В. Ф. Антоненко, І. С. Клюс, Р. В. Горідько, Л. О. Чуб

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ECTS

Кредитно-модульна система навчання

Модуль 1

ЛІНІЙНА, ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник

2-ге видання, виправлене

Київ
Видавництво Національного авіаційного університету
«НАУ-друк»
2009

УДК 512.64(075.8)
ББК В11я7
В 558

Рецензенти:

О. М. Супрун, канд. фіз.-мат. наук, доц.
(Національний авіаційний університет)

В. К. Репета, канд. фіз.-мат. наук, доц.
(Національний авіаційний університет)

Видання друкується за рішенням Вченої ради ІЕЕМ НАУ
(Протокол № 12 від 29.05.2006)

Вища математика. У 10 ч. Ч 1. Лінійна, векторна алгебра та аналі-
В 558 тична геометрія : навч. посіб. / В. Ф. Антоненко, І. С. Клюс, Р. В. Горідько, Л. О. Чуб. – 2-ге вид. випр. — К. : Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2009. — 304 с.

ISBN 978-966-598-582-2
ISBN 978-966-598-583-9 (частина 1)

Навчальний посібник створено відповідно до навчальної програми дисципліни «Вища математика» для технічних спеціальностей у межах кредитно-модульної системи навчання. Посібник «Модуль 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія» містить чотири розділи. У першому викладено теоретичний матеріал кожного підмодуля, а також питання і вправи для самоперевірки. Другий розділ складається з прикладів для аудиторної роботи та домашніх завдань до кожного підмодуля. Третій розділ містить 30 варіантів модульних індивідуальних завдань. У четвертому розділі наведено зразок модульної контрольної роботи з розв'язками.

Для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання.

УДК 512.64(075.8)
ББК В11я7

ISBN 978-966-598-582-2
ISBN 978-966-598-583-9 (частина 1)

ЗМІСТ

ВСТУП

Мета викладання дисципліни «Вища математика» — допомогти студентам засвоїти відповідні математичні поняття і методи, яких буде достатньо для опрацювання математичного апарату, на який спираються технічні дисципліни, та для застосування цих методів у відповідних галузях техніки.

Основне завдання курсу «Вища математика» для технічних спеціальностей — виробити у студентів уміння використовувати відповідний математичний апарат, навчити складати математичні моделі технічних задач, застосовувати математичні методи для дослідження і розв’язування таких задач.

Загальний курс вищої математики є підґрунтям інженерної освіти і становить теоретичну основу знань та вмінь, що формують профіль інженера. Низка спеціальних курсів безпосередньо пов’язана з загальним курсом «Вища математика» та спирається на нього.

Завдання вивчення навчальної дисципліни:

- прищепити необхідні теоретичні знання та вміння розбиратися у математичному апараті;
- сформувати первинні навички математичного дослідження технічних задач;
- виробити вміння при розв’язуванні задач самостійно розробляти та використовувати необхідні методи і засоби, а також спеціальну літературу;
- навчити застосовувати теоретичні знання на практиці;
- навчити самостійно поглиблювати свої знання, розвивати логічне та алгоритмічне мислення, інтуїцію в питаннях застосування математики.

У результаті вивчення курсу вищої математики студенти повинні вміти використовувати математичні методи при розв’язуванні технічних задач та застосовувати ці методи, використовуючи обчислювальну техніку.

Важливим чинником засвоєння математики й оволодіння її методами є самостійна робота студентів. Ця робота є неперервною складовою виконання поточних домашніх завдань і циклічної роботи з виконання індивідуальних модульних завдань. Результативність самостійної роботи студентів забезпечується ефективною системою контролю, яка включає опитування студентів за змістом лекцій, перевірку виконання поточних домашніх завдань, роботу з розв'язування задач біля дошки, захист індивідуальних домашніх завдань.

У зв'язку з переходом до кредитно-модульної системи навчання вся дисципліна розбита на модулі, кожен з яких, своєю чергою, складається з кількох підмодулів. Кожний модуль завершується написанням модульної контрольної роботи.

У цьому посібнику подано модуль «Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія», який складається з одинадцяти підмодулів.

У результаті вивчення матеріалу цього модуля студенти повинні:

- знати основні поняття та формули лінійної алгебри;
- вміти зводити лінійні модельовані задачі до системи лінійних алгебричних рівнянь та розв'язувати їх;
- знати основні поняття та формули векторної алгебри та аналітичної геометрії;
- вміти застосовувати навички цієї теорії до розв'язування та моделювання задач.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ДО МОДУЛЯ 1 «ЛІНІЙНА, ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»

ПІДМОДУЛЬ 1
Визначники

1.1. Поняття матриці

Матрицею називають прямокутну таблицю чисел a_{ij}, $i = 1,$ $2,\ ...,\ m;$ $j = 1, 2, \ldots, n;$ складену з m рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Існує компактніше позначення матриці:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{mn}, \quad \text{або} \quad A = \left\|a_{ij}\right\|_{mn},$$

де числа a_{ij} — елементи матриці, причому індекс i означає номер рядка, а j — номер стовпця, на перетині яких міститься даний елемент.

Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості стовпців, то така матриця називається *квадратною*. В іншому випадку матрицю називають *прямокутною*.

Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то матрицю називають *нульовою*.

Елементи $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ утворюють *головну* діагональ квадратної матриці, а елементи a_{1n}, $a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$ — *побічну.*

Квадратну матрицю, всі елементи якої, крім діагональних, рівні нулю, називають *діагональною.*

З кожною квадратною матрицею пов'язують певну її числову характеристику, яка називається *визначником*, або *детермінантом* цієї матриці.

1.2. Визначники другого і третього порядку

Визначником другого порядку, що складений із елементів матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

називається число або вираз, які обчислюються за формулою:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

При обчисленні визначника другого порядку зручно користуватися такою схемою:

$$\begin{array}{c} - \\ \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{12} \\ & & \\ a_{21} & & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \\ + \end{array}$$

Добуток елементів головної діагоналі береться зі знаком (+), а добуток елементів побічної діагоналі — зі знаком (–).

Приклади Обчислити визначники другого порядку.

1. $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) = 14.$

2. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha.$

Визначником третього порядку, що складений із елементів матриці A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

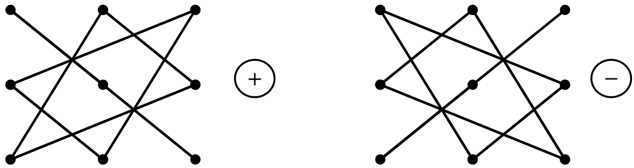
називається число або вираз, які обчислюються за формулою:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Формулу визначника третього порядку можна дістати за допомогою правил:

а) *правило Саррюса*, або *правило трикутників*. Це правило пояснюється такими двома схемами:



а *б*

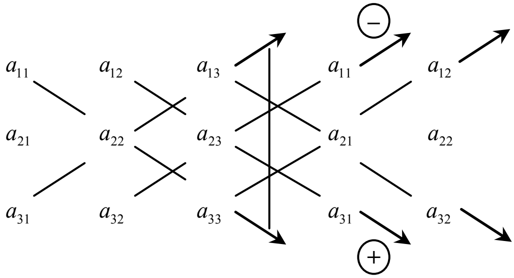
У схемі *а* з’єднані позиції тих елементів матриці третього порядку, добуток яких береться зі знаком «плюс», а в схемі *б* — позиції тих елементів, добуток яких береться зі знаком «мінус».

Приклад Обчислити визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix}-4 & -2 & 1\\ -5 & -3 & 2\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=(-4)(-3)(-1)+(-2)\cdot 2\cdot 3+(-5)\cdot 2\cdot 1-3(-3)1-2\cdot 2(-4)-(-5)(-2)(-1)=1.$$

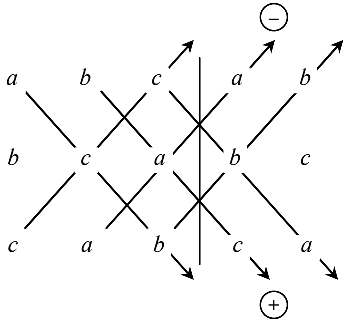
б) *правило таблиці*. Таблиця для обчислення складається таким чином: виписуються елементи визначника третього порядку і до них з правого боку дописують елементи двох перших стовпців так, як це показано на схемі:



Для простоти користування схемою слід запам’ятати: добутки елементів, що розташовані на головній діагоналі і на діагоналях, їй паралельних, беруться зі знаком «плюс». А добутки елементів, що розташовані на побічній діагоналі і на діагоналях, їй паралельних, беруться зі знаком «мінус».

Приклад Обчислити визначник, користуючись правилом таблиці

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$



$$\to \quad acb + bac + cba - c^3 - a^3 - b^3 = 3abc - a^3 - b^3 - c^3.$$

1.3. Визначники n-го порядку

Поняття визначника узагальнюється для матриці n-го порядку. З цією метою розглянемо деякі властивості перестановок чисел. Якщо деякі предмети об’єднати в групи, то одержимо сполуки. Сполуки, які відрізняються між собою тільки порядком предметів, називаються *перестановками.* Натуральні числа множини $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ знаходяться в природному стані, якщо вони розташовані так: 1, 2, 3, ..., n. Наприклад, в перестановці 1, 2, 3, 4, 5 маємо природний порядок (менше число передує більшому), а в перестановці 1, 2, 3, 4, 5 маємо три *інверсії* (число пар елементів, у яких більше число передує меншому: 4, 2; 4, 3; 3, 2). В кожній перестановці із n натуральних чисел число інверсій є визначеним. Це число може бути парним або непарним. Перестановка в першому випадку називається парною, в другому — непарною.

Приклад Визначити парність або непарність перестановок:
а) 1, 3, 2, 6, 4, 5; б) 5, 3, 2, 6, 4, 1.

У першій перестановці перед одиницею знаходиться 0 чисел, перед 2—1 (1 закреслюємо після знаходження кількості чисел, що стоять перед 1 і є більшими за 1), перед 3—0, перед 4—1, перед 5—1, значить кількість інверсій дорівнює 0 + 1 + 0 + 1 + 1 = 3 (перестановка непарна). У другій перестановці 10 інверсій (5 + 2 + 1 + 2 = 10). Вона є парною.

Визначником n-го порядку, який складений із елементів квадратної матриці n-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix},$$

називають суму $n!$ членів. Кожний доданок цієї суми є добуток n елементів, узятих по одному і тільки одному із кожного стовпця і з кожного рядка матриці A. Знак доданка визначника дорівнює $(-1)^t$, де t — кількість інверсій других індексів співмножників доданка, якщо співмножники в ньому розташовані в порядку зростання перших індексів.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{\alpha_i = 1 \\ i = 1, n}}^{n} (-1)^t a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n},$$

де t — кількість інверсій у перестановці $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$.

Зазначимо, що визначники другого і третього порядків обчислюються за тим самим правилом, що і визначник n-го порядку. Розглянемо приклад:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Перші індекси елементів у кожному доданку визначника розташовані в порядку зростання, а перестановки других індексів мають відповідно

1 2 3 — 0 інверсій,
2 3 1 — 2 інверсії,
3 1 2 — 2 інверсії,
3 2 1 — 3 інверсії,
2 1 3 — 1 інверсію,
1 3 2 — 1 інверсію.

При парній перестановці доданок береться зі знаком (+), а при непарній — зі знаком (–).

Виділимо основні властивості визначників:

1. Величина визначника не зміниться, якщо його рядки замінити стовпцями, не змінюючи порядку їх слідування. Операція заміни рядків визначника стовпцями або навпаки, не змінюючи порядку їх слідування, називається *транспонуванням* визначника.

2. Якщо у визначнику поміняти два стовпці (рядки), то знак визначника зміниться на протилежний.

Наслідок. Визначник n-го порядку, в якого елементи двох стовпців (рядків) збігаються, дорівнює нулю.

3. Якщо всі елементи якого-небудь стовпця (рядка) визначника помножити на одне і те саме число m, то значення визначника помножиться на число m.

Наслідки: а) якщо всі елементи якого-небудь стовпця (рядка) визначника мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника; б) визначник, у якого елементи двох стовпців (рядків) відповідно пропорційні, дорівнює нулю.

4. Нехай кожний елемент k-го рядка (стовпця) визначника n-го порядку є сума двох доданків, тоді даний визначник дорівнює сумі двох визначників того самого порядку, причому в одному з них k-й рядок (стовпець) складається з перших доданків, а в іншому — з других доданків. Решта рядків (стовпців) цього і другого визначників ті ж, що в даному визначнику.

Очевидно, що ця властивість має місце й у випадку, коли елементи k-го рядка (стовпця) визначника є сумами s доданків. Тоді даний визначник буде дорівнювати сумі s визначників. Із цієї властивості випливає такий *наслідок*:

Визначник не змінить своєї величини, якщо до елементів будь-якого стовпця (рядка) додати відповідні елементи іншого стовпця (рядка), попередньо помноживши їх на довільне число. Наприклад, визначник

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

оскільки визначник, який містить два однакові стовпці, дорівнює нулю.

1.4. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця

Нехай задано визначник

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник $(n-1)$-го порядку, який одержується із заданого визначника через викреслювання i-го рядка і j-го стовпця, на перехресті яких знаходиться даний елемент.

Наприклад, мінором M_{23} елемента a_{23} визначника

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

буде визначник

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{31} & b_{32} \end{vmatrix}.$$

Алгебричне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} визначається рівністю

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теорема

Теорема (Лапласа). Значення визначника дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебричні доповнення.

Приклад

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Права частина цієї рівності називається *розкладом* визначника за елементами i-го рядка. Розклад визначника за елементами рядка (стовпця) дає можливість обчислення визначника n-го порядку звести до обчислення n визначників $(n-1)$ -го порядку.

Із цієї властивості можна дістати такі *наслідки*:

а) якщо у визначнику всі елементи будь-якого стовпця (рядка) дорівнюють нулю, то і визначник дорівнює нулю;

б) сума добутків елементів довільного рядка (стовпця) на алгебричні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Приклад

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+a_{i3}A_{j3}=0,\ i\neq j\ \left(i=1,2,3;\ j=1,2,3\right).$$

Добутком двох визначників n-го порядку

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n} \end{vmatrix},\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n} \end{vmatrix}$$

називається визначник Δ, який шукаємо за таким *правилом*: елементи i-го рядка визначника Δ_1 помножимо на відповідні елементи j-го стовпця визначника Δ_2 і всі ці добутки складемо

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}\quad\left(i,j=1,2,\ldots,n\right).$$

Тоді добутком $\Delta_1\cdot\Delta_2$ буде визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Застосуємо це правило для визначників другого порядку.

Нехай $$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix},$$

тоді $$\Delta_1\cdot\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}.$$

Доведемо це. Запишемо праву частину рівності у вигляді суми визначників згідно з властивістю 4:

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{21} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix} + b_{11}b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{21}b_{12} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + a_{12}a_{22} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{21} \cdot 0 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \left(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} \right) + a_{12}a_{22} \cdot 0 =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \Delta_1 \cdot \Delta_2 .$$

Приклад Записати у вигляді визначника добуток $\Delta_1 \cdot \Delta_2$, якщо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

За правилом множення визначників маємо:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= 1 \cdot 2 + 0 \cdot 7 + 2(-1) = 0, \\
c_{21} &= (-1)2 + 1 \cdot 7 + 0(-1) = 5, \\
c_{31} &= 3 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 1(-1) = 19, \\
c_{12} &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2, \\
c_{22} &= (-1)0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1, \\
c_{32} &= 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3, \\
c_{13} &= 1 \cdot 5 + 0 \cdot 0 + 2(-1) = 3, \\
c_{23} &= (-1)5 + 1 \cdot 0 + 0(-1) = -5, \\
c_{33} &= 3 \cdot 5 + 2 \cdot 0 + 1(-1) = 14.
\end{aligned}$$

Отже, $$\Delta_1 \cdot \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & -5 \\ 19 & 3 & 14 \end{vmatrix}.$$

Для обчислення визначників використовують їх властивості і методи, які базуються на цих властивостях.

Приклади Обчислити значення визначників

1. $\begin{vmatrix} 45252 & 200 \\ 28328 & 200 \end{vmatrix} = 200 \begin{vmatrix} 45252 & 1 \\ 28328 & 1 \end{vmatrix} = 200(45252 - 28328) = 3384800.$

2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0,$ оскільки всі елементи його стовпця рівні нулю.

3. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0,$ оскільки всі елементи 1-го і 3-го стовпців рівні між собою.

4. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 10 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 0,$ тому що елементи 1-го і 3-го стовпців відповідно пропорційні.

5. Показати, що визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

у якого всі елементи нижче головної діагоналі рівні нулю, дорівнює добутку діагональних елементів :

$$\Delta = a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ \dots\ a_{nn}.$$

Розклавши визначник Δ за елементами першого стовпця, дістанемо рівність

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & a_{3n} \\ \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Продовжуючи процес розкладання, знаходимо

$$\Delta = a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ \ldots\ a_{nn}.$$

6. Розкласти за елементами четвертого стовпця і обчислити визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 & 1 \\ -4 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Маємо

$$\Delta = 3\left(-1\right)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\left(-1\right)^{2+4}\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+1\left(-1\right)^{3+4}\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 4\left(-1\right)^{4+4}\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3)\cdot 35 - 2\cdot 21 - 35 + 4\left(-56\right) = -406.$$

Зауваження. Очевидно, розкладання визначника спроститься, якщо будемо його розкладати за елементами рядка (стовпця), у якого більшість елементів є нулями. На цій ідеї базується метод утворення нулів при обчисленні визначників.

