$).

У даній задачі змінна y_4 відповідає обсягу випуску взуття моделі №1, а y_5 - моделі №2, причому $y_4^* = 0$; $y_5^* = 0$, тому випуск обох видів виробів вигідний (рентабельний) – грошова оцінка сумарних витрат ресурсів на одну пару взуття дорівнює розміру прибутку.

Взаємозамінність ресурсів. У наступну таблицю внесемо значення коефіцієнтів $\eta_{ik} = y_k^* / y_i^*$ взаємозамінності ресурсів.

i \ k	1	2	3
1	1	3/16	0
2	5 1/3	1	0
3	∞	∞	1

Коефіцієнт η_{21} дорівнює $5\frac{1}{3}$, це означає, що при зменшенні запасу робочого часу на 1 люд.-год. необхідно додатково збільшити запас шкіри I сорту на $5\frac{1}{3}$ шматків, щоб значення цільової функції не змінилося. Ресурс робочого часу більш дефіцитний, ніж ресурс шкіри I сорту, тому коефіцієнт взаємозамінності більш дефіцитного ресурсу менш дефіцитним ресурсом $\eta_{12} = 5\frac{1}{3}$ більше 1. Коефіцієнти η_{31} і η_{32} дорівнюють ∞ . Це означає, що замінити зменшення дефіцитних ресурсів робочого часу чи ресурсу шкіри I сорту недефіцитним ресурсом шкіри II сорту не можливо. Коефіцієнти η_{13} і η_{23} дорівнюють 0. Це означає, що при зменшенні недефіцитного ресурсу шкіри II сорту не потрібне збільшення дефіцитних ресурсів робочого часу чи ресурсу шкіри I сорту.

3. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ

ЗАВДАННЯ 3. У трьох пунктах виробництва A_1, A_2, A_3 зосереджений однорідний вантаж у кількостях відповідно рівних a_1, a_2, a_3 тонн. Даний вантаж споживається в чотирьох пунктах B_1, B_2, B_3, B_4 , а потреби в ньому в цих пунктах складають b_1, b_2, b_3, b_4 тонн відповідно. Відома матриця тарифів по перевезенню 1 тони вантажу з $i^{\text{го}}$ пункту виробництва до $j^{\text{го}}$ пункту споживання:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix}.$$

Скласти план перевезень:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{bmatrix},$$

при якому сумарні транспортні витрати будуть мінімальними.

Розв'язати поставлену транспортну задачу

3.1 методом потенціалів,

3.2 за допомогою інструмента «Поиск решения».

3.1 Математична модель транспортної задачі

Розглянемо поставлену задачу для таких вихідних даних:

$$a_1 = 30\text{т}, a_2 = 20\text{т}, a_3 = 40\text{т},$$

$$b_1 = 20\text{т}, b_2 = 30\text{т}, b_3 = 20\text{т}, b_4 = 30\text{т},$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Запишемо їх у вигляді таблиці.

Таблиця 3.1

Пункти виробництва	Пункти споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	1	4	2	30
A_2	1	4	3	3	20
A_3	2	2	4	4	40
Потреби	20	30	20	30	90 100

До нижнього правого куту цієї таблиці занесемо значення сумарних потреб і сумарних витрат:

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 90 \text{ т}, \sum_{j=1}^4 b_j = 100 \text{ т}.$$

У даному випадку $\sum_{i=1}^3 a_i < \sum_{j=1}^4 b_j$, тому модель транспортної задачі є *відкритою*. Відповідно до теореми, для існування в транспортній задачі припустимого плану необхідно і достатньо, щоб її модель була *закритою*, тобто, щоб $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$.

Збалансуємо дану задачу, уводячи фіктивний пункт виробництва A_4 з запасом вантажу $a_4 = \sum_{j=1}^4 b_j - \sum_{i=1}^3 a_i = 100 - 90 = 10$ (т). При цьому вартість перевезень із цього пункту в кожний із пунктів споживання дорівнює 0 (див. табл. 3.2).

Таблиця 3.2

Пункти виробництва	Пункти споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	1	4	2	30
A_2	1	4	3	3	20
A_3	2	2	4	4	40
A_4	0	0	0	0	10
Потреби	20	30	20	30	90 100

Складемо **математичну модель** даної задачі.

1. *Змінні задачі*: x_{ij} – планований обсяг перевезення (у тоннах) з $i^{\text{го}}$ пункту виробництва в $j^{\text{й}}$ пункт споживання ($i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,4}$). Сукупність змінних $\{x_{ij}\}$ утворить матрицю

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{bmatrix}.$$

2. *Цільова функція задачі* виражає транспортні витрати, які необхідно мінімізувати:

$$F(X) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij} = 3x_{11} + 1x_{12} + 4x_{13} + 2x_{14} + \\ + 1x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23} + 3x_{24} + \\ + 2x_{31} + 2x_{32} + 4x_{33} + 4x_{34} \rightarrow \min.$$

3. *Обмеження задачі*: на вивіз вантажу

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 30 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 20 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 40 \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 10
\end{aligned}
\tag{9}$$

на задоволення потреб у вантажі

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 20 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 30 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 20 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 30
\end{aligned}
\tag{10}$$

невід'ємність змінних:

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1,4}, j = \overline{1,4}). \tag{11}$$

Сукупність змінних $\{x_{ij}\}$, що задовольняють обмеженням (9)-(11), утворюють припустимий опорний план. Матриця системи (9) - (10) має ранг на 1 менший кількості рядків цієї системи, тобто на 1 менший від суми кількостей пунктів виробництва і пунктів споживання, у даному випадку це – 7. Це означає, що кількість базисних змінних повинна дорівнювати 7.

3.2 Метод потенціалів розв'язання транспортної задачі

Нульова ітерація транспортної задачі. Підготуємо таблицю (табл. 3.3). Другий рядок і другий стовпець зарезервуємо для значень потенціалів. В останній стовпець внесемо відповідні значення запасів, а в останній рядок – потреб. У праві верхні кути комірок $A_i B_j$ ($i = \overline{1,4}, j = \overline{1,4}$) внесемо матрицю транспортних витрат.

Таблиця 3.3 - Нульова ітерація транспортної задачі

		B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
		$v_1 = 1$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 1$	
A_1	$u_1 = 0$	3 -2	1 30	4 -3	2 -1	30 0
A_2	$u_2 = 0$	1 20	4 -3	3 -2	3 -2	20 0
A_3	$u_3 = 3$	2 2	2 2	4 20	4 20	40 20 0
A_4	$u_4 = -1$	0 0	0 0	0 0	0 10	10 0
Потреби		20 0	30 0	20 0	30 20 0	

Крок 1. Побудову вихідного опорного плану здійснюємо *методом найменшої вартості*. Завантажуючи комірки, відповідні значення обсягів перевезення x_{ij} будемо заносити в нижні ліві кути комірок $A_i B_j$ ($i = \overline{1,4}, j = \overline{1,4}$).