7. Методом утворення нулів обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & 6 \\ 5 & 8 & 6 & -7 \\ -3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Простіше утворювати нулі в тому рядку або стовпці, де маємо елемент 1 або –1. Утворюємо нулі в першому рядку. Для цього до елементів 1-го стовпця відповідно додамо елементи 4-го стовпця, попередньо помноживши їх на 2. При цьому значення визначника не зміниться

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & 6 \\ 5 & 8 & 6 & -7 \\ -3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & -1 \\ 10 & 5 & 2 & 6 \\ -9 & 8 & 6 & -7 \\ -7 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Далі до елементів 2-го стовпця додамо відповідно елементи 4-го стовпця, попередньо помноживши їх на 3, а до елементів 3-го стовпця додамо відповідно елементи 4-го стовпця, попередньо помноживши їх на 4.

Дістанемо рівність

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & -1 \\ 10 & 5 & 2 & 6 \\ -9 & 8 & 6 & -7 \\ -7 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 10 & 23 & 26 & 6 \\ -6 & -13 & -22 & -7 \\ -7 & -8 & -7 & -2 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо отриманий визначник за елементами першого рядка. Тоді

$$\Delta = (-1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 10 & 23 & 26 \\ -9 & -13 & -22 \\ -7 & -8 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 23 & 26 \\ -9 & -13 & -22 \\ -7 & -8 & -7 \end{vmatrix}.$$

Винесемо спільний множник (–1) із 2-го і 3-го рядків, здобудемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 23 & 26 \\ -9 & -13 & -22 \\ -7 & -8 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 23 & 26 \\ 9 & 13 & 22 \\ 7 & 8 & 7 \end{vmatrix}.$$

Віднімемо від елементів 3-го і 2-го стовпців відповідно елементи 1-го стовпця

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 23 & 26 \\ 9 & 13 & 22 \\ 7 & 8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 13 & 16 \\ 9 & 4 & 13 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Щоб отримати ще один нуль у третьому рядку, додамо до елементів 1-го стовпця відповідно елементи 2-го стовпця, попередньо помноживши їх на –7. Дістанемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} -81 & 13 & 6 \\ -19 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

звідси

$$\Delta = \begin{vmatrix} -81 & 13 & 6 \\ -19 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\left(-1\right)^5 \begin{vmatrix} -81 & 16 \\ -19 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 81 & 16 \\ 19 & 13 \end{vmatrix} = 81\cdot 13 - 16\cdot 19 = 749.$$

8. Обчислити визначник Вандермонда (франц. математик)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Віднімемо від кожного стовпця попередній, помножений на a:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b^2-ab \\ 1 & c-a & c^2-ac \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^2-ab \\ c-a & c^2-ac \end{vmatrix}.$$

Далі маємо

$$\Delta = \left(b-a\right)\left(c-a\right)\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} = \left(b-a\right)\left(c-a\right)\left(c-b\right).$$

Питання для самоперевірки

1. Що називається матрицею? Як позначають елементи матриці? Якими символами прийнято позначати матрицю?
2. Дайте визначення порядку матриці. Яка матриця називається квадратною? Що називається порядком квадратної матриці?
3. Що називається перестановками із n предметів (чисел)? Дайте визначення інверсії, парної і непарної перестановок.
4. Що називається визначником 3-го порядку (n-го порядку)? Якщо у визначнику поміняти місцями два сусідні стовпці (рядки), то він змінить знак. Доведіть цю властивість.

5. Доведіть властивість визначника: якщо всі елементи якого-небудь стовпця (рядка) помножити на одне і те саме число m, то значення визначника помножиться на число m. Які наслідки випливають із цієї властивості?

6. Переконайтесь у справедливості твердження: якщо всі елементи якого-небудь стовпця (рядка) визначника являють собою суму двох доданків, то такий визначник можна записати у вигляді суми двох визначників. Який наслідок випливає з цієї властивості?

7. Що називається мінором і алгебричним доповненням елемента a_{ij} визначника n-го порядку?

8. Сформулюйте й доведіть властивості про розклад визначника за елементами його рядка (стовпця).

9. Сформулюйте й доведіть правило множення двох визначників.

ПІДМОДУЛЬ 2
Матриці

2.1. Матриця, основні типи матриць

Матрицею називають множину $m \cdot n$ елементів, розташованих у вигляді прямокутної таблиці із m рядків і n стовпців.

Прямокутна матриця розміром $(m \times n)$ — це таблиця із m рядків і n стовпців

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Скорочене позначення матриці: $A = \left(a_{ij}\right)_{mn}$, або $A = \left\|a_{ij}\right\|_{mn}$.

Місце кожного матричного елемента в таблиці визначається його двома індексами: перший індекс — номер рядка, другий індекс — номер стовпця, на перетині яких знаходиться даний елемент.

Матриця не має числового або буквенного значення. Це просто зручний спосіб розташування елементів певної природи. У випадку, коли кількість рядків дорівнює кількості стовпців матриці $(m = n)$, матриця називається *квадратною*.

Прямокутну матрицю, яка складається із одного стовпця, називають *стовпцевою* і позначають

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Vmatrix} = (\, x_1, x_2, \dots, x_n \,).$$

Прямокутну матрицю, яка складається із одного рядка, називають *рядковою* і позначають

$$Z = \| z_1, z_2, \dots, z_n \| = (\, z_1, z_2, \dots, z_n \,).$$

Квадратну матрицю, у якої всі елементи, що розташовані поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю, називають *діагональною* і позначають

$$\begin{Vmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{Vmatrix} = (\, d_1, d_2, \dots, d_n \,) = \| d_i \, \delta_{ik} \|_1^n ,$$

де $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k; \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$ δ_{ik} називають *символом Кронекера.*

Діагональна матриця, всі елементи якої дорівнюють 1, називається *одиничною* і позначається

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Матриця, у якої всі елементи за абсолютною величиною дорівнюють відповідним елементам матриці *A*, але мають протилежні знаки, називається *протилежною* і позначається –*A*.

Матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю, називається *нульовою матрицею* і позначається *O*.

Дві матриці називаються *рівними*, якщо вони мають однаковий порядок і всі їхні відповідні елементи рівні.

2.2. Дії над матрицями. Ранг матриці

Транспонування матриці A полягає в переході від матриці *A* до нової матриці A', рядками якої є стовпці матриці *A*. Матриця A' називається транспонованою до матриці *A*.

Приклад

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 2 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \text{тоді}\quad A'=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 5 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

Зауваження 1. Для матриці-рядка транспонованою матрицею буде матриця-стовпець, а для матриці-стовпця транспонованою буде матриця-рядок.

Зауваження 2. Якщо яку-небудь матрицю транспонувати двічі, то дістанемо початкову матрицю:

$$\left(A'\right)'=A.$$

Наприклад,

$$A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 8\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix},\quad A'=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 6 & 3\\ 8 & 5\end{pmatrix},\quad \left(A'\right)'=\begin{pmatrix}4 & 6 & 8\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}.$$

Матриця називається *симетричною*, якщо вона співпадає зі своєю транспонованою.

Визначник, складений із елементів квадратної матриці A, називається *визначником* цієї матриці і позначається $|\,A\,|$ або $\det A$.

Наприклад,

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\qquad \det A=|A|=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-10.$$

Якщо $\det A=0$, то матриця A називається *особливою*, або *виродженою*, якщо $\det A\neq 0$, то матрицю A називають *неособливою*, або *невиродженою*.

Дії над матрицями проілюструємо на прикладі двох матриць порядку (2×3), хоча їх можна виконувати над матрицями довільного порядку.

Нехай дано матриці однакового розміру:

$$A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{vmatrix},\qquad B=\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{vmatrix}.$$

Сумою матриць $A+B$ є матриця того ж порядку $(m\times n)$

$$C=A+B=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23}\end{pmatrix}.$$

Добутком матриці A на число k називається матриця, кожний елемент матриці A множиться на число k:

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}.$$

Приклад Дано матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю $2A+4B$.

Розв'язання. Матриця $2A+4B$ має вигляд

$$2A+4B=\begin{pmatrix} 14 & 8 & 14 \\ -8 & 6 & 28 \\ 14 & 20 & -24 \end{pmatrix}.$$

Нехай B та A — матриці розмірів $(m\times n)$ та $(n\times k)$ відповідно.

Добутком матриці B на матрицю A називається матриця C розміру $(m\times k)$, елемент c_{ij} якої дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці B на відповідні елементи j-го стовпця матриці A:

$$c_{ij}=b_{i1}a_{1j}+b_{i2}a_{2j}+\ldots+b_{in}a_{nj}, \quad i=1, 2, \ldots, m, \quad j=1, 2, \ldots, k.$$

Зауваження. Можна множити матрицю B на матрицю A лише в тому випадку, коли кількість стовпців матриці B дорівнює кількості рядків матриці A.

Наприклад, для матриць

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

можна обчислити AB, але BA не існує (бо кількість стовпців матриці B не дорівнює кількості рядків матриці A)

$$AB=\begin{pmatrix} -1 & 9 & 20 \\ 11 & 6 & 13 \end{pmatrix}.$$

Для квадратних матриць A і B одного порядку існує AB і BA, але не завжди $AB = BA$.

Приклад Знайти добутки AB і BA матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 6 & 3 & 11 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Отже, в даному прикладі $AB \neq BA$.

Якщо для матриць A і B виконується рівність $AB = BA$, то матриці A і B називаються *переставними*, або *комутативними*. Легко пересвідчитися, що одинична матриця переставна з довільною квадратною матрицею того самого порядку: $EA = AE$.

Операція транспонування добутку матриць виражається формулою

$$(AB)' = B'A'.$$

Приклад

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

добуток

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 6 & 3 & 11 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (AB)' = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \\ -7 & 11 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

і добуток

$$B'A' = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 7 & 11 & 0 \end{pmatrix}.$$

Властивості дій над матрицями.

1. $A + B = B + A$.

Приклад

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix},$$

тоді
$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 10 \\ 3 & 7 & -7 \end{pmatrix}, \qquad B + A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 10 \\ 3 & 7 & -7 \end{pmatrix}.$$

Отже, $A + B = B + A$.

2. $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Приклад Дано матриці A і B та матриця C

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

тоді $$A + (B + C) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 10 \\ 7 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \qquad (A + B) + C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 10 \\ 7 & 6 & -2 \end{pmatrix},$$

тож $A + (B + C) = (A + B) + C$.

3. $A + 0 = 0 + A$, де через 0 позначена нульова матриця. Якщо $A + B = 0$, то $\hat{A} = -A$, тобто B буде протилежною матрицею по відношенню до A. Наприклад, для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

протилежною буде матриця

$$-A = B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 \\ -2 & -3 & -6 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. $AE = A$.

Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тоді
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. $A \cdot 0 = 0$.
6. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu) A$.
7. $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$.
8. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

Розглянемо матрицю A порядку $(m \times n)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad m < n.$$

Визначник k-го порядку, який складений із елементів матриці A, що знаходяться на перетині виділених k рядків і k стовпців, називається *визначником*, *породженим матрицею*. Якщо $m < n$, то порядок породженого визначника не може бути більшим m.

Рангом матриці A називається найбільший із порядків визначників породжених даною матрицею, які не дорівнюють нулеві. Ранг матриці A будемо позначати $r(A)$.

Наприклад, ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

дорівнює 3, $r(A)=3,$ оскільки

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=35\neq 0,$$

а ранг матриці

$$B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

дорівнює 2, $r(B)=2,$ оскільки

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0, \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=8\neq 0.$$

Обчислюючи ранг матриці, виконують елементарні перетворення. *Елементарними перетвореннями* матриці називають такі операції:

а) множення елементів довільного рядка (стовпця) на число, що не дорівнює нулю;

б) перестановка місцями двох рядків (стовпців) матриці;

в) додавання до елементів будь-якого рядка (стовпця) елементів другого рядка (стовпця), помножених на одне і те саме число.

Приклад Визначити ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 6 \\ -3 & -6 & 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Скористаємось елементарними перетвореннями: додамо до елементів 2-го стовпця відповідно елементи 1-го стовпця, помноживши їх на (–2), дістанемо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 6 \\ -3 & -6 & 6 & -9 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \\ -3 & 0 & 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Далі додамо до елементів 3-го стовпця відповідні елементи 1-го стовпця, помноживши їх на 2, а до елементів 4-го стовпця додамо відповідні елементи 1-го стовпця, помноживши їх на (–3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \\ -3 & 0 & 6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

До елементів другого рядка додамо відповідні елементи першого рядка, помноживши їх на (–2), а до елементів 3-го рядка додамо відповідні елементи 1-го рядка, помноживши їх на (–3). Здобудемо

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $r\left(A\right)=1$.

2.3. Обернена матриця

Для довільного дійсного числа $a \neq 0$ існує число $a^{-1}=\dfrac{1}{a}$, яке називають *оберненим*, таке, що $a^{-1}a = a \cdot a^{-1} = 1$.

Аналогічно, якщо існує така матриця B, для якої виконується рівність:

$$AB = BA = E,$$

то таку матрицю називають *оберненою* і позначають $B = A^{-1}$. Очевидно, обернену матрицю може мати тільки квадратна матриця, бо добутки AB і BA можуть існувати тоді, коли A і B — квадратні матриці одного порядку.

Для кожної квадратної невиродженої матриці A $\left(\det A \neq 0\right)$ існує єдина обернена матриця $B = A^{-1}$.

Для того, щоб для квадратної матриці A побудувати обернену матрицю A^{-1}, необхідно:

а) обчислити визначник матриці A $\left(\det A\right)$: пересвідчитися, що він не дорівнює нулю $\left(\det A \neq 0\right)$;

б) скласти матрицю з алгебричних доповнень до елементів даної матриці;

в) транспонувати здобуту матрицю;

г) транспоновану матрицю поділити на визначник матриці A, $\det A$.

Якщо $\det A \neq 0$, то формула для обчислення оберненої матриці має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1m} & A_{2m} & \dots & A_{nm} \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Обернену матрицю можна дістати іншим способом, користуючись тільки елементарними перетвореннями матриці.

Приклад Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислюємо визначник матриці A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2\cdot 5 + 3\cdot 6 = 12 \neq 0.$$

Обчислюємо алгебричні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 12; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 13; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6.$$

Складаємо матрицю із алгебричних доповнень елементів даної матриці

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 12 & -15 & 6 \\ -8 & 13 & -6 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо здобуту матрицю

$$\tilde{A}' = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -8 \\ -5 & -15 & 13 \\ 6 & 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Далі знаходимо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 12 & -8 \\ -5 & -15 & 13 \\ 6 & 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{12} & -\frac{5}{4} & \frac{13}{12} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Питання для самоперевірки

1. Яка матриця називається матрицею-рядком, а яка — матрицею-стовпцем?
2. Яка матриця називається одиничною?
3. Запишіть яку-небудь діагональну матрицю 4-го порядку.
4. Як за даною матрицею знайти транспоновану матрицю?
5. Як побудувати матрицю, протилежну даній?
6. Що називається алгебричною сумою двох матриць? Які властивості має ця операція?
7. Що називається добутком матриці на число? Які властивості має ця операція?
8. Що називається рангом матриці?
9. Як знайти добуток двох матриць? За яких умов існує добуток двох матриць? Наведіть приклади.
10. Яка матриця називається невиродженою?
11. Дайте визначення оберненої матриці. За яких умов існує матриця, обернена даній?
12. У чому полягає алгоритм побудови оберненої матриці?
13. Які операції називаються елементарними перетвореннями матриці?

ПІДМОДУЛЬ 3

Системи лінійних алгебричних рівнянь. Метод Крамера

3.1. Основні поняття

Система m лінійних алгебричних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3.1}$$

де x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — невідомі; a_{ij} — коефіцієнти при невідомих; b_i — вільні члени; m — кількість рівнянь системи; n — кількість невідомих системи.

Система (3.1) називається *однорідною системою лінійних рівнянь*, якщо всі b_i дорівнюють нулю. Якщо хоча б один із вільних членів b_i не дорівнює нулю, то система називається *неоднорідною.*

Розв'язком системи (3.1) називається сукупність значень невідомих $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, які задовольняють кожне рівняння системи. При підстановці в рівняння замість невідомих їх значень: $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, …, $x_n = \alpha_n$ рівняння перетворюються на правильні числові рівності.

При розв'язуванні системи можливі такі випадки:

а) система має єдиний розв'язок;

б) система має безліч розв'язків;

в) система не має розв'язків.

У випадках а) і б) систему називають *сумісною*, а у випадку в) — *несумісною*.

Якщо система сумісна і має єдиний розв'язок, то її називають *визначеною*, а коли безліч розв'язків — *невизначеною.*

Дві системи m-лінійних рівнянь з n невідомими називаються *рівносильними*, або *еквівалентними*, якщо множини їх розв'язків збігаються.