1. Вибираємо комірку з найменшою вартістю (транспортним тарифом). Найменша вартість дорівнює 0, а комірок, що відповідають цій вартості - чотири: A_4B_1 , A_4B_2 , A_4B_3 , A_4B_4 . Завантажимо, наприклад, комірку A_4B_4 так, щоб $x_{44} = \min\{a_4; b_4\} = \min\{10; 30\}$. Перерахуємо запаси, що залишилися, $a'_4 = a_4 - x_{44} = 10 - 10 = 0$, і потреби, що залишилися, $b'_4 = b_4 - x_{44} = 30 - 10 = 20$, а отримані значення запишемо у відповідних комірках таблиці через риску.
2. Оскільки запаси четвертого пункту виробництва вичерпані, то завантажувати комірки рядка A_4 поки не будемо. Серед комірок, що залишилися, виберемо комірку з найменшою вартістю. Маємо дві комірки з вартістю 1. Завантажимо спочатку, наприклад, комірку A_1B_2 : $x_{12} = \min\{a_1; b_2\} = \min\{30; 30\} = 30$. Перерахуємо запаси, що залишилися, $a'_1 = a_1 - x_{12} = 30 - 30 = 0$, і потреби, що залишилися, $b'_2 = b_2 - x_{12} = 30 - 30 = 0$. Потім завантажимо комірку A_2B_1 : $x_{21} = \min\{a_2; b_1\} = \min\{20; 20\} = 20$, $a'_2 = a_2 - x_{21} = 20 - 20 = 0$, $b'_1 = b_1 - x_{21} = 20 - 20 = 0$.
3. На даний момент вичерпані запаси пунктів виробництва A_1 , A_2 і A_4 , а також задоволені потреби споживачів B_1 і B_2 . У нашому розпорядженні залишилися дві комірки з однаковими вартостями: A_3B_3 і A_3B_4 . Завантажимо, наприклад, комірку A_3B_3 : $x_{33} = \min\{a_3; b_3\} = \min\{40; 20\} = 20$, $a'_3 = a_3 - x_{33} = 40 - 20 = 20$, $b'_3 = b_3 - x_{33} = 20 - 20 = 0$. Тепер завантажимо комірку A_3B_4 : $x_{34} = \min\{a'_3; b'_4\} = \min\{20; 20\} = 20$, $a''_3 = a'_3 - x_{34} = 20 - 20 = 0$, $b''_4 = b'_4 - x_{34} = 20 - 20 = 0$.
4. Завантажені комірки відповідають базисним змінним транспортної задачі, їхня кількість на даний момент дорівнює 5, однак, як було відзначено вище, повинна дорівнювати 7. Два відсутні елементи поповнюємо, завантажуючи нульовим обсягом перевезення дві вільні комірки з найменшими тарифами. Причому необхідно подбати про те, щоб жодна з цих комірок не утворювала циклу з наявними завантаженими комірками. Під циклом розуміють замкнуту ламану з прямими кутами переломлення у вершинах. За такі комірки оберемо A_4B_1 і A_4B_2 .
5. Опорний план нульової ітерації утворить матрицю

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Його елементи задовольняють системі обмежень (9)-(11). Значення цільової функції на цьому плані дорівнює

$$F(X_0) = 30 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 20 \cdot 4 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 210 \text{ (у.о.)}.$$

Чи є цей план оптимальним? Відповідь на це питання дає метод потенціалів.

Крок 2. Перевірка оптимальності опорного плану.

1. Побудова системи потенціалів $\{u_i, v_j\}$ ($i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,4}$). Кожному постачальнику A_i поставимо у відповідність потенціал u_i , а споживачу B_j - потенціал v_j . При цьому для кожної базисної змінної відповідні їй потенціали u_i і v_j повинні задовольняти рівності

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad (i = \overline{1,4}, j = \overline{1,4}). \quad (12)$$

Оскільки базисних змінних 7, то сукупність рівностей (12) утворить систему з 8 рівнянь із 7 невідомими. Ця система має нескінченну множину розв'язків, знайдемо одне з них:

- для зручності візьмемо $u_1 = 0$;
 - у рядку A_1 знаходиться базисна змінна x_{12} , тому згідно з (12) $v_2 = c_{12} - u_1 = 1 - 0 = 1$;
 - у стовпці B_2 знаходиться ще одна (крім x_{12}) базисна змінна x_{42} , тому $u_4 = c_{42} - v_2 = 0 - 1 = -1$;
 - за базисною змінною x_{41} знайдемо $v_1 = c_{41} - u_4 = 0 - (-1) = 1$,
 - за базисною змінною x_{44} - $v_4 = c_{44} - u_4 = 0 - (-1) = 1$;
 - за базисною змінною x_{34} - $u_3 = c_{34} - v_4 = 4 - 1 = 3$;
 - за базисною змінною x_{33} - $v_3 = c_{33} - u_3 = 4 - 3 = 1$;
 - за базисною змінною x_{21} - $u_2 = c_{21} - v_1 = 1 - 1 = 0$.
2. Знайдемо оцінки оптимальності Δ_{ij} для небазисних змінних. Значення Δ_{ij} будемо обчислювати за формулою

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \quad (i = \overline{1,4}, j = \overline{1,4}),$$

а результат заносити в нижні ліві кути комірок $A_i B_j$ ($i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,4}$), відокремлюючи їх у рамку:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 1 - 3 = -2, \\ \Delta_{13} &= u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 1 - 4 = -3, \\ \Delta_{14} &= u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 1 - 2 = -1, \\ \Delta_{22} &= u_2 + v_2 - c_{22} = 0 + 1 - 4 = -3, \\ \Delta_{23} &= u_2 + v_3 - c_{23} = 0 + 1 - 3 = -2, \\ \Delta_{24} &= u_2 + v_4 - c_{24} = 0 + 1 - 3 = -2, \\ \Delta_{31} &= u_3 + v_1 - c_{31} = 3 + 1 - 2 = 2, \\ \Delta_{32} &= u_3 + v_2 - c_{32} = 3 + 1 - 2 = 2, \\ \Delta_{43} &= u_4 + v_3 - c_{43} = -1 + 1 - 0 = 0. \end{aligned}$$

3. Перевірка оптимальності опорного плану:

- якщо всі оцінки оптимальності небазисних змінних недодатні, тобто $\Delta_{ij} \leq 0$, то опорний план є оптимальним, і обчислення більше не проводяться;

- якщо серед оцінок оптимальності є додатні, то опорний план не оптимальний, і його необхідно поліпшувати.

Оскільки для розглянутого плану деякі з оцінок оптимальності є додатними, то вихідний опорний план не є оптимальним.

Крок 3.