До елементарних перетворень системи (3.1) належать такі перетворення над рівняннями системи:

1) переміна місць рівнянь у системі;

2) викреслювання в системі рівнянь вигляду $0x_1 + 0x_2 + \ldots + x_n = 0$;

3) перетворення рівнянь системи, яке полягає в тому, що до обох частин одного із рівнянь додаються відповідно частини іншого рівняння, помножені на одне і те саме число;

4) перестановка в системі членів з якими-небудь двома невідомими.

3.2. Метод Крамера

У випадку, коли кількість рівнянь системи (3.1) дорівнює кількості невідомих, систему можна розв'язувати за формулами Крамера. Система n лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.2}$$

Визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

складений із коефіцієнтів при невідомих, називається *визначником системи*. Якщо у визначнику Δ стовпець із коефіцієнтів при невідомому x_k замінити стовпцем вільних членів, то дістанемо визначник, який називається *визначником при невідомому* x_k і позначається Δ_k. Так, наприклад, визначник при невідомому x_2 матиме вигляд:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta \neq 0,$ то система рівнянь має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами Крамера:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Пересвідчимося, наприклад, що $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$. Для цього ліву і праву частини першого рівняння системи (3.2) помножимо на A_{12}, другого рівняння — на A_{22}, …, n-го рівняння — на A_{n2}. Додаючи почленно всі рівняння системи, дістанемо рівність:

$$\begin{gathered}
x_1\left(a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + \ldots + a_{n1}A_{n2}\right) + \\
+ x_2\left(a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + \ldots + a_{n2}A_{n2}\right) + \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
+ x_n\left(a_{1n}A_{12} + a_{2n}A_{22} + \ldots + a_{nn}A_{nn}\right) = \\
= b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots b_nA_{nn}.
\end{gathered}$$

Коефіцієнт при x_2 дорівнює Δ, бо він є сумою добутків елементів 2-го стовпця визначника Δ на їх алгебричне доповнення. Коефіцієнти при інших невідомих дорівнюють нулю, бо вони є сумою добутків елементів, відмінних від елементів 2-го стовпця визначника Δ на алгебричні доповнення елементів 2-го стовпця. Права частина дорівнює визначнику Δ_2, здобутому з Δ заміною елементів другого стовпця відповідними вільними членами системи. Таким чином, маємо рівність $x_2 \cdot \Delta = \Delta_2$ або $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$.

Приклад Розв’язати систему

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 9, \\ 4x + 5y + 6z = 6, \\ 2x - 3y + 2z = 12. \end{cases}$$

Розв’язання. Обчислимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 36.$$

Оскільки визначник системи $\Delta \neq 0$, то для розв’язування системи можна скористатися формулами Крамера. Обчислимо визначники при невідомих

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & 6 \\ 12 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 36,\quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 4 & 6 & 6 \\ 2 & 12 & 2 \end{vmatrix} = -72,\quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 12 \end{vmatrix} = 72.$$

За формулами Крамера маємо

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{36}{36}=1; \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-72}{36}=-2; \qquad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{72}{36}=2.$$

Відповідь. $x=1;\ y=-2;\ z=2.$

Формули Крамера можна використати для дослідження системи (3.2):

• якщо визначник системи $\Delta\neq 0,$ то система має єдиний розв'язок;

• якщо визначник системи $\Delta=0$ і всі визначники при невідомих $\Delta_1=\Delta_2=\ldots=\Delta_n=0,$ то система має безліч розв'язків;

• якщо визначник системи $\Delta=0,$ а хоча б один із визначників при невідомих Δ_k $\left(k=1,\,2,\,\ldots,\,n\right)$ не дорівнює нулю, то система не має розв'язків.

3.3. Теорема Кронекера-Капеллі

Як зазначалося, формули Крамера можна застосовувати в тих випадках, коли кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь і визначник системи $\Delta\neq 0.$ Як узнати, сумісна чи несумісна система, коли вона такі вимоги не задовольняє. Нехай у системі (3.1) кількість невідомих не дорівнює кількості рівнянь, $n\neq m.$

Позначимо через A матрицю системи.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Через B позначимо матрицю, яка одержується з матриці A через приєднання стовпця вільних членів

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Матрицю B називають *розширеною* матрицею системи (3.1).

Теорема

Теорема Кронекера-Капеллі. Для того, щоб система m рівнянь із n невідомими була сумісною, необхідно і достатньо, аби ранг матриці системи A дорівнював рангу розширеної матриці B:

$$r(A)=r(B).$$

Зауваження. У випадку сумісності системи (3.1) система має єдиний розв'язок (визначена), коли $r(A)=r(B)=n$, і нескінченну кількість розв'язків (невизначена), коли $r(A)=r(B)<n$, де n — кількість невідомих.

Приклад

Дослідити систему рівнянь на сумісність:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5, \\ 5x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Згідно з теоремою Кронекера-Капеллі для сумісної системи лінійних рівнянь необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи дорівнював рангу розширеної матриці: $r(A)=r(B)$. Складаємо матрицю системи і визначаємо її ранг

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -1 & 2 \\ 8 & -5 & 6 & 1 \\ -7 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідки $r(A)=3$. Знаходимо ранг розширеної матриці

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 5 \\ 5 & -4 & 5 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & 10 & -7 & -13 \\ 0 & -14 & 20 & -9 & -26 \\ 0 & -7 & 10 & -7 & -9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 10 & -7 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці B дорівнює 4. Оскільки $r(A) \neq r(B)$, то дана система несумісна.

Приклад Довести сумісність системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 11, \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 - 3x_4 = 10. \end{cases}$$

Розв'язання. Знаходимо ранг матриці системи:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \\ 8 & 6 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 8 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \\ 10 & 9 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 5 & 8 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \\ 10 & 9 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 8 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці A $r(A) = 3$.

Складаємо розширену матрицю B системи і знаходимо її ранг.

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&2&-3&9\\2&3&-1&1&-5\\3&-2&1&-2&11\\8&6&1&-3&10\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&2&-3&9\\0&-1&-5&7&-23\\0&-8&-5&7&-16\\0&-10&-15&21&-62\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&2&-3&9\\0&-1&-5&7&-23\\0&0&35&-49&168\\0&0&35&-49&168\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&2&-3&9\\0&-1&-5&7&-23\\0&0&35&-49&168\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Звідси $r(B)=3.$ Оскільки $r(A)=r(B),$ то дана система сумісна. Ранг $r=r(A)=r(B)$ менше кількості невідомих, а значить система має нескінченну множину розв’язків.

3.4. Однорідні системи рівнянь

Однорідна система n лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0,\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=0.\end{cases}\tag{3.3}$$

Однорідна система завжди сумісна, бо вона має розв’язок $x_1=x_2=\ldots=x_n=0,$ який називається *нульовим*, або *тривіальним.*

Якщо визначник системи $\Delta\neq0,$ то тривіальний розв’язок буде єдиним розв’язком системи (3.3). Зазначимо, що ранг матриці системи (3.3) і ранг розширеної матриці рівні.

Якщо $\Delta=0,$ тоді ранг матриці системи (3.3) і ранг розширеної матриці системи (3.3) менше числа n. Припустимо, що вони дорівнюють n – 1. Тоді система (3.3) має нескінченну множину розв’язків

$$x_1=A_{k1}t,\quad x_2=A_{k2}t,\quad\ldots,\quad x_n=A_{kn}t.$$

де t — довільне дійсне число, а A_{ki} $\left(i=1,2,\ldots,n\right)$ — алгебричні доповнення елементів k-го рядка матриці системи. Справді, підставляючи ці числа в ліві частини рівнянь системи (3.3), дістанемо:

$$\begin{cases} a_{11}A_{k1}t + a_{12}A_{k2}t + \ldots + a_{1n}A_{kn}t = 0, \\ a_{21}A_{k1}t + a_{22}A_{k2}t + \ldots + a_{2n}A_{kn}t = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}A_{k1}t + a_{n2}A_{k2}t + \ldots + a_{nn}A_{kn}t = 0. \end{cases}$$

Рівняння системи перетворились на тотожності, бо якщо $i \neq k,$ то сума

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} \quad \left(i = 1,\, 2,\, \ldots, n \right)$$

дорівнює нулю (ця сума є сумою добутків елементів i-го рядка визначника на алгебричні доповнення k-го рядка визначника). Якщо $i = k,$ то сума

$$a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \ldots + a_{kn}A_{kn}$$

також дорівнює нулю, бо вона дорівнює визначнику системи Δ, який дорівнює нулю.

Зазначимо, що при побудові розв'язку системи (3.3) беруться алгебричні доповнення того рядка, де хоч би одне з A_{ki} не дорівнює нулю.

Приклад Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 0, \\ x - y + 4z = 0, \\ 5x + 2y + 10z = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Складаємо й обчислюємо визначник системи Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

Знаходимо алгебричні доповнення елементів першого рядка:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = -18; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 7.$$

Дістаємо розв'язок:

$$x = -18t, \quad y = 10t, \quad z = 7t, \; t \in \mathrm{IR}.$$

3.5. Розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь методом Гаусса. Матричні рівняння

Метод Гаусса

Метод називають також *методом послідовного виключення невідомих системи*. Ідея методу Гаусса полягає в такому: за допомогою елементарних перетворень система (3.1) зводиться до ступінчастої системи вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{mm}x_m + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3.4}$$

де $m \le n,\ a_{ii} \ne 0,\ i = 1, 2, \ldots, m.$

Якщо $m = n,$ то ступінчасту систему називають *трикутною*, якщо $m \ne n,$ то систему називають *трапецієподібною*.

Ступінчасту систему легко дослідити на сумісність. Якщо ступінчаста система містить хоча б одне рівняння вигляду $0 = a,\ a \ne 0,$ то система несумісна.

Елементарні перетворення зручно виконувати не над самою системою (3.1), а над її розширеною матрицею.

Трикутна система має єдиний розв'язок. Із останнього рівняння системи (3.4) знаходимо x_n, потім, підставляючи його значення в попереднє рівняння, знаходимо x_{n-1}. Далі аналогічно знаходимо $x_{n-2},\ x_{n-3},\ \ldots,\ x_2,\ x_1$.

Трапецієподібна система має нескінченну множину розв'язків. У цьому випадку змінні $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ вважаються вільними і їх переносимо в праві частини рівнянь, тоді головні змінні $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ в процесі розв'язку системи будуть лінійними функціями змінних $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$.

Слід зазначити, що метод Гаусса застосовується і для розв'язку однорідних систем у випадку, коли $\Delta = 0$ і ранг матриці системи менше n, а також для розв'язку систем, у яких кількість рівнянь більше кількості невідомих.

Приклад Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x+2y+3z-4t=11, \\ 2x+y+5z+t=3, \\ 3x+y+z+2t=-4, \\ x+y+5z+t=5. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо розширену матрицю системи

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & 11 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Виконаємо елементарні перетворення

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 0 & -7 & -6 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & -7 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -7 & -6 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -6 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -31 & 0 & -31 \end{array}\right).$$

Відповідно до отриманої матриці складаємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} -x=2, \\ y+5z+t=7, \\ -4z+t=-5, \\ -31z=-31. \end{cases}$$

Звідки $x=-2,\ y=3,\ z=1,\ t=-1.$

Приклад Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x+y+5z+2t=5, \\ 2x+y+5z+t=3, \\ 4x+3y+15z+5=10, \\ x+2y+3z-t=-1. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо розширену матрицю системи

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 15 & 5 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Виконаємо елементарні перетворення:

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -7 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -6 \end{array}\right).$$

Другий рядок розширеної матриці відповідає рівнянню $0=3$, тому дана система несумісна.

Приклад Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x-4y+2z=-1, \\ 2x-3y-z-5t=-7, \\ 3x-7y+z-5t=-8. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо розширену матрицю системи

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & -8 \end{array}\right).$$

Виконаємо елементарні перетворення

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отриманій матриці відповідає трапецієподібна система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x-4y+2z=-1, \\ 5y-5z-5t=-5. \end{cases}$$

Ця система двох рівнянь з чотирма невідомими має нескінченну множину розв'язків. Переносимо невідомі z і t в праві частини рівнянь

$$\begin{cases} x-4y=-1-2z, \\ y=z+t-1. \end{cases}$$

Звідси дістанемо розв'язок системи:

$$\begin{cases} y=z+t-1, \\ x=2z+4t-5, \end{cases}$$

де z і t — довільні числа.

Приклад Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x-y+z=12, \\ 2x+3y-z=13, \\ 3y+4z=5, \\ -3x+y+4z=-20. \end{cases}$$

Розв'язання. В даній системі кількість рівнянь більша за кількість невідомих. Складаємо розширену матрицю системи

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 12 \\ 2 & 3 & -1 & 13 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 4 & -20 \end{array}\right).$$

Виконаємо елементарні перетворення матриці:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & 5 & -3 & -11 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & -7 & -16 \\ 0 & 0 & 29 & 58 \\ 0 & 0 & 29 & 58 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & -7 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Цій матриці відповідає трикутна система рівнянь

$$\begin{cases} x - y + z = 12, \\ 2y - 7z = -16, \\ z = 2. \end{cases}$$

Звідси $z = 2,\ y = -1,\ x = 9.$

3.6. Матричне рівняння і його розв'язання

Розглянемо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn} = b_n. \end{cases} \qquad (3.5)$$

Коефіцієнти при невідомих цієї системи утворюють матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Праві частини системи утворюють матрицю-стовпець

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Позначимо матрицю-стовпець невідомих через X:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тоді систему (3.5) можна записати в матричній формі

$$AX = B. \qquad (3.6)$$

Якщо $\det A \neq 0$, то існує обернена матриця A^{-1}. Помноживши обидві частини рівняння (3.6) на A^{-1}, дістанемо:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \quad EX = A^{-1}B, \quad X = A^{-1}B.$$

Таким чином, щоб розв'язати систему, потрібно побудувати матрицю A^{-1} та помножити її на матрицю B. Це можна зробити, якщо $\det A \neq 0$.

Приклад Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10, \\ 4x + 2y - z = 15, \\ 5x + 4y = 23. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо цю систему в матричному вигляді $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 23 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Далі обчислюємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 12;$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5; \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 12; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -8; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 13; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6.$$

Обернена матриця матиме вигляд:

$$A^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}4 & 12 & -8\\ -5 & -15 & 13\\ 6 & 6 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{12} & 1 & -\frac{8}{12}\\ -\frac{5}{12} & -\frac{15}{12} & \frac{13}{12}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Далі знаходимо розв'язок системи за формулою $X = A^{-1}B$.

$$X=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3}\\ -\frac{5}{12} & -\frac{15}{12} & \frac{13}{12}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\ 15\\ 23\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Отже, маємо $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$, звідки $x=3,\ y=2,\ z=1.$

Питання для самоперевірки

1. Як записується система n лінійних рівнянь з n невідомими?
2. Яка система лінійних рівнянь називається сумісною, визначеною, несумісною?
3. Запишіть формули Крамера. Коли застосовуються формули Крамера?
4. Як виконуються дослідження системи за формулами Крамера?
5. Сформулюйте теорему Кронекера—Капеллі. Яка умова сумісності системи?
6. За якою умовою однорідна система лінійних рівнянь має ненульовий розв'язок?
7. Яка система лінійних рівнянь називається трикутною, трапецієподібною?
8. Які перетворення називаються елементарними перетвореннями системи?
9. У чому полягає розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гаусса?
10. У чому полягає матричний спосіб запису і розв'язку систем лінійних рівнянь? Коли він застосовується?

ПІДМОДУЛЬ 4

Вектори

При виборі і розробці математичних методів розв’язування прикладних задач конкретного змісту використовують як скалярні, так і векторні величини.

Скалярна величина (від лат. *scala* — шкала) — це величина, яка виражає результат порівняння цієї величини з деякою одиницею виміру.

Прикладами скалярних величин можуть бути маса, густина, робота, сила струму, температура.

Векторна величина (від лат. *vehere* — тягнути) — це величина, яка характеризується не тільки деяким числовим значенням, а й певним напрямом у просторі і зображається у вигляді напрямлених відрізків — геометричних векторів.

Вектор відповідно до конкретного змісту зображуваної величини визначається своїм модулем і розташуванням у просторі: спрямуванням і лінією дії або спрямуванням і точкою прикладання.

Модулем, або *абсолютною величиною* вектора називають довжину цього вектора у відповідних одиницях.

Напрям вектора $\vec{a}$ при графічних побудовах вказується стрілкою на його кінці.

Пряма, на якій розташовується вектор, називається *лінією дії*, або *основою*.

Точка, з якою суміщається початок вектора, називається *точкою* його *прикладання*.

У багатьох випадках вектори можна переносити або за лінією їх дії, або в будь-яку точку простору паралельно самим собі. Відповідно до цього вектори можуть бути:

- *вільні* — це вектори, які можна переносити в будь-яку точку простору паралельно самим собі. Такі вектори повністю характеризуються модулем і напрямом у просторі;
- *ковзні* вектори зображають величини, кожну із яких, не порушуючи її змісту і числового значення, можна віднести до будь-якої точки деякої прямої. Ковзні вектори характеризуються модулем, напрямом і лінією дії;
- *нерухомі*, або *зв’язані*, вектори зображаються величинами, кожна з яких належить до деякої фіксованої точки простору. Зв’язані вектори характеризуються модулем, напрямом і точкою прикладання.

У курсі вищої математики вивчаються правила виконання основних операцій над вільними векторами.

Переходячи до вивчення основних операцій над векторами, введемо необхідну символіку й основні означення.

Вектори прийнято записувати таким чином: двома буквами латинського алфавіту, що позначають початок і кінець вектора $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC},\ \ldots\right)$, або однією буквою $\left(\vec{a},\ \vec{b},\vec{c}\ldots\right)$.

Модуль вектора позначається так: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $|\vec{a}|$.

Нульовим вектором називається такий вектор, у якого початок і кінець збігаються. Його позначають $\vec{0}$. Модуль нульового вектора дорівнює нулю. Напрям цього вектора прийнято вважати невизначеним.

Вектор, який збігається за напрямом з даним вектором $\vec{a}$, що має модуль, рівний 1, називають *одиничним вектором*, або *ортом даного вектора* $\vec{a}$ і позначають $\overrightarrow{a_0}$, $\left(\left|\overrightarrow{a_0}\right|=1\right)$.

Вектори, які розташовані на одній прямій або на паралельних прямих, називаються *колінеарними*. Нуль-вектор вважають колінеарним будь-якому іншому векторові. Колінеарність позначають символом «‖»: $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

Вектори, які розташовані в одній або паралельних площинах, називаються *компланарними*.

Рівними називаються колінеарні вектори, напрямлені в одну і ту саму сторону і мають однакові модулі.

Протилежними називаються колінеарні вектори, протилежно напрямлені, що мають однакові модулі. Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначають $(-\vec{a})$.

4.1. Лінійні операції над векторами

До лінійних операцій над векторами належать додавання, віднімання векторів і множення вектора на скаляр (число).

Додавання векторів

Правило паралелограма. Щоб додати вектор $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ необхідно:

- за допомогою паралельного перенесення звести дані вектори до спільного початку;
- на даних векторах як на сторонах побудувати паралелограм;

• вектор, що збігається з діагоналлю одержаного паралелограма і виходить зі спільного початку даних векторів, буде сумою даних векторів (рис. 4.1).

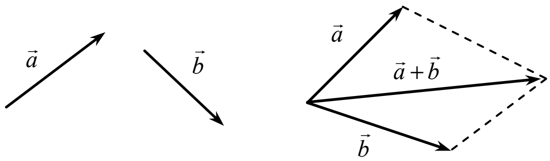


Рис. 4.1

Правило трикутника (*многокутника*). Щоб додати вектор $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ необхідно:

• за допомогою паралельного перенесення розмістити початок вектора $\vec{b}$ в кінці вектора $\vec{a}$;

• вектор, що з'єднує початок вектора $\vec{a}$ з кінцем вектора $\vec{b}$, буде сумою даних векторів (рис. 4.2).

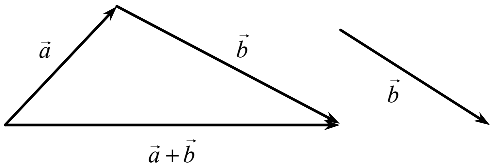


Рис. 4.2

Зауваження. У випадку застосування правила трикутника до обчислення суми векторів, коли їх кількість більша або дорівнює трьом, у результаті відповідної побудови маємо многокутник. Тому дане правило називають ще *правилом многокутника*.

Властивості суми векторів:

а) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (комутативний закон);

б) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ (асоціативний закон);

в) сума двох протилежних векторів дорівнює нуль-вектору: $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}.$

Віднімання векторів

Правило. Щоб відняти вектор $\vec{b}$ від вектора $\vec{a}$ необхідно:

• за допомогою паралельного перенесення звести дані вектори до спільного початку;

• вектор, який з’єднує кінці даних векторів і спрямований в бік зменшуваного вектора, буде різницею даних векторів (рис. 4.3).

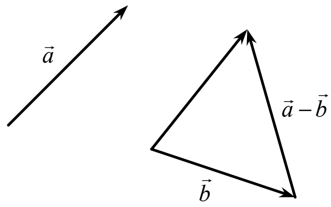


Рис. 4.3

Множення вектора на число

Означення. Добутком вектора $\vec{a}$ на скалярний множник λ називається вектор $\vec{b}$, який задовольняє такі умови:

— $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ колінеарний вектору $\vec{a}$;

— $|\vec{b}|=|\lambda||\vec{a}|$.

Якщо $\lambda>0$, то вектори $\vec{a}$ і $\lambda\vec{a}$ *співспрямовані*, якщо $\lambda<0$, то вектори $\vec{a}$ і $\lambda\vec{a}$ *протилежно спрямовані*. Якщо $|\lambda|>1$, то $|\lambda\vec{a}|>|\vec{a}|$; якщо $|\lambda|<1$, то $|\lambda\vec{a}|<|\vec{a}|$. У загальному випадку операцію множення вектора $\vec{a}$ на число λ можна тлумачити як відповідну деформацію вектора (розтяг або стискання) вектора $\vec{a}$ в λ разів зі зміною його напряму (рис. 4.4).

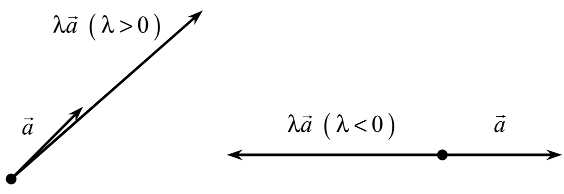


Рис. 4.4

Властивості множення вектора на скаляр:

а) $\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda$;

б) $\lambda_1\lambda_2\vec{a}=(\lambda_1\lambda_2)\vec{a}$;

в) $(\lambda_1+\lambda_2)\vec{a}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}$;

г) $\lambda(\vec{a}_1+\vec{a}_2)=\lambda\vec{a}_1+\lambda\vec{a}_2$;

д) $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\vec{a}_0$ — одиничний вектор, або орт.

4.2. Лінійна комбінація векторів. Лінійна залежність векторів

Лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ називається вектор $\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n$, де $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ — деякі скалярні множники (числа), які називаються коефіцієнтами лінійної комбінації.

Отже, лінійні комбінації векторів — це вектори, які одержуються в результаті виконання сукупності лінійних операцій над даними векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$.

Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ називається *лінійно залежною*, якщо $\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = 0$ за умови, що хоч би один із множників $\alpha_k \neq 0$, $k = 1, 2, ..., n$.

Система векторів називається *лінійно незалежною*, якщо $\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = 0$, коли всі $\alpha_k = 0$ (і не дорівнює нулю, якщо хоч один із співмножників $\alpha_k \neq 0$, $k = 1, 2, ..., n$).

Якщо система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ лінійно залежна, то хоч би один із цих векторів можна записати у вигляді лінійної комбінації решти.

Так із умови, що $\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = 0, \alpha_k \neq 0$, випливає

$$\overrightarrow{a_k} = \lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + ... + \lambda_{k-1}\overrightarrow{a_{k-1}} + \lambda_{k+1}\overrightarrow{a_{k+1}} + ... + \lambda_{k+1}\overrightarrow{a_{k+1}} + ... + \lambda_n\overrightarrow{a_n},$$

де $\lambda_1 = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_k}$, $\lambda_2 = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_n}$, ..., $\lambda_n = -\dfrac{\alpha_n}{\alpha_k}$.

Справедливі такі твердження:

✓ необхідною і достатньою ознакою лінійної залежності двох векторів є їх колінеарність. Два неколінеарні вектори — лінійно незалежні;

✓ необхідною і достатньою ознакою лінійної залежності трьох векторів є їх компланарність. Три некомпланарні вектори — лінійно незалежні.

4.3. Лінійний простір геометричних векторів

Розглянемо множину всіх геометричних векторів у просторі. Будь-яка лінійна комбінація довільної скінченної кількості таких векторів є також геометричний вектор, тобто належить даній множині.

На цій множині визначені:

1) операція додавання елементів множини (в результаті додавання сума є також елементом цієї множини);

2) операція множення елементів цієї множини на скалярний множник.

Ці операції мають такі властивості:

а) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ — комутативність додавання;

б) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ — асоціативність додавання;

в) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ — існування нульового елемента;

г) $\vec{a}+(\overrightarrow{-a})=\vec{0}$ — існування протилежного елемента;

д) $\vec{a}\cdot 1=\vec{a}$ — особлива роль одиничного числового множника;

е) $\lambda_1\left(\lambda_2\vec{a}\right)=\left(\lambda_1\lambda_2\right)\vec{a}$ — асоціативність відносно операції множення;

є) $\lambda\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2\right)=\lambda\vec{a}_1+\lambda\vec{a}_2$ — дистрибутивність відносно додавання векторів;

ж) $\left(\lambda_1+\lambda_2\right)\vec{a}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}$ — дистрибутивність відносно додавання чисел.

Множина геометричних векторів, у межах якої виконуються умови а) — ж), називається *лінійним простором* цих векторів.

Найпростішими прикладами лінійних просторів геометричних векторів є:

- множина всіх колінеарних векторів $\vec{a}=\lambda\vec{a}_1$;
- множина всіх компланарних векторів $\vec{a}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2,\ \ \vec{a}_2 \parallel \vec{a}_1$;
- множина всіх геометричних векторів.

Зауваження. Властивості, розглянуті в підрозд. 4.3, мають не лише множини геометричних векторів, а й інші множини різної природи. Наприклад, множина дійсних чисел відносно математичних операцій додавання і множення на дійсне число; множина всіх многочленів від однієї змінної степеня не вище n. Сума двох многочленів степеня не вище n і результат множення многочлена степеня k, $k \le n$, на скаляр належать початковій множині.

4.4. Векторний базис. Розкладання довільного вектора за векторним базисом

Базисом в n-вимірному лінійному просторі називається n лінійно незалежних векторів $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, узятих в певному порядку:

$\vec{e}_1$ — перший базисний вектор;

$\vec{e}_2$ — другий базисний вектор і т. д.

Базисом у 3-вимірному просторі називається три некомпланарні вектори, взяті в певному порядку: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Базисом на площині називається два неколінеарні вектори, взяті в певному порядку: $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

Рівність $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + ... + \lambda_n\vec{e}_n$ називається *розкладанням вектора $\vec{a}$ за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$*.

Вектори $\lambda\vec{e}_1, \lambda\vec{e}_2, ..., \lambda\vec{e}_n$ називаються *складовими вектора $\vec{a}$*. За допомогою базису в *n*-вимірному просторі кожному вектору ставляться у відповідність *n* чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ називаються *координатами*, або *проекціями вектора* $\vec{a}$. В координатній формі вектор записують так: $\vec{a}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_n\}$.

4.5. Лінійні операції над векторами, що задані своїми координатами

Правило 1. При додаванні або відніманні векторів додаються або віднімаються їх відповідні координати.

Приклад Нехай $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$, $\vec{b} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2$, тоді

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (\lambda_1 \pm \beta_1)\vec{e}_1 + (\lambda_2 \pm \beta_2)\vec{e}_2,$$

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \{(\lambda_1 \pm \beta_1);\ (\lambda_2 \pm \beta_2)\}.$$

Правило 2. При множенні вектора на число його координати множаться на це число.

Приклад Нехай $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$, тоді

$$3\vec{a} = 3\lambda_1\vec{e}_1 + 3\lambda_2\vec{e}_2, \qquad 3\vec{a} = \{3\lambda_1,\ 3\lambda_2\}.$$

Зауваження. Якщо два вектори колінеарні, то їх відповідні координати пропорційні.

Справді, нехай $\vec{a} \parallel \vec{b}$, тоді $\vec{a} = k\vec{b}$. Якщо $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$, $\vec{b} = \frac{1}{k}\vec{a}$, або $\vec{b} = \frac{\lambda_1}{k}\vec{e}_1 + \frac{\lambda_2}{k}\vec{e}_2$. Далі маємо $\frac{\lambda_1}{\frac{\lambda_1}{k}} = \frac{\lambda_2}{\frac{\lambda_2}{k}} = k$.

4.6. Проекція вектора на вісь

Пряму, на якій задано додатний напрям і одиницю виміру довжини, називають *віссю.*

Зазвичай додатний напрям і одиницю довжини задають одночасно за допомогою одиничного вектора $\vec{e}_0$, який паралельний цій прямій (рис. 4.5).

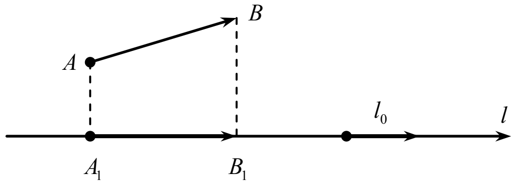


Рис. 4.5

Вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ називають *векторною проекцією* вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l. Поряд з векторною проекцією застосовують скалярну проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь. Надалі ми будемо мати справу лише зі скалярними проекціями вектора на вісь.

Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l називається число, модуль якого дорівнює довжині відрізка $\overrightarrow{A_1B_1}$ (рис. 4.6) цієї осі, що знаходиться між проекцією його початку (точка A) і кінця (точка B). Це число береться зі знаком «плюс», якщо напрям вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ збігається додатним напрямом осі, і зі знаком «мінус», якщо напрям вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ і додатний напрям осі протилежні.

Теорема Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l дорівнює добутку довжини вектора $\overrightarrow{AB}$ на косинус кута між цим вектором і віссю l.

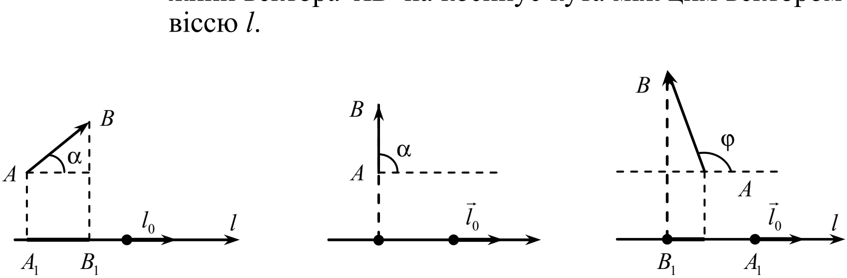


Рис. 4.6

Пишуть: $\text{пр}_l\,\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,l\right)$.

Основні властивості проекцій векторів.

1. Рівні вектори мають рівні проекції на одну і ту саму вісь.
2. Проекція суми векторів на одну і ту саму вісь дорівнює сумі їх проекцій на цю ж вісь

$$\text{пр}_l\left(\vec{a}+\vec{b}+....+\vec{d}\right)=\text{пр}_l\,\vec{a}+\text{пр}_l\,\vec{b}+...+\text{пр}_l\,\vec{d}.$$

3. При множенні вектора на число його проекція множиться на це саме число

$$\text{пр}_l\left(k\overrightarrow{AB}\right)=k\,\text{пр}_l\,\overrightarrow{AB}.$$

4. Проекція ненульового вектора на вісь дорівнює нулю, якщо вектор перпендикулярний осі проекцій.

4.7. Прямокутна декартова система координат

Множина, яка складається з точки O і векторного базису $\vec{l}_1,\ \vec{l}_2, \vec{l}_3$, називається *декартовою системою* координат у просторі $\left\{0,\ \vec{l}_1,\ \vec{l}_2,\ \vec{l}_3\right\}$ (рис. 4.7).

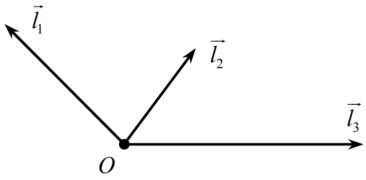


Рис. 4.7

Декартова система координат $\left\{0, \vec{l}_1,\ \vec{l}_2,\ \vec{l}_3\right\}$ у просторі називається *прямокутною*, якщо $\vec{l}_1,\ \vec{l}_2,\ \vec{l}_3$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

Базисні вектори $\vec{l}_1,\ \vec{l}_2,\ \vec{l}_3$ в прямокутній системі в просторі прийнято позначати $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$. Вектор $\vec{i}$ визначає вісь Ox, вектор $\vec{j}$ — Oy, вектор $\vec{k}$ — Oz.

Зауваження. Аналогічно визначається прямокутна декартова система координат на площині.

Прямокутні системи координат поділяються на два класи: права (рис. 4.8) і ліва (рис. 4.9) системи.

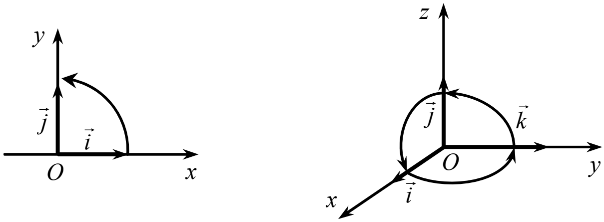


Рис. 4.8

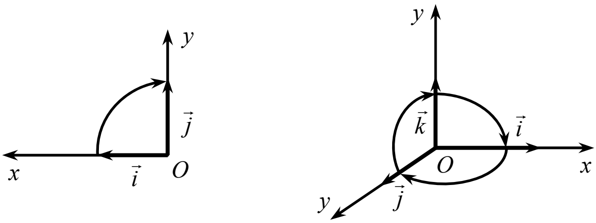


Рис. 4.9

Надалі ми будемо розглядати лише праві системи координат, в яких за додатний напрям обертання береться обертання «проти годинникової стрілки».