1. Визначимо змінну, що вводиться до базису. Серед знайдених оцінок оптимальності виберемо найбільше позитивне значення. Таким є 2, що відповідає $\Delta_{31} = \Delta_{32} = 2$. У базис необхідно вводити ту з змінних x_{31} чи x_{32} , якій відповідає менший тариф. У даному випадку $c_{31} = c_{32} = 2$. Тому введемо до базису будь-яку із цих змінних, наприклад, x_{31} .
2. Визначимо змінну, що виводиться з базису. Для цього побудуємо цикл, що проходить через деякі з завантажених комірок і комірку A_3B_1 (що відповідає змінній x_{31} , яка вводиться з базису). Нагадаємо, що під *циклом* розуміють замкнену ламану з прямими кутами переломлення у вершинах. Відомо, що цикл у транспортній задачі можна побудувати єдиним чином. У даному випадку цикл виглядає так, як це показано в табл. 3.3. Вершину циклу в комірці A_3B_1 відзначаємо знаком «+», а далі інші вершини позначаємо знаками, що чергуються: «-» або «+», послідовно пересуваючись циклом у будь-якому напрямку. Серед комірок, у які потрапив знак «-», вибираємо комірку з найменшим значенням базисної змінної. У даному випадку це значення дорівнює нулю, воно обведене ромбом, а відповідає воно базисній змінній x_{41} , котру будемо виводити з базису.
3. *Побудова нового базису.*
Підготуємо нову таблицю *першої ітерації* (див. табл. 3.4).
 - Заносимо в неї дані в умові значення транспортних тарифів, запасів і потреб.
 - Без зміни необхідно перенести в таблицю значення базисних змінних, не задіяних циклом.
 - Оскільки виведена з базису змінна дорівнює 0, то змінна, що вводиться з базису, також дорівнюватиме нулю, а значення базисних змінних, що знаходяться у вершинах циклу, у даному випадку не зміняться. Комірка змінної, що виведена з базису, стане в результаті вільною.
4. Побудований опорний план першої ітерації утворить ту ж матрицю, що і для вихідного опорного плану, тому значення цільової функції на цьому плані не зміниться:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad F(X_1) = 210 \text{ (y.o.)}$$

Таблиця 3.4 - Перша ітерація транспортної задачі

	$v_1 = -1$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 1$	
$u_1 = 0$	3 -4	1 30	4 -3	2 -1	30
$u_2 = 2$	1 20	4 -1	3 0	3 0	20
$u_3 = 3$	2 0	2 2	4 20	4 20	40
$u_4 = -1$	0 -2	0 0	0 0	0 10	10
	20	30	20	30	

Чи є новий опорний план оптимальним? Для відповіді на це питання повертаємося до кроку 2 і кроку 3, виконуючи послідовно аналогічні дії. Результати цих дій занесені в табл. 3.4.

- Будуємо систему потенціалів.
- Обчислюємо оцінки оптимальності небазисних змінних.
- Перевіряємо план на оптимальність: серед оцінок оптимальності є позитивна Δ_{32} ; тому *план першої ітерації не оптимальний*, і вводиться до базису змінна – x_{32} .
- Будуємо цикл, за допомогою якого визначаємо змінну, що виводиться з базису; такою є x_{42} .
- Будуємо нову таблицю *другої ітерації* (табл. 3.5), зберігаючи дані умови і значення базисних змінних, не задіяних циклом. Оскільки $x_{42} = 0$, то змінна, що вводиться до базису, також буде дорівнювати нулю, а значення базисних змінних, що знаходяться у вершинах циклу, у даному випадку не зміняться.

Таблиця 3.5 - Друга ітерація транспортної задачі

	$v_1 = 1$	$v_2 = 1$	$v_3 = 3$	$v_4 = 3$	
$u_1 = 0$	3 -2	1 30	4 -1	2 1	30
$u_2 = 0$	1 20	4 -3	3 0	3 0	20
$u_3 = 1$	2 0	2 0	4 20	4 20	40
$u_4 = -3$	0 -2	0 -2	0 0	0 10	10
	20	30	20	30	

Для опорного плану другої ітерації одержимо

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad F(X_2) = 210 \text{ (y.o.)}.$$

Повертаємося до кроку 2 і кроку 3, результати виконаних дій занесені в табл. 3.5. *Опорний план другої ітерації не оптимальний.* У цьому випадку змінна, що вводиться до базису, - x_{14} , а та, яка виводиться з базису, - $x_{34} = 20$. Зауважимо, що при побудові таблиці *третьої ітерації* (табл.3.6) значення змінних, задіяним циклом, перераховуємо, додаючи до тих із них, що відмічені знаком «+» значення змінної, що виводиться з базису (тобто «20»), а від змінних, відмічених знаком «-», віднімаємо це значення. Змінна, що вводиться до базису, приймає значення 20. Комірка A_3B_4 виявиться вільною.

Для опорного плану третьої ітерації одержимо

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 20 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

$$F(X_3) = 10 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 0 = 190 \text{ (y.o.)}.$$

Таблиця 3.6 - Третя ітерація транспортної задачі

	$v_1 = 1$	$v_2 = 1$	$v_3 = 3$	$v_4 = 2$	
$u_1 = 0$	3 -4	1 ⊖ 10	4 -1	2 ⊕ 20	30
$u_2 = 0$	1 20	4 -3	3 0	3 -1	20
$u_3 = 1$	2 0	2 ⊕ 20	4 ⊖ 20	4 -1	40
$u_4 = -2$	0 -1	0 -1	0 ⊕ 1	0 ⊖ 10	10
	20	30	20	30	

Із табл. 3.6 бачимо, що *опорний план третьої ітерації не оптимальний.* Змінна в цьому випадку, що вводиться до базису, - x_{43} , а змінна, що виводиться з базису, - $x_{12} = 10$. Проводимо перерахування базисних змінних. Результати обчислень у четвертій ітерації занесені в табл. 3.7. Для опорного плану цієї ітерації виконана умова оптимальності: всі оцінки оптимальності недодатні.

У результаті маємо

$$X^* = X_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_{\min}(X) = F(X^*) = 30 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 10 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 180 \text{ (y.o.)}.$$

Таблиця 3.7 - Четверта ітерація транспортної задачі

	$v_1 = 0$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 2$	
$u_1 = 0$	3 -3	1 -1	4 -2	2 30	30
$u_2 = 1$	1 20	4 -3	3 0	3 0	20
$u_3 = 2$	2 0	2 30	4 10	4 0	40
$u_4 = -2$	0 -2	0 -2	0 10	0 0	10
	20	30	20	30	

Зауважимо, що серед оцінок оптимальності останньої ітерації є такі, значення яких дорівнює нулю, тому побудований **опорний план не єдиний**, для якого цільова функція приймає мінімальне значення 180 у.о.

Відповідь. Найменші сумарні транспортні витрати, що складають 180 у.о., будуть відповідати такому плану перевезень:

- з пункту виробництва A_1 необхідно перевозити 30 т вантажу до пункту споживання B_4 ;
- з пункту виробництва A_2 - 20 т вантажу до пункту споживання B_1 ;
- з пункту виробництва A_3 - 30 т вантажу до пункту споживання B_2 і 10 т – в B_3 .

Оскільки пункт A_4 є фіктивним, то споживач B_3 залишиться невдоволений на 10 т вантажу.

Результат обчислень можна оформити також у вигляді схеми, показуючи, з якого пункту виробництва в який пункт споживання перевозиться вантаж:

$$\begin{array}{l}
 30\text{т} \\
 A_1 \rightarrow B_4 \\
 20\text{т} \\
 A_2 \rightarrow B_1 \\
 30\text{т} \\
 A_3 \rightarrow B_2 \\
 10\text{т} \\
 \downarrow \rightarrow B_3
 \end{array}$$

3.2 Розв'язання транспортної задачі з використанням інструмента “Поиск решения”

Транспортна задача вже була зведена до закритої моделі. Результат внесений у табл. 3.2. Відповідно до цієї таблиці підготуємо аркуш EXCEL для застосування інструмента «Поиск решения» (див. рис. 3.1).

1. Комірки B4:E7 заповнюємо матрицею транспортних тарифів транспортної задачі, зведеної до закритого вигляду.

2. У комітках F4:F7 записуємо обсяги запасів a_i на підприємстві A_i ($i = \overline{1,4}$).
3. У комірки B8:E8 вносимо обсяги потреб b_j споживача B_j ($j = \overline{1,4}$).
4. Комірки B11:E14 резервуємо для значень змінних моделі, що будуть знайдені після виконання процедури «Поиск решения».
5. Комірка F15 (цільова комірка) резервується для обчислення оптимального значення цільової функції моделі.

	A	B	C	D	E	F	
1							
2							
3		B1	B2	B3	B4	Запаси	
4	A1	3	1	4	2	30	
5	A2	1	4	3	3	20	
6	A3	2	2	4	4	40	
7	A4	0	0	0	0	10	
8	Потреби	20	30	20	30	Сума=100	
9							
10		B1	B2	B3	B4	Запаси	
11	A1						
12	A2						
13	A3						
14	A4						
15	Потреби						ЦФ

Рис. 3.1 - Представлення вихідних даних у таблиці EXEL

Після заповнення вихідних даних у цільову комірку F15 вносимо формули СУММПРОИЗВ(B4:E7; B11:E14), у комірку F11 – СУМ(B11:E11), що копіюємо з модифікаціями в комірки F12:F14, і в комірку B15 – СУМ(B11:B14), що копіюємо з модифікаціями в комірки C15:E15. Результат представлений на рис. 3.2.

	A	B	C	D	E	F	
1							
2							
3		B1	B2	B3	B4	Запаси	
4	A1	3	1	4	2	30	
5	A2	1	4	3	3	20	
6	A3	2	2	4	4	40	
7	A4	0	0	0	0	10	
8	Потреби	20	30	20	30	Сумма=100	
9							
10		B1	B2	B3	B4	Запаси	
11	A1					=СУММ(B11:E11)	
12	A2					=СУММ(B12:E12)	
13	A3					=СУММ(B13:E13)	
14	A4					=СУММ(B14:E14)	
15	Потреби	=СУММ(B11:B14)	=СУММ(C11:C14)	=СУММ(D11:D14)	=СУММ(E11:E14)	=СУММПРОИЗВ(B4:E7;B11:E14)	ЦФ

Рис. 3.2 - Формули розрахунку в таблиці EXEL

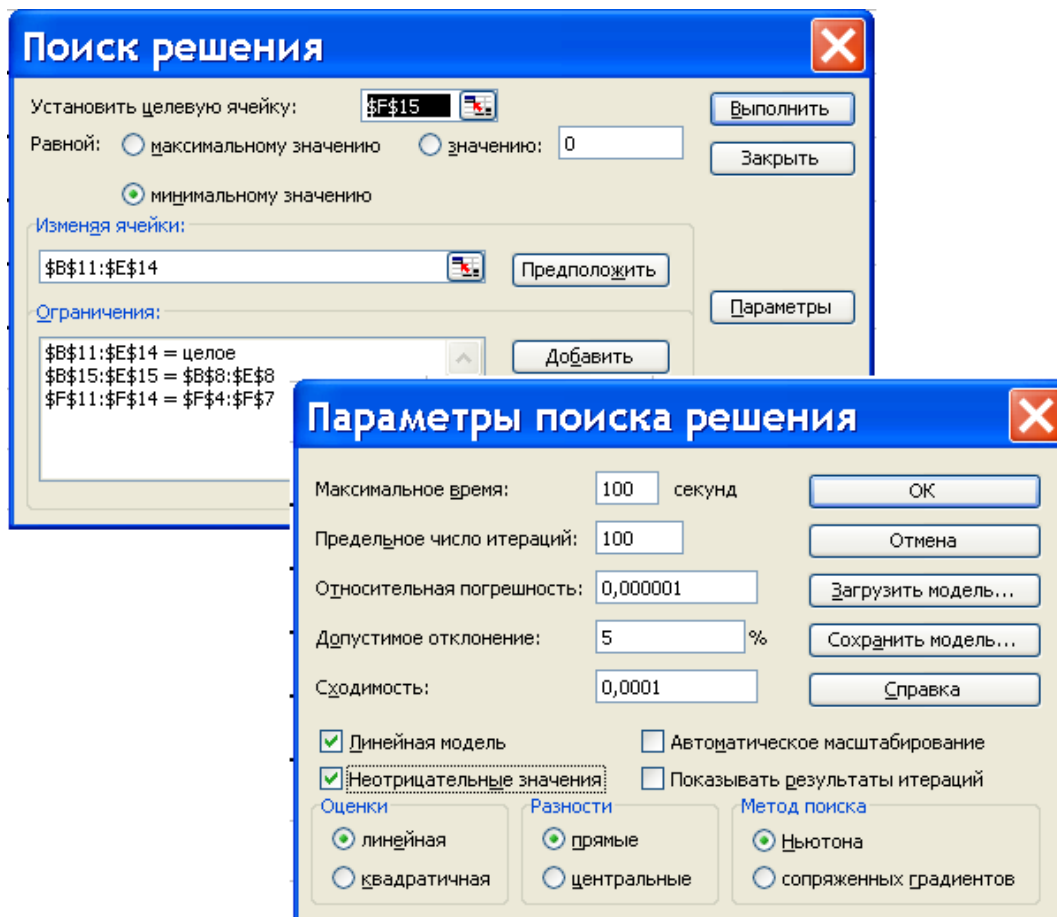


Рис. 3.3 - Экранна форма «Поиск решения»

	A	B	C	D	E	F	
1							
2							
3		B1	B2	B3	B4	Запаси	
4	A1	3	1	4	2	30	
5	A2	1	4	3	3	20	
6	A3	2	2	4	4	40	
7	A4	0	0	0	0	10	
8	Потребн	20	30	20	30	Сума=100	
9							
10		B1	B2	B3	B4	Запаси	
11	A1	0	0	0	30	30	
12	A2	20	0	0	0	20	
13	A3	0	30	10	0	40	
14	A4	0	0	10	0	10	
15	Потребн	20	30	20	30	180 ЦФ	
16							
17							
18							
19							
20							
21							
22							
23							

Рис. 3.4 - Результаты работы процедуры «Поиск решения» (перший вариант)

Таким чином, усі підготовчі процедури закінчені, тому вибираємо в «Сервис» інструмент «Поиск решения». Заповнюємо екранну форму, що з'явилася, так, як це показано на рис. 3.3, виконуючи дії, аналогічні описаним у п. 1.2.

Результат розв'язання транспортної задачі з використанням інструмента «Поиск решения» представлений на рис. 3.4. Оптимальний розв'язок транспортної задачі в цьому випадку можна представити матрицею

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix},$$

а мінімальне значення цільової функції на цьому плані дорівнює

$$F_{\min}(X) = F(X^*) = 180 \text{ (y.o.)}.$$

Як було зауважено вище (перед остаточним записом результатів методу потенціалів), розв'язок даної задачі не єдиний. Другий варіант розв'язку представлено на рис. 3.5. Оптимальний розв'язок транспортної задачі в цьому випадку можна представити матрицею

$$X^{**} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 \\ 10 & 0 & 10 & 0 \\ 10 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix},$$

Мінімальне значення цільової функції при цьому не зміниться, а саме:

$$F_{\min}(X) = F(X^{**}) = 180 \text{ (y.o.)}.$$

Зауважимо, що для отримання різних варіантів розв'язку транспортної задачі (якщо розв'язок не єдиний) потрібно повторно запускати на виконання процедуру «Поиск решения» без зміни вхідних даних.