4.8. Координати вектора в прямокутній системі координат

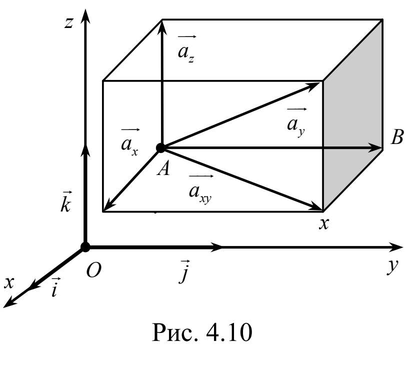


Рис. 4.10

Нехай маємо в просторі деякий вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ (рис. 4.10). Розкладемо його на дві складові: $\overrightarrow{a_z}$ — паралельну осі Oz і $\overrightarrow{a_{xy}}$ — паралельну площині xOy, тобто запишемо вектор $\vec{a}$ у вигляді суми $\vec{a} = \overrightarrow{a_z} + \overrightarrow{a_{xy}}$. Вектор $\overrightarrow{a_{xy}}$, своєю чергою, розкладемо на дві складові: $\overrightarrow{a_x}$ — паралельну осі Ox і $\overrightarrow{a_y}$ — паралельну осі Oy.

Оскільки $\vec{a} = \overrightarrow{a_z} + \overrightarrow{a_{xy}}$ і $\overrightarrow{a_{xy}} = \overrightarrow{a_x} + \overrightarrow{a_y}$, то маємо $\vec{a} = \overrightarrow{a_x} + \overrightarrow{a_y} + \overrightarrow{a_z}$. Такий запис вектора $\vec{a}$ називається його векторним розкладанням за базисом. Оскільки векторні складові, або компоненти $\overrightarrow{a_x}$, $\overrightarrow{a_y}$, $\overrightarrow{a_z}$, — колінеарні відповідним базисним векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, то існують скалярні множники a_x, a_y, a_z такі, що

$$\overrightarrow{a_x} = a_z\vec{i}, \quad \overrightarrow{a_y} = a_y\vec{j}, \quad \overrightarrow{a_z} = a_z\vec{k}.$$

На основі останніх рівностей розкладання вектора $\vec{a}$ за базисом $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ має вигляд: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, де коефіцієнти розкладу a_x, a_y, a_z є проекціями вектора $\vec{a}$ на відповідні координатні осі і називають його координатами. Координати вектора часто позначають так: *X*, *Y*, *Z*. Якщо відомі координати початку і кінця вектора:

$$A(x_1, y_1, z_1), \quad B(x_2, y_2, z_2),$$

то:

$$a_x = X = \text{пр}_{Ox}\vec{a} = x_2 - x_1;$$
$$a_y = Y = \text{пр}_{Oy}\vec{a} = y_2 - y_1;$$
$$a_z = Z = \text{пр}_{Oz}\vec{a} = z_2 - z_1.$$

Вектор $\vec{a}$ записують скорочено, через його проекції або координати у вигляді:

$$\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}, \qquad \vec{a} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k},$$
$$\vec{a}\{X, Y, Z\}, \quad \vec{a}\{(x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)\}.$$

Приклад Записати вектор, якщо відомо координати його початку і кінця $A(3;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ 0;\ 4)$.

Розв'язання. Скористаємося формулою:

$$\vec{a} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k},$$

де $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$.

Отже, маємо:

$$\overrightarrow{AB} = (1-3)\vec{i} + (0-2)\vec{j} + (4+1)\vec{k} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Приклад Записати вектор $\vec{a}\{2;\ 4;\ 7\}$ у вигляді суми складових.

Розв'язання. Якщо $\vec{a}\{X;\ Y;\ Z\}$, то $\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$. Отже, маємо

$$\vec{a}\{2;\ 4;\ 7\} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}.$$

Зауваження. Лінійні операції над векторами, заданими проекціями в прямокутній декартовій системі координат, повністю збігаються з лінійними операціями над векторами, заданими своїми координатами при довільному базисі, що розглянуті в підрозд. 4.1.

Приклад Дано вектор $\vec{a}\{3;\ -1;\ 4\}$; $\vec{b}\{5;\ 0; 6\}$. Знайти $\vec{a}+\vec{b}$; $2\vec{a}-\vec{b}$.

Розв'язання. $\vec{a}+\vec{b} = 8\vec{i} - \vec{j} + 10\vec{k},\ 2\vec{a}-\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}.$

4.9. Довжина вектора в координатній формі

Нам відома формула, яка виражає довжину відрізка AB через координати його кінців, $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Якщо точки A і B взяти за точки початку і кінця вектора $\overrightarrow{AB}$, то $X = x_2 - x_2$, $Y = y_2 - y_2$, $Z = z_2 - z_2$. Формула для визначення довжини вектора матиме вигляд: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$.

Приклад Обчислити довжину вектора $\overrightarrow{AB}\{1;\ -2;\ 2\}$.

Розв'язання. За формулою $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ маємо $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1+4+3} = 3.$

4.10. Напрямні косинуси вектора

За означенням проекції вектора на вісь маємо:

$$X = \text{пр}_{Ox}\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,Ox\right) = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\alpha;$$

$$Y = \text{пр}_{Oy}\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,Oy\right) = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\beta;$$

$$Z = \text{пр}_{Oz}\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,Oz\right) = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\gamma.$$

Числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ називаються *напрямними косинусами* вектора $\overrightarrow{AB}$.

Напрямні косинуси пов'язані між собою співвідношенням $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Справді: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, або $|\overrightarrow{AB}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, звідки

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 \cos^2\alpha + |\overrightarrow{AB}|^2 \cos^2\beta + |\overrightarrow{AB}|^2 \cos^2\gamma =$$

$$= |\overrightarrow{AB}|^2 \left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right).$$

Якщо скоротити ліву і праву частини рівностей на $|\overrightarrow{AB}|^2$, то дістанемо $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

З наведених формул можна отримати формули для обчислення $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ для вектора $\overrightarrow{AB}\{X; Y; Z\}$:

$$\cos\alpha = \frac{X}{|\overrightarrow{AB}|}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{|\overrightarrow{AB}|}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

Приклад Обчислити напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(1; -1; 3)$, $B(2; 1; 1)$.

Розв'язання. Координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ є: $X = 1; Y = 2; Z = -2$, тоді $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$.

Отже, маємо:

$$\cos\alpha = \frac{X}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{3}; \quad \cos\beta = \frac{Y}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{2}{3}; \quad \cos\gamma = \frac{Z}{|\overrightarrow{AB}|} = -\frac{2}{3}.$$

Приклад Вектор $\overrightarrow{AB}$ утворює з осями Ox і Oy кути по $60°$. Який кут він утворює з віссю Oz?

Розв'язання. Із співвідношення $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ маємо:

$$\cos^2 60° + \cos^2 60° + \cos^2\gamma = 1,$$

оскільки $\cos 60° = \frac{1}{2}$, то $\cos^2\gamma = \frac{1}{2}$, $\cos\gamma = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значення $\gamma = \pm 45°$ відповідає двом векторам, які симетричні один одному відносно координатної площини xOy.

Питання для самоперевірки

1. Які величини називаються скалярними, векторними? Наведіть приклади.
2. Що таке модуль вектора? Дайте означення одиничного та нульового векторів.
3. Які вектори називаються колінеарними, компланарними, рівними?
4. У чому полягає правило паралелограма при додаванні двох векторів?
5. У чому полягає правило трикутника (многокутника) при додаванні векторів?
6. Опишіть властивості суми двох векторів.
7. Як виконується множення вектора на число? Опишіть його властивості.
8. Яка система векторів називається лінійно залежною, лінійно незалежною?
9. Що таке розкладання вектора за певним базисом?
10. Як виконуються лінійні операції над векторами в координатній формі?
11. Що називається скалярною проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l?
12. Назвіть основні властивості проекцій векторів на вісь.
13. Дайте визначення прямокутної декартової системи координат у просторі.
14. Як записати вектор у координатній формі, якщо відомі координати його початку $A(x_1, y_1, z_1)$ і кінця $B(x_2, y_2, z_2)$?
15. Запишіть формулу довжини вектора в координатній формі.
16. Як виконуються лінійні операції над векторами в координатній формі?

ПІДМОДУЛЬ 5

Скалярний добуток векторів

5.1. Скалярний добуток двох векторів

Скалярний добутком двох векторів називають добуток довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\left(\vec{a}\vec{b}\right)=\vec{a}\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a}\,\widehat{}\,\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\left|b\right|\cos\varphi.$$

За визначення проекції вектора на вісь маємо:

$$\text{пр}_{\vec a}\vec b = \left|\vec b\right|\cos\left(\vec a \,\hat{}\, \vec b\right) = \left|\vec b\right|\cos\varphi, \qquad \text{пр}_{\vec b}\vec a = \left|\vec a\right|\cos\left(\vec a\vec b\right) = \left|\vec a\right|\cos\varphi.$$

Підставивши ці співвідношення у формулу скалярного добутку двох векторів, дістанемо:

$$\vec a\vec b = \left|\vec b\right| \text{ пр}_{\vec a}\vec b = \left|\vec b\right| \text{ пр}_{\vec b}\vec a.$$

Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного з них на проекцію другого вектора на напрям першого вектора.

Зауваження. Скалярний добуток вектора $\vec a$ на себе називають скалярним квадратом вектора, $\vec a\,\vec a = \vec a^2 = |\vec a||\vec a|\cos 0° = |\vec a|^2$.

Отже, *скалярний квадрат* вектора дорівнює квадратові його довжини. З цієї властивості випливає формула для обчислення довжини вектора: $|\vec a| = \sqrt{\vec a^{\,2}}$.

5.2. Основні властивості скалярного добутку

Геометричні властивості

1. Якщо $\vec a \perp \vec b$, то $\cos\varphi = 0$ і $\vec a\cdot\vec b = 0$. Справедливе й обернене твердження: якщо перемножити два ненульові вектори $\vec a$ і $\vec b$, то $\vec a\vec b = 0$ тільки за умови, що $\cos\left(\vec a \,\hat{}\, \vec b\right) = \cos\varphi = 0$, тобто $\varphi = \frac{\pi}{2}$, а отже, $\vec a \perp \vec b$.

Таким чином, якщо скалярний добуток дорівнює нулю, то вектори-співмножники взаємно перпендикулярні.

2. $\vec a\cdot\vec b > 0$, якщо $\cos\varphi > 0$, тобто $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ (φ — гострий кут).

3. $\vec a\cdot\vec b < 0$, якщо $\cos\varphi < 0$, тобто $\frac{\pi}{2} < 0 < \varphi$ (φ — тупий кут).

4. $\vec a\cdot\vec b = |\vec a||\vec b|$, якщо $\cos\varphi = 1$, тобто вектори $\vec a$ і $\vec b$ збігаються за напрямом.

Алгебричні властивості

1. Комутативна властивість: $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$.

Доведення. За означенням скалярного добутку маємо:

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right),\quad \vec{b}\vec{a}=|\vec{b}||\vec{a}|\cos\left(\vec{b}\,\hat{}\,\vec{a}\right),$$

але $\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=\cos\left(\vec{b}\,\hat{}\,\vec{a}\right)$, бо $\cos\varphi=\cos(-\varphi)$ із властивості парності функції косинус. Отже, маємо:

$$\vec{b}\vec{a}=|\vec{b}||\vec{a}|\cos\left(\vec{b}\,\hat{}\,\vec{a}\right)=\vec{a}\vec{b},$$

що необхідно було довести.

2. Дистрибутивна властивість: $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$.

Доведення. Маємо:

$$\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=|\vec{a}|\text{пр}_{\vec{a}}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=|\vec{a}|\left(\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}+\text{пр}_{\vec{a}}\vec{c}\right)=$$
$$=|\vec{a}|\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}+|\vec{a}|\text{пр}_{\vec{a}}\vec{c}=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}.$$

3. Асоціативна властивість: $(\lambda\vec{a})\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

Доведення. Маємо $(\lambda\vec{a})\vec{b}=|\vec{b}|\text{пр}_{\vec{b}}(\lambda\vec{a})=\lambda|\vec{b}|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\lambda(\vec{a}\vec{b})$, оскільки $|\vec{b}|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\vec{a}\vec{b}$.

5.3. Скалярний добуток векторів у координатній формі

Нехай $\vec{a}=X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k}$, $\vec{b}=X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k}$, тоді, враховуючи дистрибутивну властивість скалярного добутку, маємо:

$$\vec{a}\vec{b}=\left(X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k}\right)\left(X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k}\right)=$$
$$=\overrightarrow{X_1}\overrightarrow{X_2}\vec{i}^2+Y_1X_2\vec{j}\vec{i}+Z_1X_2\vec{k}\vec{i}+X_1Y_2\vec{i}\vec{j}+Y_1Y_2\overrightarrow{j^2}+$$
$$+Z_1Y_2\vec{k}\vec{j}+X_1Z_2\vec{i}\vec{k}+Y_1Z_2\vec{j}\vec{k}+Z_1Z_2\overrightarrow{k^2}.$$

Враховуючи, що $\vec{i}^{\,2}=1,\ \vec{j}^{\,2}=1, \vec{k}^{\,2}=1,\quad \vec{j}\vec{i}=0, \vec{k}\vec{i}=0,\quad \vec{i}\,\vec{j}=0,$ $\vec{i}\,\vec{k}=0,\quad \vec{j}\vec{k}=0,$ дістаємо

$$\vec{a}\,\vec{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2.$$

Скалярний добуток двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих своїми координатами, дорівнює сумі добутків їх відповідних координат:

$$\vec{a}(\,X_1,\,Y_1,\,Z_1\,)\cdot\vec{b}(\,X_2,\,Y_2,\,Z_2\,)=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2.$$

5.4. Кут між двома векторами. Умова взаємної перпендикулярності двох векторів

За визначенням скалярного добутку маємо:

$$\vec{a}\vec{b}=|\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|\cos\varphi=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2.$$

Звідси:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},\quad \varphi=\arccos\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},$$

$$\cos\varphi=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}};$$

$$\varphi=\mathrm{ar}\cos\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}.$$

Якщо вектори взаємно перпендикулярні, тобто $\varphi=\dfrac{\pi}{2},$ то

$$\vec{a}\vec{b}=|\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|\cos\varphi=0.$$

З цієї рівності випливає умова взаємної перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ у координатній формі:

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0.$$

Зауваження. Скалярний добуток двох векторів використовується для обчислення роботи: робота дорівнює абсолютній величині скалярного добутку вектора сили на вектор переміщення.

Приклад Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{F}\{-6;\ 2\}$, коли точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується з точки $A(3;\ 4)$ в точку $B(-1;\ 3)$ (рис. 5.1).

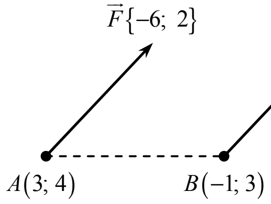


Рис. 5.1

Розв'язання. Визначимо вектор переміщення $\overrightarrow{AB}\{-4;\ 1\}$. Обчислимо скалярний добуток векторів $\vec{F}$ і $\overrightarrow{AB}$:

$$\vec{F}\ \overrightarrow{AB} = (-6)(-4) + (2)(-1) = 24 - 2 = 22\ .$$

Приклад Дано три сили $\vec{F}_1\{3;\ -4\}$, $\vec{F}_2\{2;\ 32\}$, $\vec{F}_3\{-3;\ -2\}$, прикладені до однієї точки. Обчислити роботу, яку виконує рівнодіюча цих сил, коли точка їх прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщається із точки $A(5;\ 3)$ в точку $B(4;\ -1)$.

Розв'язання. Обчислюємо силу $\vec{F}$, яка є рівнодійною сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}\{2;\ -3\}.$$

Знаходимо вектор переміщення $\overrightarrow{AB}\{-1;\ -4\}$, обчислюємо роботу:

$$A = \vec{F}\ \overrightarrow{AB} = -2 + 12 = 10\ .$$

Приклад Дано точки $A(2;\ 0;\ 1)$, $B(2;\ 1;\ 0)$, $C(1;\ 0;\ 0)$. Знайти кут ABC.

Розв'язання. Кут ABC будемо шукати як кут між векторами $\overrightarrow{BA} = \{0;\ -1;\ 1\}$ і $\overrightarrow{BC} = \{-1; -1;\ 0\}$.

За формулою косинуса кута між двома векторами маємо:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|} = \frac{0\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)+1\cdot 0}{\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+0^2}} = \frac{1}{2}.$$

Отже, $\varphi = 60°$.

Приклад Визначити координати точки C середини вектора $\overrightarrow{AB}$ за відомими координатами його кінців $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$.