	A	B	C	D	E	F	
1							
2							
3		B1	B2	B3	B4	Запаси	
4	A1	3	1	4	2	30	
5	A2	1	4	3	3	20	
6	A3	2	2	4	4	40	
7	A4	0	0	0	0	10	
8	Потреби	20	30	20	30	Сума=100	
9							
10		B1	B2	B3	B4	Запаси	
11	A1	0	0	0	30	30	
12	A2	10	0	10	0	20	
13	A3	10	30	0	0	40	
14	A4	0	0	10	0	10	
15	Потреби	20	30	20	30	180 ЦФ	

Рис. 3.5 - Результати роботи процедури «Поиск решения» (другий варіант)

Відповідь. Найменші сумарні транспортні витрати складають 180 у.о. Це відповідає двом варіантам плану перевезень. *Перший варіант:*

- з пункту виробництва A_1 необхідно перевозити 30 т вантажу до пункту споживання B_4 ;
- з пункту виробництва A_2 - 20 т вантажу до пункту споживання B_1 ;
- з пункту виробництва A_3 - 30 т вантажу до пункту споживання B_2 і 10 т – в. B_3 ;
- при цьому плані споживач B_3 залишиться невдоволений на 10 т вантажу.

Другий варіант:

- з пункту виробництва A_1 необхідно перевозити 30 т вантажу до пункту споживання B_4 ;
- з пункту виробництва A_2 - 10 т вантажу до пункту споживання B_1 і 10 т – в B_3 ;
- з пункту виробництва A_3 - 10 т вантажу до пункту споживання B_1 і 30 т – в. B_2 ;
- при цьому плані споживач B_3 залишиться невдоволений на 10 т вантажу.

4. ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

ЗАВДАННЯ 1. Побудувати математичну модель економічної задачі. Розв'язати задачу за допомогою побудованої моделі

- 1.1 з використанням інструмента “Поиск решения”,
- 1.2 графічним методом,
- 1.3 симплексним методом.

Зробити висновки в термінах постановки задачі.

ЗАВДАННЯ 2. Побудувати математичну модель двоїстої задачі. Розв'язати двоїсту задачу симплексним методом. Порівняти отриманий результат із тим, що отримано, виходячи з останньої симплексної таблиці прямої задачі, а також, виходячи зі звіту по стійкості процедури «Поиск решения» прямої задачі. Зробити економічний аналіз результатів.

1. Фірма виготовляє дві моделі А і В книжкових полиць. У таблиці наведені дані по нормах витрат ресурсів (дошок і машинного часу) на одну полицю кожної моделі. У ній же зазначено прибуток від реалізації одного виробу кожного виду і загальний запас ресурсів, який може використовувати фірма протягом тижня. Скільки виробів кожної моделі фірмі необхідно випускати за тиждень для одержання максимального прибутку від їхньої реалізації?

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальний обсяг ресурсів
	А	В	
Дошки (м ²)	3	4	1700
Машинний час (год.)	0,2	0,5	160
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	20	40	

2. Фірма виготовляє два продукти А і В, ринок збуту яких необмежений. Кожен продукт повинний бути оброблений кожною з машин І, ІІ й ІІІ. Час обробки в годинах для кожного з виробів А і В, загальний запас машинного часу за тиждень і прибуток від реалізації виробів наведені нижче в таблиці:

Машина виду	Час обробки одиниці виробу (год.)		Загальний обсяг машинного часу (год.)
	А	В	
І	0,5	0,25	40
ІІ	0,4	0,3	36
ІІІ	0,2	0,4	36
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	50	30	

Фірмі треба визначити план випуску виробів А і В, при якому прибуток від їхньої реалізації буде максимальною.

3. Для виробництва столів і шаф меблева фабрика використовує необхідні ресурси. Норми витрат ресурсів на один виріб даного виду, прибуток від реалізації одного виробу і загальний обсяг наявних ресурсів кожного виду наведені в таблиці.

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальний обсяг ресурсів
	стіл	шафа	
<i>Деревина (м³):</i>			
I виду	0,2	0.1	40
II виду	0.1	0,3	60
Трудовісткість (люд.-год.)	1,2	1,5	371,4
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	120	160	

Визначити, скільки столів і шаф фабрики варто виготовляти, щоб прибуток від їхньої реалізації був максимальним.

4. На промисловому комплексі по виробництву м'яса відгодовують свиней двох порід. Усі дані представлені в таблиці.

Види корму	Потрібна кількість корму (ц) для породи свиней		Запаси корму, ц
	I	II	
Грубі (сінне борошно, тра- в'яні)	2	3	1000
Соковиті (коренеплоди, картопля)	4	2	1200
Комбікорми	1	1	380
Продуктивність, ц	3	2,5	

Потрібно знайти таке поголів'я свиней кожної породи, щоб продуктивність 1 ц м'яса була максимальною.

5. Для виробництва двох видів виробів А і В використовується токарське, фрезерне і шліфувальне устаткування. Норми витрат часу для кожного з типів устаткування на один виріб даного виду наведені в таблиці. У ній же зазначений загальний фонд робочого часу кожного з типів устаткування, а також прибуток від реалізації одного виробу. Визначити план випуску виробів А і В, що забезпечує максимальний прибуток від їхньої реалізації.

Тип устаткування	Витрати часу (верст.-год.) на обробку одного виробу виду:		Загальний фонд робочого часу устаткування (год.)
	А	В	
Фрезерне	1	0,8	168
Токарне	0,5	0,1	180
Шліфувальне	0,6	1,2	144
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	140	180	

6. Для виробництва двох видів виробів А і В підприємство використовує три види сировини. Норми витрати сировини кожного виду на виготовлення одиниці продукції даного виду наведені в таблиці. У ній же зазначені прибуток від реалізації одного виробу кожного виду і загальний обсяг сировини даного виду, що може бути використано підприємством.

З огляду на те, що вироби А і В можуть виготовлятися в будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений), потрібно скласти такий план їхнього випус-

ку, при якому прибуток підприємства від реалізації всіх виробів буде максимальним.

Ресурси	Норми витрат ресурсів (кг) на один виріб		Загальний обсяг ресурсів (кг)
	A	B	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	30	40	

7. У цеху по виробництву консервованих фруктів виготовляються два види компотів із трьох видів фруктів (яблука, груші і сливи). Перед відправленням у торгову мережу компоти розливають у банки: компот I виду – у 5-літрові, II виду – у 3-літрові. Усі дані, необхідні для розв’язання задачі, наведені в таблиці.

Фрукти	Витрати фруктів (кг) для компоту виду		Запас, кг
	I	II	
Яблука	1	0,5	200
Груші	0,3	0,25	65
Сливи	0,75	1	200
Прибуток від реалізації 1 банки компоту, грн.	3	2	

Потрібно скласти такий план виробництва двох видів компоту, для якого прибуток був би найбільшим.

8. Компанія виготовляє полиці двох розмірів — A і B. Агенти в справах продажу вважають, що за тиждень на ринку може бути реалізовано до 550 полиць. У таблиці наведені дані по нормах витрат ресурсів (дошок і машинного часу) на одну полицю відповідного розміру. У ній же зазначено прибуток від реалізації одного виробу кожного виду і загальний запас ресурсів, який може використовувати фірма протягом тижня

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальний обсяг ресурсів
	A	B	
Дошки (м ²)	2	3	1200
Машинний час (год.)	0,2	0,5	160
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	30	40	

Скільки полиць кожного типу варто випускати протягом тижня, щоб прибуток від їхньої реалізації був найбільшим?

9. На звірофермі можуть вирощувати чорно-бурих лисиць і песців. Для забезпечення нормальних умов їхнього вирощування використовують три види кормів. Кількість кормів кожного виду, які повинні щодня одержувати лисиці і песці, наведено в таблиці. У ній же зазначені загальний обсяг корму кожного виду, що може бути використано звірофермою, і прибуток від реалізації однієї

шкурки лисиці і песця. Визначити, скільки лисиць і песців варто вирощувати на звірофермі, щоб прибуток від реалізації їхніх шкурок був максимальним.

Вид корму	Кількість одиниць корму, що повинна отримувати		Загальний обсяг корму
	лисиця	песець	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибуток від реалізації однієї шкурки (грн.)	320	240	

10. Металургійний цех випускає два види продукції А і Б. Цех має у своєму розпорядженні три види устаткування, кожне з яких має свій фонд робочого часу і продуктивність, наведені нижче в таблиці. У ній же наведений прибуток від реалізації 1 тонни продукції кожного виду. Скласти план випуску продукції, що забезпечує максимальний прибуток.

Тип устаткування	Продуктивність (т/год.) виду продукції		Фонд часу (год.)
	А	Б	
Плавильна піч	7	6	4200
Травильний агрегат	6	4	3000
Прокатний стан	2	1	900
Прибуток від реалізації 1 т продукції (тис. грн.)	4	3	

11. У цеху підприємства вирішено встановити додаткове устаткування двох видів – I і II. Площа, необхідна для установки одного комплексу устаткування відповідного виду, ціна такого комплексу, а також загальний обсяг ресурсів (виробничих площ і грошових ресурсів), що виділяються підприємством, наведені в таблиці.

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один комплект устаткування виду		Загальний обсяг ресурсів за день
	I	II	
Виробничі площі (м ²)	2	1,5	7
Грошові ресурси (тис. грн.)	2	3	10

Придбання одного комплексу устаткування 1^{го} виду дозволяє збільшити випуск продукції в зміну на 3 одиниці, а одного комплексу устаткування 2^{го} виду – на 4 одиниці. Визначити такий набір додаткового устаткування, що дає можливість максимально збільшити випуск продукції.

12. Підприємство має у своєму розпорядженні виробничі потужності чотирьох видів. Норми витрат потужностей (у год.) кожного виду на одиницю продукції кожного із двох типів, загальний запас таких потужностей і прибуток від реалізації одиниці продукції №1 і №2 наведені в таблиці. Скласти план виробництва продукції двох видів, при якому доход підприємства від реалізації всієї продукції виявився б максимальним.

Потужності (у год.)	Норми витрат потужностей (у год.) на одиницю продукції типу		Загальний запас потужностей (год.)
	№1	№2	
M1	2	1	16
M2	1	1	10
M3	-	1	6
M4	1	-	7
Прибуток від реалізації одиниці продукції (грн.)	30	40	

13. На промисловому комплексі по виробництву м'яса відгодовують свиней двох порід. Усі дані представлені в таблиці.

Види корму	Потрібна кількість корму (ц) для породи свиней		Запаси корму, ц
	I	II	
Грубі (сінне борошно, тра- в'яні)	2	5	900
Соковиті (коренеплоди, картопля)	4,5	2	1150
Комбікорми	1	1,5	340
Продуктивність, ц	4	5	

Потрібно знайти таке поголів'я свиней кожної породи, щоб продуктивність 1 ц м'яса була максимальною.

14. Підприємство випускає два види продукції і використовує три типи основного устаткування: токарське, фрезерне і шліфувальне устаткування. Витрати часу на виготовлення одиниці продукції для кожного з типів устаткування наведені в таблиці. У ній же зазначений загальний фонд робочого часу кожного з типів устаткування, а також прибуток від реалізації одного виробу даного виду. Визначити такий обсяг випуску виробів, при якому загальний прибуток від їхньої реалізації буде максимальним.

Тип устаткування	Витрати часу (верст.-год.) на обробку одиниці продукції виду:		Загальний фонд робочого часу устаткування (год.)
	1	2	
Фрезерне	1	-	100
Токарне	2	1	280
Шліфувальне	1	2	320
Прибуток від реалізації 1 т продукції (тис. грн.)	80	60	

15. Кондитерська фабрика для виробництва двох видів карамелі А і В використовує три види вихідної сировини: цукровий пісок, патоку і фруктове пюре. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво 1 т карамелі кожного виду наведені в таблиці. У ній же наведені загальні запаси сировини і прибуток від реалізації 1 т продукції. Знайти план випуску карамелі, що забезпечує максимальний прибуток.

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на 1 т карамелі		Загальний обсяг сировини (т)
	A	B	
Цукровий пісок	0,8	0,6	80
Патока	0,5	0,8	60
Фруктове пюре	-	0,1	8
Прибуток від реалізації 1 т карамелі (тис. грн.)	1,5	2	

16. Для виробництва двох видів виробів А і В використовуються три види сировини. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво одиниці продукції даного виду наведені в таблиці. У ній же наведені загальні запаси сировини і прибуток від реалізації одного виробу.

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на один виріб		Загальний обсяг сировини (кг)
	A	B	
I	5	2	300
II	2	2	150
III	2	5	300
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	30	40	

Фірмі треба визначити план випуску виробів А і В, при якому прибуток від їхньої реалізації буде максимальним.

17. Трикотажна фабрика для виготовлення светрів і кофточок використовує чисту вовну, силон і нітрон, запаси якого складають відповідно 190, 120 і 80 кг. Кількість пряжі кожного виду (у кг), необхідної для виготовлення 10 виробів, а також прибуток від їхньої реалізації наведені в таблиці.

Вид сировини	Витрати пряжі на 10 шт.	
	Светри	Кофточки
Вовна	3	2
Силон	2	1
Нітрон	1	1
Прибуток (у.о.)	50	30

Установити план випуску виробів, що максимізує прибуток.

18. Завод-виробник високоточних елементів для автомобілів випускає два різні типи деталей: Х і V. У таблиці наведені дані по нормах витрат ресурсів на одну деталь кожного типу. У ній же зазначені прибуток від реалізації однієї деталі кожного типу і загальний запас ресурсів, який може витратити фірма протягом тижня

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальний обсяг ресурсів
	X	V	
Металеві стрижні (кг)	2	5	10 000
Листовий метал (кг)	5	2	10 000
Робочий час (люд.-год.)	1	2	4 000
Прибуток від реалізації однієї деталі (грн.)	90	120	

Скільки деталей кожного типу варто робити, щоб максимізувати загальний прибуток за тиждень?

19. Фірма виготовляє дві моделі А і В письмових столів. Їхнє виробництво обмежене наявністю сировини (дошки) і часом машинної обробки. У таблиці наведені дані по нормах витрат ресурсів на один стіл відповідної моделі. У ній же зазначені прибуток від реалізації одного виробу і загальний запас ресурсів, які має в розпорядженні фірма протягом тижня

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальний обсяг ресурсів
	А	В	
Дошки (м ²)	6	4	2000
Машинний час (год.)	0,25	0,5	180
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	100	160	

Скільки столів кожної моделі фірмі необхідно випускати за тиждень для одержання максимального прибутку від їхньої реалізації?