Розв'язання. Вектор, який з'єднує початок координат з точкою, називається радіус-вектором цієї точки. Позначається, наприклад, так: радіус-вектор точки A— $\overrightarrow{r_A}$, радіус-вектор точки B— $\overrightarrow{r_B}$. Координати точки є відповідними проекціями її радіус-вектора, отже:

$$\overrightarrow{r_A}\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\}, \qquad \overrightarrow{r_B}\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\}.$$

Середина відрізка $\overrightarrow{AB}$ буде знаходитись на перетині діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{r_A}$ і $\overrightarrow{r_B}$ (рис. 5.2).

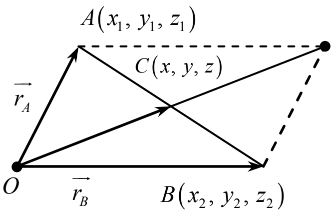


Рис. 5.2

Позначимо координати точки C через $x, y, z,$ тоді її радіус-вектор матиме координати $\overrightarrow{r_C}\{X,\ Y,\ Z\}$, що дорівнює півсумі векторів $\overrightarrow{r_A}$ і $\overrightarrow{r_B}$, тобто

$$\overrightarrow{r_C} = \frac{\overrightarrow{r_A}+\overrightarrow{r_B}}{2}. \tag{5.1}$$

Векторну рівність (5.1) можна замінити такими трьома скалярними рівностями, які визначають координати середини відрізка за відомими координатами його кінців:

$$x = \frac{x_1+y_2}{2};\quad y = \frac{y_1+y_2}{2};\quad z = \frac{z_1+z_2}{2}. \tag{5.2}$$

Аналізуючи формули (5.2), можна зробити висновок, що координати середини відрізка дорівнюють середнім арифметичним відповідних координат його кінців.

Приклад Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задано своїми координатами $\vec{a}\{7;\ 2;\ -1\}$ і $\vec{b}\{1;\ 2;\ -3\}$. Знайти скалярний добуток цих векторів і косинус кута між ними.

Розв'язання. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задано в координатній формі, тому для обчислення їх скалярного добутку скористаємося формулою:

якщо $$\vec{a}\{X_1,\ Y_1,\ Z_1\},\ \vec{b}\{X_2,\ Y_2,\ Z_2\},$$

то $$\vec{a}\vec{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2.$$

Отже, маємо $\vec{a}\vec{b} = 7\cdot 1 + 2\cdot 2 + (-1)(-3) = 14$. $\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)$ будемо визначати за формулою $\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, де $\vec{a}\,\vec{b} = 14$,

$$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{7^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{54},\ \ |\,\vec{b}\,| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}.$$

Дістаємо, що $\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right) = \dfrac{14}{\sqrt{54}\sqrt{14}} \approx 0{,}509.$

Питання для самоперевірки

1. Чому дорівнює скалярний добуток двох векторів, якщо:
— дано довжини цих векторів і косинус кута між ними?
— дано довжину одного з них і проекцію другого вектора на напрям першого?
— дано проекції векторів?
2. Що таке скалярний квадрат вектора і чому він дорівнює?
3. Сформулюйте геометричні властивості скалярного добутку.
4. Сформулюйте алгебричні властивості скалярного добутку.
5. Запишіть формулу косинуса кута між двома векторами через їх скалярний добуток.
6. Запишіть формули обчислення координат середини відрізка, якщо відомі координати його кінців.
7. Якщо вектори колінеарні, то якій умові задовольняють їх проекції?

ПІДМОДУЛЬ 6
Векторний і мішаний добутки векторів

6.1. Означення векторного добутку

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє такі умови:

• вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 6.1);

• вектор $\vec{c}$ спрямований так, що коли дивитися з його кінця, то найкоротший оберт від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ буде виконуватись проти годинникової стрілки, тобто вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів;

• довжина вектора $\vec{c}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах.

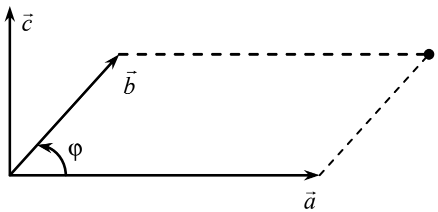


Рис. 6.1

Векторний добуток позначають: $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\left[\,\vec{a}\vec{b}\,\right]$.

6.2. Основні властивості векторного добутку

Геометричні властивості

1. Довжина вектора $\vec{c}$ векторного добутку $\vec{a}$ і $\vec{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах. Площа паралелограма зі сторонами a і b та гострим кутом між ними φ обчислюється за формулою $S_{\text{пар}}=ab\sin\varphi$, тому $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$.

2. $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$, якщо $\sin\varphi=1$, тобто $\varphi=\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)=\dfrac{\pi}{2}$, або $\vec{a}\perp\vec{b}$.

3. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, якщо $\varphi=0$ або $\varphi=\pi$.

4. Вираз $\vec{a}\times\vec{a}=\left[\vec{a}\ \vec{a}\right]=\left[\vec{a}\right]^2$ називається векторним квадратом. Векторний квадрат $\left[\vec{a}\right]^2=0$.

Алгебричні властивості

1. При зміні порядку множників векторного добутку знак векторного добутку змінюється на протилежний: $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

2. Асоціативність відносно множення на число: $\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}=$ $=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.

3. Дистрибутивність відносно додавання векторів: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=$ $=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$, $\vec{c}\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}$.

Обчислення векторного добутку,
якщо вектори задано в координатній формі

Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, використовуючи властивості:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k}\right)\left(X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k}\right)=$$
$$=X_1X_2\left[\vec{i}\,\vec{i}\right]+X_1Y_2\left[\vec{i}\,\vec{j}\right]+X_1Z_2\left[\vec{i}\vec{k}\right]+Y_1X_2\left[\vec{j}\vec{i}\right]+Y_1Y_2\left[\vec{j}\vec{j}\right]+$$
$$+Y_1Z_2\left[\vec{j}\vec{k}\right]+Z_1X_2\left[\vec{k}\vec{i}\right]+Z_1Y_2\left[\vec{k}\,\vec{j}\right]+Z_1Z_2\left[\vec{k}\vec{k}\right].$$

Виходячи з рис. 6.2, визначимо векторний добуток ортів:

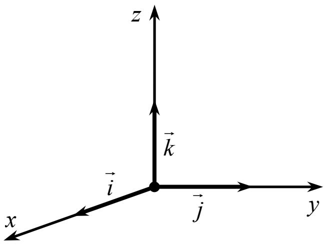


Рис. 6.2

$$\left[\vec{i}\vec{i}\right]=\left[\vec{i}\right]^2=0,\qquad \left[\vec{i}\,\vec{j}\right]=\vec{k},$$
$$\left[\vec{i}\vec{k}\right]=-\vec{j},\qquad \left[\vec{j}\vec{i}\right]=-\vec{k},$$
$$\left[\vec{j}\,\vec{j}\right]=\left[\vec{j}\right]^2=0,\qquad \left[\vec{j}\vec{k}\right]=\vec{i},$$
$$\left[\vec{k}\,\vec{i}\right]=\vec{j},\qquad \left[\vec{k}\,\vec{j}\right]=-\vec{i},$$
$$\left[\vec{k}\vec{k}\right]=\left[\vec{k}\right]^2=0.$$

Підставляючи ці значення у вираз $\vec{a}\times\vec{b}$, дістанемо:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(Y_1Z_2-Z_1Y_2)\vec{i}-(X_1Z_2-Z_1X_2)\vec{j}+(X_1Y_2-Y_1X_2)\vec{k}.$$

Цей результат можна записати за допомогою визначника третього порядку:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}X_1 & Z_1\\ X_2 & Z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}\vec{k}.$$

6.3. Застосування векторного добутку. Момент сили відносно точки

Нехай у деякій точці B прикладено силу $\vec{F}$. Моментом сили $\vec{F}(X_2,Y_2,Z_2)$, прикладеної в точці B відносно довільної точки A (рис. 6.3), називається вектор, який дорівнює векторному добутку радіус-вектора $\vec{r_B}=\overrightarrow{AB}\{X_1,\ Y_1,Z_1\}$ на вектор сили $\vec{F}$:

$$\overrightarrow{M_A}(\vec{F})=\vec{r_B}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}.$$

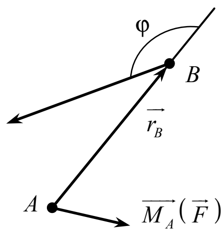


Рис. 6.3

Приклад Сила $\vec{F}\{1;3;2\}$ прикладена в точці $B(3;4;5)$. Знайти момент сили $\vec{F}$ відносно точки $A(1;2;3)$.

Розв'язання. $\vec{r_B}=\overrightarrow{AB}\{2,\ 2,\ 2\}$. Тоді:

$$\overrightarrow{M_A}(\vec{F})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}=-2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}.$$

Зауваження. Векторний добуток може бути використаний для обчислення моменту сил, що діють на диполь, для обчислення сили, яка діє на провідник зі струмом у магнітному полі, в гіроскопічних ефектах і т. д.

Приклад Обчислити площу трикутника ABC з вершинами в точках $A(1;\ 0;\ 2), B(2;\ 1;\ 3),\ C(0;\ 1;\ 2)$.

Розв'язання. Побудуємо вектори $\overrightarrow{AB}\{1;\ 1;\ 1\}$ і $\overrightarrow{AC}\{-1;\ 1;\ 0\}$ (рис. 6.4).

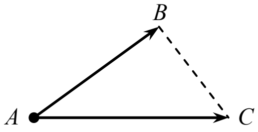


Рис. 6.4

Обчислимо векторний добуток $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}.$$

Довжина вектора векторного добутку чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах як на сторонах. Площа трикутника дорівнює половині площі відповідного паралелограма. Отже,

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\ \text{(кв.од.)}.$$

Приклад Обчислити синус кута A трикутника ABC з вершинами $A(1;\ 0;\ 2),\ B(2;\ 1;\ 3),\ C(0;\ 1;\ 2)$.

Розв'язання. Синус кута A трикутника ABC можна обчислити за формулою:

$$\sin A=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\times\left|\overrightarrow{AC}\right|}.$$

Кут A слід взяти гострим, якщо $BC^2<AB^2+AC^2$, і тупим, якщо $BC^2>AB^2+AC^2$. Ці нерівності безпосередньо випливають з теореми косинусів.

Отже, $\overrightarrow{AB}\{1;1;1\}$, $\overrightarrow{AC}\{-1;1;0\}$, $\overrightarrow{BC}\{-2;0;0\}$, тоді $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=3$; $\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=2$; $\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=5$. У нашому випадку $\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$, отже, кут $A=90°$.

До цього висновку можна дійти, якщо обчислити скалярний добуток вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$, який у нашому випадку дорівнює нулю.

6.4. Мішаний добуток трьох векторів

З'ясуємо, що можна сказати про добуток трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ з урахуванням того, що нам відомо скалярний і векторний добутки двох векторів.

Можливі випадки:

1. Якщо вектор $\vec{a}$ помножити на вектор $\vec{b}$ скалярно, а результат потім помножити на вектор $\vec{c}$, то здобудемо вектор, колінеарний вектору $\vec{c}$.

2. Якщо вектор $\vec{a}$ помножити на вектор $\vec{b}$ векторно, а одержаний вектор помножити на вектор $\vec{c}$ скалярно, то дістанемо скаляр.

3. Якщо вектор $\vec{a}$ помножити на вектор $\vec{b}$ векторно, а одержаний вектор помножити на вектор $\vec{c}$ векторно, то здобудемо вектор.

У випадку 2 дістанемо векторно-скалярний добуток, а у випадку 3 — подвійний векторний добуток. Предметом нашого вивчення буде векторно-скалярний добуток.

Векторно-скалярним добутком, або *мішаним добутком* трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називають скалярну величину, яка одержується в результаті скалярного множення векторного добутку двох векторів, наприклад $\vec{a}$ і $\vec{b}$, на третій вектор $\vec{c}$.

Векторно-скалярний, або мішаний добуток позначається:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}=\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\vec{c}=\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}.$$

Нижче буде показано, що результат не залежить від того, які вектори, що стоять поряд, перемножуються векторно:

$$\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\vec{c}=\vec{a}\left[\vec{b}\,\vec{c}\right]=\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}.$$

6.5. Геометричний зміст мішаного добутку

Нехай зведені до спільного початку некомлапанарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку (рис. 6.5).

Нехай $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{e}$, тоді, за визначенням векторного добутку, $\left|\vec{e}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi=$ $=S_{\text{пар}}$, тобто площі паралелограма, по-

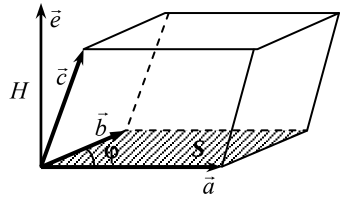


Рис. 6.5

будованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах. Скалярний добуток вектора $\vec{e}$ на вектор $\vec{c}$ можна записати так: $\vec{e}\,\vec{c} = |\vec{e}|\,\text{пр}_{\vec{e}}\vec{c}$. Проекція вектора $\vec{c}$ на напрям вектора $\vec{e}$ буде висотою паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ як на ребрах: $\text{пр}_{\vec{e}}\vec{c} = H$.

Отже, $|\vec{e}|\,\text{пр}_{\vec{e}}\vec{c} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi H = S_{\text{пар}}H = V_{\text{пар}}$.

Таким чином, мішаний добуток трьох векторів, якщо вони утворюють праву трійку векторів, дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах як на ребрах. Узагальнюючи зроблений висновок, можна сформулювати теорему:

Теорема Мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ є число, абсолютна величина якого виражає об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ як на ребрах. Знак добутку додатний, якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву систему, і від'ємний у протилежному випадку.

Із теореми випливає, що абсолютна величина добутку $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ залишається тією самою за будь-якого порядку множників.

Здобутим результатом $|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = V_{\text{пар}}$ можна скористатися для обчислення об'єму піраміди:

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot H = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S_{\text{пар}}\cdot H = \frac{1}{6}V_{\text{пар}}.$$

6.6. Мішаний добуток у координатній формі

Нехай вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ задано в координатній формі: $\vec{a}\{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\vec{b}\{X_2, Y_2, Z_2\}$, $\vec{c}\{X_3, Y_3, Z_3\}$. За відомою формулою обчислимо:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{e}, \quad \text{де} \quad \vec{e} = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Далі знайдемо:

$$\vec{e}\,\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} = X_3\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} - Y_3\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} + Z_3\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}.$$

Ліва частина цієї рівності є розкладанням визначника $\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$ за елементами третього рядка.

Отже, маємо $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$.

Приклад Обчислити об'єм трикутної піраміди, вершини якої знаходяться в точках $A(-7;\ -11;\ 1)$, $B(-4;\ -7;\ 3)$, $C(-1;\ -2;\ -4)$, $D(1;\ -1;\ 1)$ (рис. 6.6).

Розв'язання. Побудуємо вектори $\overrightarrow{AB}\{3;\ 4;\ 2\}$, $\overrightarrow{AC}\{6;\ 9;\ -5\}$, $\overrightarrow{AD}\{8;\ 10;\ 0\}$.

Скористаємося співвідношенням $V_{\text{пір}} = \frac{1}{6}V_{\text{пар}}$, але

$$V_{\text{пар}} = \left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right| = \left\|\begin{matrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 9 & -5 \\ 8 & 10 & 0 \end{matrix}\right\| = |-34| = 34.$$

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{6}\cdot 34 = 5\frac{2}{3} \text{ (куб. од.)}$$

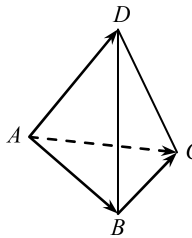


Рис. 6.6

6.7. Умова компланарності трьох векторів

Мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ дорівнює нулю, якщо:

1) серед векторів-співмножників є принаймні один нуль-вектор;
2) серед векторів-співмножників два вектори колінеарні;
3) всі три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — компланарні.

Випадки 1 і 2 можна звести до випадку 3:

а) якщо один із векторів є нуль-вектором, то він може належати будь-якій площині і зокрема тій, де лежать два ненульові вектори;

б) якщо два вектори колінеарні, то паралельним перенесенням їх можна розташувати на одній прямій, а якщо так, то через цю пряму і третій вектор можна провести площину, тому дані вектори — компланарні.

Зауваження. У випадку, коли одержана пряма і напрям вектора є мимобіжними, то за допомогою паралельного перенесення можна домогтися їх перетину.

Доведемо рівність нулю мішаного добутку для випадку 3, коли три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні. У цьому випадку векторний добуток двох довільних векторів цієї трійки буде вектор, перпендикулярний площині, в якій лежать вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Переходячи до обчислення скалярного добутку цього вектора на третій незалежний вектор, будемо мати добуток двох взаємно перпендикулярних векторів, а отже, він дорівнюватиме нулю. Висновком розглянутих випадків є теорема.

Теорема Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є рівність нулеві їх мішаного добутку.

Приклад Перевірити компланарність векторів $\vec{a}\{1;\ 2;\ 3\}$, $\vec{b}\{2;\ -3;\ -4\}$, $\vec{c}\{0;\ -7;\ -10\}$.

Розв'язання. Обчислимо мішаний добуток даних векторів:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 0 & -7 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, вектори компланарні.

Зауваження. Використовуючи основні властивості визначників, можна довести теорему.

Теорема Кругова перестановка множників мішаного добутку не змінює його величини. Перестановка двох сусідніх множників міняє знак добутку на протилежний:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}.$$

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення векторного добутку двох векторів.

2. Чому довжина вектора $\vec{c}$ векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах?

3. Сформулюйте геометричні властивості векторного добутку.

4. Сформулюйте алгебричні властивості векторного добутку.

5. Запишіть формулу обчислення векторного добутку, якщо вектори задано в координатній формі.

6. Як може бути використаний векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ для обчислення:

— площі паралелограма, побудованого на даних векторах як на сторонах?

— площі трикутника, дві сторони якого збігаються з даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

7. У якому випадку добуток трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається векторно-скалярним? Як позначається векторно-скалярний добуток?

8. Який геометричний зміст векторно-скалярного добутку?

9. За якою формулою обчислюється векторно-скалярний добуток векторів, коли вони задані в координатній формі?

10. У якому випадку векторно-скалярний добуток є додатним числом, а в якому — від'ємним?

11. Як виражається необхідна і достатня умови компланарності трьох векторів через їх векторно-скалярний добуток?

12. Що таке кругова перестановка векторів і як вона впливає на величину векторно-скалярного добутку?

13. За якою формулою обчислюється об'єм трикутної піраміди, три ребра якої збігаються з трьома векторами зі спільним початком?

ПІДМОДУЛЬ 7
Пряма лінія на площині

7.1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії

До найпростіших задач аналітичної геометрії належать такі:

1. Обчислити відстань між двома точками, якщо відомі їх координати.

2. Обчислити координати точки, яка ділить даний відрізок у співвідношенні λ, якщо відомі координати кінців цього відрізка.

3. Обчислити площу трикутника, якщо відомі координати його вершин.

Приклад Дано точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$. Обчислити відстань між точками A і B (рис. 7.1).

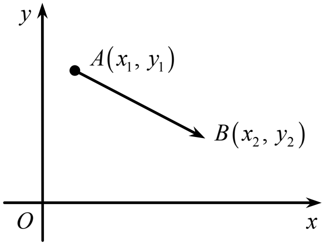


Рис. 7.1

Розв'язання. З'єднаємо точки A і B і побудуємо вектор $\overrightarrow{AB}$. Тоді вектор $\overrightarrow{AB}$ буде мати координати $\overrightarrow{AB}\{(x_2 - x_1), (y_2 - y_1)\}$. Далі довжину вектора $\overrightarrow{AB}$ обчислюємо за формулою:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Отже, відстань між точками A і B, тобто довжина відрізка AB, обчислюється за формулою:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Аналогічна формула має місце у випадку, коли точки задано в просторі: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, тоді:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Приклад Обчислити відстань між точками $A(1;\, 2;\, 3)$ і $B(6; 2;\, 6)$.

Розв'язання. Маємо:

$$AB = \sqrt{(5-1)^2 + (2-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{16+0+9} = \sqrt{25} = 5.$$

Приклад Обчислити координати точки, яка ділить даний відрізок у співвідношенні λ, якщо відомо координати кінців цього відрізка.

Розв'язання. Нехай початок відрізка точка A має координати $A(x_1, y_1, z_1)$, кінець — точка B має координати $B(x_2, y_2, z_2)$. Існує кілька методів розв'язування цієї задачі. Ми будемо розв'язувати її таким чином: нехай відрізок AB зображає собою довжину вектора $\overrightarrow{AB}$. Точка $M(x, y, z)$, яка ділить відрізок у співвідношенні λ, може бути розташована на відрізку або його продовженні (рис. 7.2).

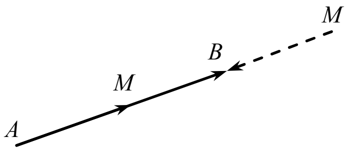


Рис. 7.2

Вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MB}$ колінеарні, а тому $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \lambda$. У випадку, коли точка M знаходиться на відрізку AB, тобто ділить відрізок AB внутрішнім чином, вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MB}$ співспрямовані, тоді $\lambda > 0$. У випадку, коли точка M знаходиться на продовженні відрізка $\overrightarrow{AB}$, тобто ділить відрізок AB зовнішнім чином, вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{BM}$ протилежно спрямовані, тоді $\lambda < 0$. Вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MB}$ будуть мати відповідно координати: $\overrightarrow{AM}\{x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1\}$, $\overrightarrow{MB}\{x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z\}$. Із колінеарності цих векторів випливає пропорційність їх відповідних координат:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda, \qquad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda, \qquad \frac{z - z_1}{z_2 - z} = \lambda.$$

Одержані співвідношення розв’яжемо відносно x, y, z:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda \Leftrightarrow x - x_1 \Leftrightarrow \lambda(x_2 - x) \Leftrightarrow x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2 \Leftrightarrow x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Формули для y і z мають вигляд: $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$, $z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$.

Координати точки $M(x, y, z)$, яка ділить даний відрізок AB у співвідношенні λ, обчислюються за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Одержані формули мають сенс, якщо $\lambda \neq -1$. Із цих формул легко отримати формули для обчислення координат середини відрізка, в цьому випадку $\lambda = 1$ і формули матимуть вигляд:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Отже, координати середини відрізка є середніми арифметичними відповідних координат його кінців.

Приклад Знайти координати точки перетину медіан трикутника, якщо відомі координати його вершин.

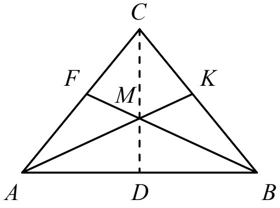


Рис. 7.3

Розв'язання. Нехай маємо трикутник ABC (рис. 7.3), у якого $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, AK, CD, BF — медіани трикутника, а точка $M(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ — точка їх перетину.

Знайдемо координати точки D середини відрізка AB:

$$x_D = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_D = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_D = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Точка M, в якій перетинаються медіани трикутника, ділить відрізок CD у співвідношенні 2 : 1 від точки C, тоді $\frac{CM}{MD} = 2$ і $\lambda = 2$.

Координати точки M обчислюються за відомими формулами:

$$\bar{x} = \frac{x_3 + 2x_D}{1+2}; \quad \bar{y} = \frac{y_3 + 2y_D}{1+2}; \quad \bar{z} = \frac{z_3 + 2z_D}{1+2}.$$

Зупинимося детальніше на обчисленні $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{x_3 + 2\frac{x_1 + x_2}{2}}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

Аналогічно:

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \ \bar{z} = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Координати точки перетину медіан трикутника є середніми арифметичними відповідних координат його вершин. Точка перетину медіан трикутника є центром ваги трикутної пластинки, тобто двовимірного трикутника, який не збігається з центром каркасного трикутника.

Приклад Обчислити площу трикутника, якщо відомі координати його вершин.

Розв'язання. Нехай маємо трикутник ABC (рис. 7.4), у якого вершини мають координати: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$. Необхідно виразити площу трикутника ABC через координати його вершин.

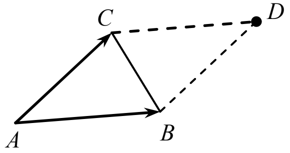


Рис. 7.4

Існує кілька методів розв'язування цієї задачі. Ми будемо її розв'язувати за допомогою векторів. Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ матимуть координати: $\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, $\overrightarrow{AC}\{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$. Відомо, що модуль векторного добутку векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ чисельно дорівнює площі паралелограма $ABCD$, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ як на сторонах. Площа трикутника ABC дорівнює половині площі цього паралелограма.

Скористаємося формулами обчислення векторного добутку векторів та обчислення довжини вектора.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Тоді

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}.$$

Зауваження. У частинному випадку, коли трикутник ABC знаходиться на площині xOy, тобто $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, для обчислення його площі користуються формулою:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)\right|$$

або, переходячи до визначника другого порядку, дістанемо формулу:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{matrix}\right\|.$$

У наведеній формулі слід відрізняти знак модуля від знака визначника.

Приклад Обчислити площу трикутника ABC за відомими координатами його вершин $A(1;1)$, $B(6;4)$, $C(8;2)$.

Розв'язання. Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ матимуть координати: $\overrightarrow{AB}\{5;3\}$, $\overrightarrow{AC}\{7;1\}$. Обчислимо векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 3 & 0\\ 7 & 1 & 0\end{vmatrix}=-16\vec{k}.$$

Тоді $$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{16^2}=8 \text{ (кв. од.).}$$

Аналогічний результат матимемо, якщо скористаємося формулою обчислення площі трикутника, коли його вершини лежать у площині xOy:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}-7 & -1\\ -2 & 2\end{matrix}\right\|=8 \text{ (кв. од.).}$$

7.2. Різні рівняння прямої лінії на площині

Рівняння $F(x,y)=0$ називається *рівнянням лінії* L у даній системі координат, якщо координати x і y довільної точки площини задовольняють дане рівняння, коли точка належить цій лінії, і не задовольняють, коли точка не належить лінії.

Наведене означення дає основу методам аналітичної геометрії, суть яких полягає в такому: лінії, які розглядаються, досліджуються за допомогою аналізу їх рівнянь.

Розглянемо декілька простіших прикладів:

а) $x-y=0$ — рівняння бісектриси I і III координатних кутів;

б) $x+y=0$ — рівняння бісектриси II і IV координатних кутів;

в) $x^2-y^2=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)=0$ — це рівняння визначає геометричне місце точок бісектрис координатних кутів;

г) $x^2+y^2=0$ — це рівняння визначає лише одну точку з координатами $x=0,\ y=0,$ тобто початок координат;

д) $x^2+y^2+1=0$ — немає жодної точки, координати якої задовольняють дане рівняння, отже, ніякого геометричного образу на площині дане рівняння не визначає.

Спочатку вивчимо рівняння ліній, які містять x і y в першому степені. Такі лінії мають загальну назву *прямих ліній на площині*.

Зупинимося на окремих випадках рівнянь прямих ліній на площині.

Пряма лінія з кутовим коефіцієнтом

Нехай дано пряму l (рис. 7.5), яка утворює з віссю Ox кут φ і перетинає вісь Oy в точці $B(0; b)$. Точка $M(x, y)$, що належить прямій l, має змінні координати x і y. Змінні координати цієї точки мають задовольняти рівняння прямої l.

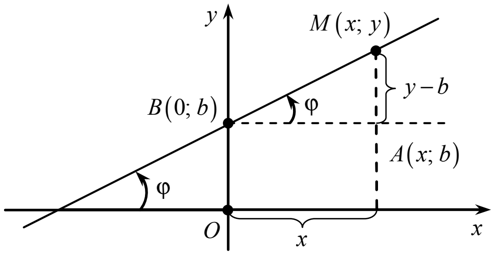


Рис. 7.5

Тангенс кута φ нахилу прямої до осі Ox називається *кутовим коефіцієнтом* цієї прямої. Позначається: $\operatorname{tg}\varphi = k$.

Із ΔAMB (рис. 7.5) маємо:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AM}{AB}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y-b}{x}; \quad k = \frac{y-b}{x},$$

якщо $x \neq 0$. Далі дістаємо рівняння:

$$y = kx + b. \tag{7.1}$$

Рівняння (7.1) називається *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*.

Кожна пряма, яка не перпендикулярна осі Ox, може бути записана рівнянням (7.1). Якщо пряма проходить через початок координат, то її рівняння матиме вигляд $y = kx$ (рис. 7.6).

Якщо пряма паралельна осі Ox, то її рівняння буде мати вигляд $y = b$ (рис. 7.7).

Якщо пряма паралельна осі Oy, то її рівняння матиме вигляд $x = a$ (рис. 7.8).

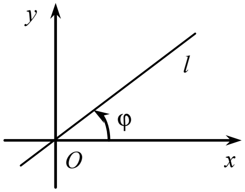


Рис. 7.6

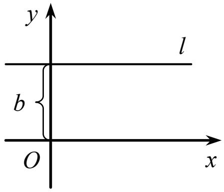


Рис. 7.7

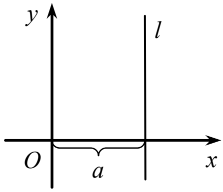


Рис. 7.8

Рівняння осі Ox матиме вигляд: $y=0$, рівняння осі Oy — $x=0$.

Рівняння прямої, що проходить через дану точку в даному напрямі

Нехай пряма l визначається точкою $M_1(x_1,\ y_1)$ і напрямом, який задається кутом нахилу φ, або кутовим коефіцієнтом $k=\operatorname{tg}\varphi$ (рис. 7.9).

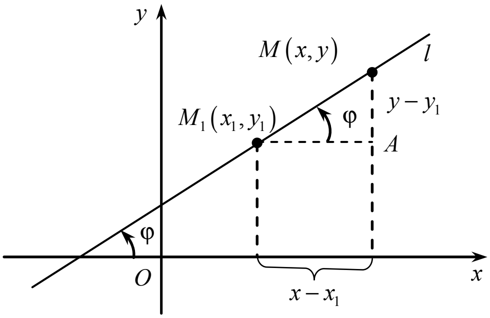


Рис. 7.9

Візьмемо на прямій l змінну точку $M(x,\ y)$ і виконаємо побудову згідно з рис. 7.9.

Із ΔAMM_1 маємо: $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{AM}{AM_1}=\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=k$, звідси дістаємо:

$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{7.2}$$

Рівняння (7.2) називається *рівнянням прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямі*.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ належать прямій l (рис. 7.10).

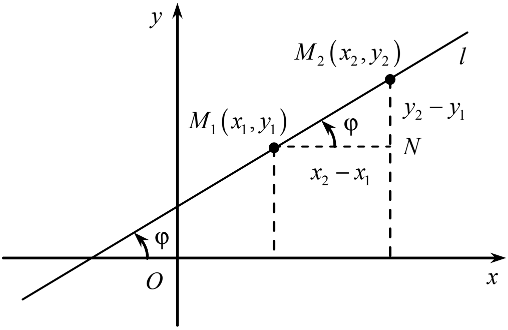


Рис. 7.10

Виконуємо побудову за рис. 7.10 і позначимо кут нахилу прямої l через φ.

Із ΔM_1NM_2 маємо:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{NM_2}{M_1N} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k.$$

Підставимо значення кутового коефіцієнта в рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$ в даному напрямі:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Поділивши обидві частини здобутого рівняння на $y_2 - y_1$ $(y_2 \neq y_1)$, дістанемо рівняння:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (7.3)$$

Рівняння (7.3) називається *рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки*.

Приклад Записати рівняння прямої, яка проходить через точки $A(-1;2)$ і $B(2;1)$.

Розв'язання. З рівняння (7.3), підставивши в ньому $x_1 = -1$, $y_1 = 2$, $x_2 = 2$, $y_2 = 1$, дістанемо:

$$\frac{y-2}{1-2} = \frac{x+1}{2+1} \Leftrightarrow \frac{y-2}{-1} = \frac{x+1}{3}.$$

Після відповідних спрощень одержуємо рівняння шуканої прямої у вигляді $x + 3y - 5 = 0$.

Загальне рівняння прямої

Теорема Рівняння $Ax + By + C = 0$ (A) визначає пряму лінію на площині.

Доведення. Якщо $A \neq 0$ і $B \neq 0$, то рівняння має ненульовий розв'язок, тобто існує точка $M_0\left(x_0, y_0\right)$ така, що

$$Ax_0 + By_0 + C = 0 \quad (B).$$

Віднімемо від рівняння (A) почленно рівняння (B), дістанемо рівняння:

$$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) = 0 \quad (C).$$

Рівняння (C) еквівалентне рівнянню (A). Доведемо, що рівняння (C) визначає пряму лінію. Пряму лінію можна задати точкою, що належить цій прямій, і вектором, перпендикулярним до цієї прямої. Нехай точка $M_0\left(x_0, y_0\right)$ належить прямій l, а вектор $\vec{n}\{A, B\}$ перпендикулярний даній прямій (рис. 7.11).

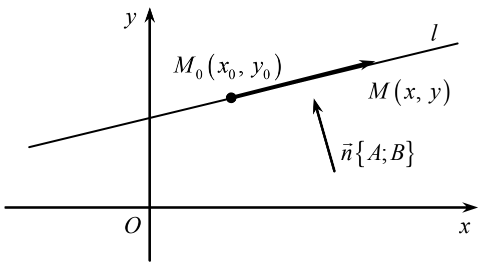


Рис. 7.11

Візьмемо на прямій l змінну точку $M(x, y)$ і побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M}\{x-x_0,\ y-y_0\}$. Справді, якщо точка $M_0(x_0, y_0)$ належить прямій l, то її координати задовольняють рівняння (C), а отже, вектори $\vec{n}\{A;\, B\}$ і $\overrightarrow{M_0M}\{x-x_0,\ y-y_0\}$ взаємно перпендикулярні. З перпендикулярності векторів $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ випливає:

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0 \Rightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)=0,$$

тобто дістали рівняння (C).

Якщо точка не належить прямій l, то її координати не задовольняють рівняння (C), а отже, вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ не перпендикулярні та їх скалярний добуток відмінний від нуля.

Таким чином, рівняння (C), а в силу еквівалентності і рівняння (A), будуть рівняннями прямої на площині.

Рівняння (A) називається загальним рівнянням прямої на площині:

$$Ax+By+C=0. \tag{7.4}$$

Зауваження. Вектор $\vec{n}\{A;\, B\}$ називається нормальним вектором прямої $Ax+By+C=0$.