20. Автозавод випускає дві моделі автомобілів: «Каприз» і (більш дешево) «Фіаско». У таблиці наведені дані по нормах витрат ресурсів на одну модель кожного типу. У ній же зазначені прибуток від реалізації однієї моделі кожного типу і загальний запас ресурсів, який може витратити фірма протягом тижня

Ресурси	Норми витрат ресурсів на одну модель автомобіля		Загальний обсяг ресурсів на тиждень
	«Каприз»	«Фіаско»	
Робочий час (люд.-год.)			
- некваліфіковані робітники	30	40	40000
- кваліфіковані робітники	40	20	32000
Витрати на комплектуючі (у.о.)	500	1500	900000
Прибуток від реалізації одного автомобіля (у.о.)	1000	750	

Робітники, що здійснюють доставку, працюють п'ять днів на тиждень і можуть забрати з заводу не більш 210 машин у день. Який обсяг випуску кожної моделі Ви б рекомендували? Що б Ви рекомендували для підвищення прибутку фірми?

21. Цех випускає два види виробів. Представлена нижче таблиця містить інформацію про витрати ресурсів на одиницю виробу, про загальний запас ресурсів, про ціни продажу одного виробу.

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальний обсяг ресурсів
	1	2	
Устаткування (верст.-год.)	0,2	0,3	78
Сировина (кг)	1	4	850
Електроенергія (кВт/год.)	2	4	880
Ціна одного виробу (грн.)	30	100	

Скільки необхідно виготовляти виробів кожного виду, щоб вартість продукції була максимальною?

22. Швейною фабрикою для виготовлення двох видів виробів можуть бути використані тканини трьох артикулів. Норми витрат тканини всіх артикулів на пошиття одного виробу даного виду наведені в таблиці. У ній же наведене наявна в розпорядженні фабрики загальний обсяг тканини даного артикула і ціна одного виробу даного виду.

Артикул тканини	Норми витрат тканини (м) на один виріб виду		Загальний обсяг тканини (м)
	1	2	
I	1	-	150
II	-	1	150
III	3	2	600
Ціна одного виробу (грн.)	80	60	

Визначити, скільки виробів кожного виду повинна виготовити фабрика, щоб вартість продукції була максимальною.

23. На ткацькій фабриці для виготовлення двох артикулів тканини використовуються ткацькі верстати двох видів, пряжа і барвники. У таблиці представлена продуктивність верстатів кожного виду, норми витрат пряжі і вовни, ціна 1 м тканини даного артикула, а також загальний фонд робочого часу верстатів кожного виду, фонд пряжі і барвників.

Ресурси	Норми витрат ресурсів на 1 м тканини артикула		Загальний обсяг ресурсів
	1	2	
Продуктивність верстатів (верст.-год.)	0,06	0,03	600
Пряжа (кг)	1,0	1,5	15000
Барвники (кг)	0,01	0,01	120
Ціна 1 м тканини (грн.)	80	50	

Скласти такий план виготовлення тканини, відповідно якому будуть виготовлені тканини кожного артикула, з максимальною загальною вартістю

24. Швальня виготовляє костюми і сукні з двох видів тканин. У таблиці наведені дані по нормах витрат тканин на один виріб. У ній же зазначені прибуток від реалізації одного виробу і загальний запас тканин, які має використати у своєму розпорядженні майстерня.

Тканина	Норми витрат тканини на один виріб		Загальний обсяг ресурсів (м ²)
	сукня	костюм	
Вид №1 (м ²)	1,5	1,6	139
Вид №2 (м ²)	0,5	1	65
Прибуток від реалізації одного виробу (грн.)	30	50	

Визначити, скількох суконь і костюмів треба зшити майстерні, щоб домогтися найвищої рентабельності виробництва.

25. Для будівництва будинків обрані два проекти. По кожному з проектів відома: тривалість різних видів будівельних робіт, кількість будівельних об'єктів, на яких можна вести одночасно ці види робіт, а також житлова площа будинку.

Вид робіт	Тривалість виконання (дні) для типового проекту		Кількість об'єктів будівництва, на яких можна одночасно вести роботи
	A	B	
Закладка фундаменту	20	30	15
Монтажні роботи	8	7	4
Інші роботи	30	15	12
Житлова площа (м ²)	3000	2000	

Скласти план будівництва, який максимізує введення житлової площі протягом року (300 робочих днів).

26. У деякій лікарні лікують два види хвороб: напади і травми хребта. У таблиці наведений час лікування одного хворого в хірургічній палаті, час використання для хворого томографічного сканера і час лікування хворого. У ній же наведено загальний обсяг зазначених ресурсів у рік.

Ресурси	Час лікування одного хворого		Загальний обсяг ресурсів
	Напади	Травми	
Хірургічна палата (год.)	-	2	2600
Томографічний сканер (год.)	1	1	2600
Місця (дні)	4	10	14600

Уряд забезпечує винагороду за кожен випадок лікування: 1000 дол. за лікування нападу і 2000 дол. за операцію на хребті. Якщо припустити, що лікарня може вільно приймати рішення про кількість пацієнтів, прийнятих для кожного виду лікування, то потрібно з'ясувати, яке поєднання пацієнтів принесе лікарні найбільший дохід.

27. Приватна виробнича фірма спеціалізується на виробництві технічних лаків. Представлена нижче таблиця містить інформацію про витрати ресурсів на 1 кг відповідного лаку, про загальний запас ресурсів, про ціни продажу і відповідні витрати виробництва для одиниці полірувального і матового лаків.

Ресурси	Норми витрат ресурсів на 1 кг лаку		Загальний обсяг ресурсів на день
	матового	полірувального	
Робочий час (люд.-год.)	0,1	0,2	400
Хімічна суміш (г)	0,05	0,02	100
Ціна продажу 1 кг, грн.	13	16	
Витрати виробництва на 1 кг, грн.	9	10	

Технологічні можливості заводу дозволяють випускати не більш 3000 кг лаку в день. Адміністрації даної компанії необхідно визначити щоденні обсяги виробництва кожного виду лаку, що дозволяють одержувати максимальний загальний дохід на тиждень.

28. З пункту А до пункту В щодня вирушають пасажирські і швидкі поїзди. У таблиці зазначені кількості вагонів різних типів, з яких щодня можна комплектувати поїзди, і число пасажирів, на які розраховані вагони. Визначити оптимальне число швидких і пасажирських поїздів, при якому кількість перевезених пасажирів буде максимальною.

Тип вагону	Кількість вагонів (шт) кожного типу в составі:		Парк вагонів, шт.	Число пасажирів в одному вагоні, люд.
	швидкого	пасажирського		
багажний	1	-	1	12
поштовий	1	-	-	18
жорсткий	4	58	8	88
купейний	6	40	4	79
м'який	4	32	2	35

29. З пункту А до пункту В щодня вирушають пасажирські і швидкі поїзди. У таблиці зазначені кількості вагонів різних типів, з яких щодня можна комплектувати поїзди, і число пасажирів, на яких розраховані вагони. Визначити оптимальне число швидких і пасажирських поїздів, при якому кількість перевезених пасажирів буде максимальною, за умови, що пропускна здатність дороги обмежує число пасажирських потягів до шести на день.

Тип вагону	Кількість вагонів (шт) кожного типу в составі:		Парк вагонів, шт.	Число пасажирів в одному вагоні, люд.
	швидкого	пасажирського		
багажний	1	-	1	12
поштовий	1	-	-	18
жорсткий	4	58	8	88
купейний	6	40	4	79
м'який	4	32	2	36

30. Для будівництва будинків обрані два проекти. По кожному з проектів відома: тривалість різних видів будівельних робіт, кількість будівельних об'єктів, на яких можна вести одночасно ці види робіт, а також житлова площа будинку.

Вид робіт	Тривалість виконання (дні) для типового проекту		Кількість об'єктів будівництва, на яким можна одночасно вести роботи
	А	В	
Закладка фундаменту	20	30	10
Монтажні роботи	10	5	5
Інші роботи	30	15	12
Житлова площа (м ²)	3000	2000	

Скласти план будівництва, який максимізує введення житлової площі протягом року (300 робочих днів).

ЗАВДАННЯ 3. У трьох пунктах виробництва A_1, A_2, A_3 зосереджений однорідний вантаж у кількостях відповідно рівних a_1, a_2, a_3 тонн. Даний вантаж споживається в чотирьох пунктах B_1, B_2, B_3, B_4 , а потреби в ньому в цих пунктах складають b_1, b_2, b_3, b_4 тонн відповідно. Відома матриця тарифів по перевезенню 1 тони вантажу з $i^{\text{го}}$ пункту виробництва до $j^{\text{го}}$ пункту споживання:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix}.$$

Скласти план перевезень:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{bmatrix},$$

при якому сумарні транспортні витрати будуть мінімальними.

Розв'язати поставлену транспортну задачу

3.1 методом потенціалів,

3.2 за допомогою інструмента «Поиск решения».

<i>№ вар</i>	<i>ПАРАМЕТРИ МОДЕЛІ</i>																		
	<i>a₁</i>	<i>a₂</i>	<i>a₃</i>	<i>b₁</i>	<i>b₂</i>	<i>b₃</i>	<i>b₄</i>	<i>c₁₁</i>	<i>c₁₂</i>	<i>c₁₃</i>	<i>c₁₄</i>	<i>c₂₁</i>	<i>c₂₂</i>	<i>c₂₃</i>	<i>c₂₄</i>	<i>c₃₁</i>	<i>c₃₂</i>	<i>c₃₃</i>	<i>c₃₄</i>
1	25	50	20	15	15	40	30	1	8	2	3	4	7	5	1	5	3	4	4
2	46	30	35	20	30	16	10	1	2	6	3	4	8	1	5	9	7	3	4
3	60	70	20	30	30	30	50	2	4	5	1	2	3	9	4	3	4	22	5
4	30	20	40	50	20	20	15	5	2	4	1	3	5	6	7	11	5	3	1
5	45	15	20	30	25	25	10	9	4	1	4	5	6	7	10	2	1	4	3
6	60	65	70	40	60	70	30	2	4	3	2	3	1	2	3	5	4	1	5
7	50	40	20	30	25	25	20	3	2	4	1	2	3	1	5	3	2	7	4
8	20	10	40	35	25	10	15	4	1	2	6	5	3	4	8	2	5	1	4
9	50	10	10	25	25	20	10	5	6	4	2	1	5	3	8	1	2	4	1
10	45	25	20	30	15	30	40	2	1	5	1	4	2	6	3	1	5	2	4
11	60	70	10	40	25	35	20	5	4	1	2	6	3	1	2	4	5	3	2
12	25	25	30	20	25	25	15	4	8	6	7	2	1	5	1	1	3	5	4
13	20	20	40	30	25	15	20	6	4	1	2	5	8	3	1	5	4	2	6
14	60	10	40	30	40	20	10	1	2	4	5	6	8	2	3	2	5	7	1
15	30	50	20	15	10	40	30	3	1	5	6	4	2	1	5	3	7	4	5
16	45	35	70	20	60	55	55	6	1	4	5	2	3	2	1	4	5	2	3
17	30	70	50	10	40	20	60	5	1	4	2	6	3	8	2	4	5	1	3
18	70	10	20	45	10	35	20	6	1	5	4	2	3	2	5	4	7	9	2
19	20	50	40	45	20	45	5	4	5	3	2	8	4	1	6	2	5	4	1
20	30	20	45	25	25	30	20	1	5	3	4	2	1	5	7	4	2	1	4
21	60	10	50	30	40	40	25	5	1	9	3	2	7	5	6	1	2	4	3
22	30	70	20	65	15	30	5	6	4	2	1	4	5	3	8	5	1	3	5
23	50	40	60	35	45	50	30	2	4	1	5	3	2	5	6	7	4	5	9
24	40	30	20	25	35	25	15	1	5	2	4	8	3	6	7	4	2	1	5
25	50	40	60	40	60	25	35	2	4	1	9	8	3	6	10	2	4	5	7
26	20	30	50	45	25	20	15	6	4	1	5	7	10	2	3	5	6	11	2
27	25	35	50	30	10	30	25	5	8	4	3	1	2	7	5	2	1	2	6
28	50	40	20	20	40	30	25	2	4	5	8	9	7	3	1	6	2	5	2
29	25	45	30	40	20	25	20	6	4	5	8	1	2	3	7	5	1	2	4
30	30	20	45	25	25	30	20	8	7	5	1	2	12	4	5	8	6	2	4

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах і задачах: Учеб. пособие для студентов эконом. спец. вузов. - М.: Высш. шк., 1986.-319с., ил.
2. Гасс С. Линейное программирование. - М.: Наука, 1961. - 303 с.
3. Кузнецов А. В., Холод И. И. Математическое программирование. - Минск: Высшая школа, 1984. – 221 с.
4. Сакович В.А. Исследование операций (детерминированные методы і модели): Справочное пособие. - Мн.: Выш. шк., 1984.-256с.
5. Таха Х. Введение в исследование операций. В 2 кн. - Кн.1. - Пер. с англ. – М.: Мир, 1985.-479с., ил.
6. Цегелик Г.Г. Лінійне програмування.- Л.: Світ, 1995. – 216 с.
7. Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Математическое программирование» (линейное программирование) для студентов экономических специальностей / Сост. Туровцев Г.В., Нудный И.П. – Запорожье, ЗГИА, 1984.-31с.
8. Математическое программирование. Конспект лекций для студентов экономических специальностей дневного і заочного отделений /Глуцевский В.В., Исаенко А.Н. – Запорожье: ЗГИА, 2003. – 150с.
9. Исследование операций. Методические указания к выполнению практических і лабораторных заданий (тема: "Решение задач линейного программирования с использованием Microsoft EXCEL for WINDOWS") для студентов ЗГИА экономических специальностей дневного і заочного отделений /Глуцевский В.В., Исаенко А.Н. – Запорожье: ЗГИА, 2003. – 40с.

Підписано до друку __.__.2007р. Формат 60х84 1/32.
Папір офсетний.
Умовн. друк. арк. __.__. Наклад ____ прим.
Замовлення № К.

Віддруковано друкарнею

Запорізької державної інженерної академії
з комп'ютерного оригінал-макету

69006, м. Запоріжжя, пр. Леніна, 226
РВВ ЗДІА, тел. 223 8 240