Дослідження загального рівняння прямої

Загальне рівняння прямої має вигляд (7.4). Дослідимо розташування прямої лінії щодо координатних осей, коли один або два коефіцієнти рівняння (7.4) дорівнюють нулю:

а) $C=0$, тоді $Ax+By=0$ — рівняння прямої, яка проходить через початок координат;

б) $A=0$, тоді $By+C=0 \Rightarrow y=-\dfrac{C}{B}$ — рівняння прямої, паралельної осі Ox;

в) $B=0$, тоді $Ax+C=0 \Rightarrow x=-\dfrac{C}{A}$ — рівняння прямої, паралельної осі Oy;

г) $C=0,\ B=0,\ A\neq 0$, тоді $Ax=0 \Rightarrow x=0$ — рівняння осі Oy (пряма збігається з віссю Oy);

д) $C=0,\ A=0,\ B\neq 0$, тоді $Ax=0 \Rightarrow x=0$ — рівняння осі Ox (пряма збігається з віссю Ox);

є) $A=0$, $B=0$, звідси випливає, що $C=0$, одержуємо тотожність $0x+0y+0=0$. У цьому випадку ми не маємо певної лінії.

Рівняння прямої у відрізках

Повна назва цього типу рівняння прямої така: рівняння прямої у відрізках, які вона відтинає на координатних осях. Розглянемо пряму l (рис. 7.12), яка не проходить через початок координат і перетинає осі координат.

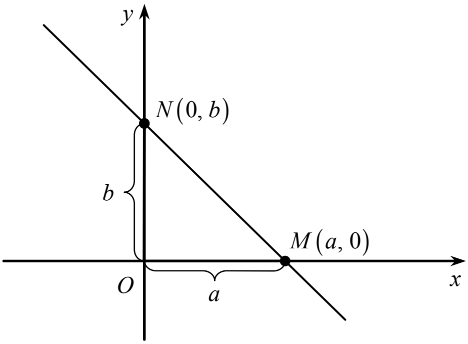


Рис. 7.12

Візьмемо рівняння цієї прямої в загальному вигляді: $Ax+By+$ $+C=0$.

Оскільки пряма перетинає координатні осі, то $A\neq 0, B\neq 0,$ й оскільки вона не проходить через початок координат, то $C\neq 0$.

Нехай пряма l перетинає вісь Ox у точці $M(a;0)$, вісь Oy — у точці $N(0;b)$.

Точки $M(a;0)$ і $N(0;b)$ належать прямій, отже, координати цих точок задовольняють рівняння (7.4). Звідки маємо: $Aa+C=0$, $A=-\dfrac{C}{a}$; $Bb+C=0$, $B=-\dfrac{C}{в}$. Підставляючи значення A і B у рівняння (7.4), дістаємо:

$$-\frac{C}{a}x-\frac{C}{b}y+C=0.$$

Поділимо обидві частини здобутого рівняння на $-C\neq 0$, після цього матимемо рівняння:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{7.5}$$

Рівняння (7.5) називається рівнянням прямої у відрізках.

Приклад Загальне рівняння прямої $2x+4y-1=0$. Записати у вигляді рівняння прямої у відрізках.

Розв'язання. Нехай точки $M(a;0)$ і $N(0;b)$ є відповідно точками перетину прямої з координатними осями Ox і Oy. Для обчислення координат a і b цих точок підставимо координати точок у рівняння прямої.

Маємо:

$$2a-1=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2}; \qquad 4b-1=0 \Rightarrow b=\frac{1}{4}.$$

Підставивши значення a і b в рівняння (7.5), дістанемо рівняння прямої у відрізках:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{\frac{1}{4}}=1.$$

Канонічне рівняння прямої

Нами було доведено, що пряма, яка визначається загальним рівнянням $Ax+By+C=0$, ортогональна до вектора $\vec{n}\{A;\ B\}$, який називається *нормальним* вектором прямої. Довільний ненульовий вектор, який колінеарний даній прямій, називається напрямним вектором цієї прямої.

Приклад Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(x_1,\ y_1)$ і має напрямний вектор $\vec{q}\{l;\ m\}$ (рис. 7.13).

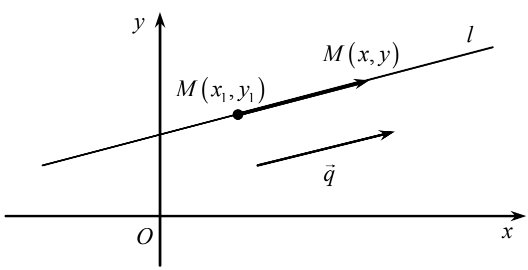


Рис. 7.13

Розв'язання. Візьмемо на прямій l змінну точку $M(x;\ y)$ і побудуємо вектор $\overrightarrow{M_1M}$. Вектор $\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1;\ y-y_1\}$ буде колінеарним напрямному вектору $\vec{q}\{l;\ m\}$, тому їх відповідні проекції пропорційні. З пропорційності їх проекцій дістаємо рівняння:

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}. \tag{7.6}$$

Рівняння (7.6) називається *канонічним* рівнянням прямої (канонічне означає типове, традиційне).

Приклад Записати канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $A(3;\ -2)$ і має напрямний вектор $\vec{q}\{5;\ 7\}$.

Розв'язання. Скористаємося рівнянням (7.6). У нашому випадку $x_1=3,\ y_1=-2,\ l=5,\ m=7.$ Підставляючи ці значення в рівняння (7.6), матимемо:

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{7}.$$

Параметричне рівняння прямої

Параметричне рівняння прямої одержується із канонічного рівняння прямої (7.6). Для цього в рівнянні (7.6) значення відношень позначають параметром t: $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=t.$

Далі записують систему: $\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{l}=t,\\[2mm] \dfrac{y-y_1}{m}=t.\end{cases}$

Якщо кожне рівняння здобутої системи розв'язати відповідно відносно x і y, то дістанемо:

$$\begin{cases}x=x_1+lt,\\ y=y_1+mt.\end{cases} \tag{7.7}$$

Рівняння (7.7) називається *параметричним* рівнянням прямої. Якщо t — час, то параметричне рівняння визначає закон руху матеріальної точки по прямій лінії з постійною швидкістю $v=\sqrt{l^2+m^2}$, тобто рух відбувається за інерцією.

Нормальне рівняння прямої

Нормальне рівняння прямої має вигляд:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \qquad (7.8)$$

Тут p — довжина перпендикуляра, який опущений з початку координат на цю пряму, α — кут, який цей перпендикуляр утворює з додатним напрямом осі Ox. Відраховується цей кут від осі Ox проти годинникової стрілки. $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ — координати одиничного вектора нормалі цієї прямої $\vec{n}\{\cos\alpha, \sin\alpha\}$. Для зведення загального рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ до нормального вигляду необхідно обидві частини його помножити на нормівний множник:

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (7.9)$$

Знак нормівного множника береться протилежний знаку вільного члена C загального рівняння прямої.

Приклад Загальне рівняння прямої $4x - 3y + 12 = 0$. Записати в нормальному вигляді.

Розв'язання. Щоб звести загальне рівняння прямої до нормального вигляду, обидві частини його слід помножити на нормівний множник (7.9). У нашому випадку вільний член у загальному рівнянні прямої дорівнює +12, отже, нормівний множник беремо зі знаком «мінус». Далі $A = 4$; $B = -3$, звідси

$$M = -\frac{1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = -\frac{1}{5}.$$

Помноживши на $-\frac{1}{5}$ обидві частини рівняння $4x - 3y + 12 = 0$, зведемо його до нормального вигляду й дістанемо:

$$-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{12}{5} = 0.$$

Зауваження. Необхідно запам'ятати, що в нормальному рівнянні прямої сума квадратів коефіцієнтів при змінних координатах повинна дорівнювати одиниці, а вільний член має бути від'ємним.

Приклад Чи буде дане рівняння прямої $-\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-3=0$ рівнянням прямої в нормальному вигляді?

Розв'язання. Перевіримо виконання вимог відносно рівняння прямої в нормальному вигляді:

а) сума квадратів коефіцієнтів при змінних координатах повинна дорівнювати одиниці, маємо $\left(-\frac{12}{13}\right)^2+\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}+\frac{25}{169}=1;$

б) вільний член повинен бути від'ємним, маємо $p=-3.$

Отже, дане рівняння є рівнянням прямої в нормальному вигляді.

7.3. Побудова прямої лінії за її рівнянням

Пряма визначена, якщо відомо дві точки, що належать їй. Для того, щоб побудувати пряму за її рівнянням, потрібно, користуючись цим рівнянням, знайти координати двох її точок. Необхідно пам'ятати, що якщо точка належить прямій, то координати цієї точки задовольняють рівняння прямої, тобто при підстановці їх у рівняння одержуємо правильну числову рівність.

1. Якщо пряма задана загальним рівнянням $Ax+By+C=0,$ $C\neq 0,$ то для її побудови простіше всього визначити точки перетину прямої з координатними осями.

Приклад Побудувати пряму $2x+y-6=0.$

Розв'язання. Пряма $2x+y-6=0$ перетинає вісь Ox в точці $A(3;0).$ Справді, взявши в цьому рівнянні $y=0,$ одержимо для визначення x рівняння $2x-6=0,$ звідки $x=3$. Взявши в рівнянні прямої $x=0,$ одержимо для визначення у рівнянні $y-6=0,$ звідки $y=6$. Отже, пряма перетинає вісь Oy в точці $B(0;6).$ За точками $A(3;0)$ і $B(0;6)$ будуємо пряму (рис. 7.14).

2. Якщо пряма задана рівнянням $Ax+By=0,$ $C=0,$ то дана пряма проходить через початок координат. Другу точку визначаємо, взявши, наприклад, $x=a.$ Тоді для визначення y одержимо рівняння $Aa+By=0,$ $y=\frac{-A\cdot a}{B}.$ Отже, пряма $Ax+By=0$ проходить через точки з координатами $(0;0)$ $\left(a;-\frac{Aa}{B}\right).$

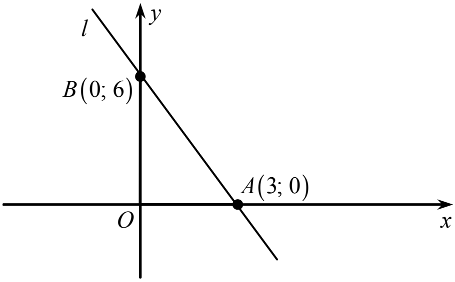


Рис. 7.14

Приклад Побудувати пряму $2x - 4y = 0$.

Розв'язання. Дана пряма проходить через початок координат, бо $C = 0$. Обчислюємо координати другої точки, для цього візьмемо $x = 2$. Тоді для визначення y одержуємо рівняння $2 \cdot 2 - y = 0 \Rightarrow y = 1$. Отже, пряма $2x - 4y = 0$ проходить через точки $O(0;\ 0)$ і $A(2;\ 1)$. За здобутими точками будуємо пряму (рис. 7.15).

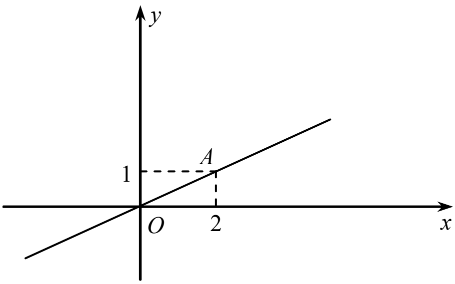


Рис. 7.15

3. Якщо пряму задано рівнянням $y = kx + b$ з кутовим коефіцієнтом, то з цього рівняння відома величина відрізка b, який відтинає пряма на осі ординат і для побудови прямої залишається визначити координати ще однієї точки.

Приклад Побудувати пряму $y = 3x + 2$.

Розв'язання. Пряму $y = 3x + 2$ задано рівнянням з кутовим коефіцієнтом. Із рівняння видно, що пряма відтинає на осі ординат відрізок, величина якого $b = 2$ (рис. 7.16). Отже, точка $A(0;\ 2)$ належить прямій. Знайдемо ще одну точку на цій прямій. Найкраще визначити точку перетину прямої з віссю Ox. Взявши в рівнянні $y = 0$, одержимо $0 = 3x + 2$, звідки $x = -\frac{2}{3}$. Точка перетину прямої з віссю Ox має координати $B\left(-\frac{2}{3};\ 0\right)$, а потім, з’єднавши їх, здобудемо пряму, що відповідає даному рівнянню (рис. 7.16).

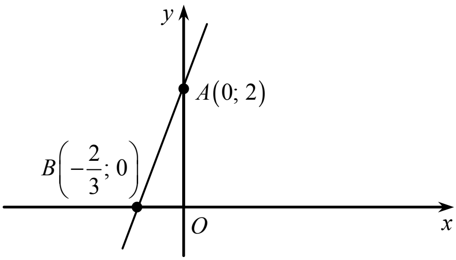


Рис. 7.16

7.4. Розміщення прямих на площині

а) Нехай прямі l_1 і l_2 задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами:

$$(l_1)\ \ y = k_1x + b_1; \quad (l_2)\ y = k_2x + b_2.$$

Тоді, відповідно, кутами їх нахилу будуть до осі Ox φ_1 і φ_2: $k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$ (рис. 7.17).

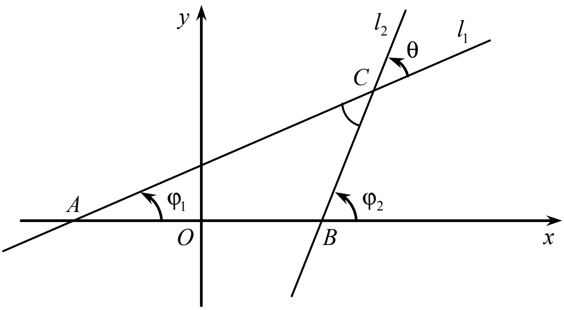


Рис. 7.17

Кутом між прямою l_1 і l_2 будемо називати той кут, на який потрібно повернути пряму l_1 проти годинникової стрілки, щоб вона збіглася (стала паралельною) з прямою l_2.

Оскільки при повороті на кут $\pi - \theta$ пряма займе початкове положення, то звідси випливає, що кут між двома прямими визначається неоднозначно. Одне зі значень цього кута можна завжди вибрати так, аби воно було невід'ємним і меншим π. На рис. 7.17 цей кут позначено θ: $\left(l_1 \wedge l_2\right) = \theta$.

Кут φ_2 буде зовнішнім кутом трикутника *ABC*. Із теореми, що зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх, які несуміжні з ним, дістаємо рівність: $\varphi_2 = \varphi_1 + \theta$, або $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$. Звідки $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}$, але $\operatorname{tg}\varphi_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\varphi_2 = k_2$, тоді

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{7.10}$$

Формула (7.10) визначає тангенс кута між двома прямими через їх кутові коефіцієнти.

Зауваження 1. Формула (7.10) визначає тангенс кута θ, який визначається обертанням навколо точки *C* прямої l_1 з кутовим коефіцієнтом k_1 проти годинникової стрілки до збігу з прямою l_2.

Із формули (7.10) легко здобути умови паралельності і перпендикулярності прямих l_1 і l_2:

- якщо $l_1 \parallel l_2$, то $k_1 = k_2$;
- якщо $l_1 \perp l_2$, то $k_1 k_2 = -1$.

Приклад Обчислити кут між прямими (l_1) $y = 2x - 3$ і (l_2) $y = -3x + 2$.

Розв'язання. У нашому випадку $k_1 = 2$, а $k_2 = -3$, за формулою (7.10) маємо:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-3 - 2}{1 + 2(-3)} = 1, \quad \operatorname{tg}\theta = 1.$$

Отже, кут між прямими $\left(l_1 \wedge l_2\right)$ дорівнює 45°.

б) Якщо прямі l_1 і l_2 задано загальними рівняннями: $(l_1)\ A_1x+B_1y+C_1=0$; $(l_2)\ A_2x+B_2y+C_2=0$, то кут між ними дорівнює куту між нормальними векторами прямих: $\overrightarrow{n_1}\{A_1;\ B_1\}$, $\overrightarrow{n_2}\{A_2;\ B_2\}$. За відомою формулою маємо:

$$\cos\left(\overrightarrow{n_1}\wedge\overrightarrow{n_2}\right)=\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \tag{7.11}$$

Згідно з формулою (7.11) умови паралельності і перпендикулярності прямих l_1 і l_2 будуть мати вигляд:

- якщо $l_1 \parallel l_2$, то $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$;
- якщо $l_1 \perp l_2$, то $A_1A_2+B_1B_2=0$.

Приклад Визначити взаємне розташування прямих $(l_1)\ x-y=$ $=0$, $(l_2)\ x+y-12=0$.

Розв'язання. Прямі задано загальними рівняннями, отже: $A_1=1$, $B_1=-1$, $A_2=1$, $B_2=1$. Перевіримо виконання умови перпендикулярності прямих: $A_1A_2+B_1B_2=0$, маємо: $1\cdot1+(-1)\cdot1=0$. Умова виконується, отже, дані прямі взаємно перпендикулярні.

в) Якщо прямі l_1 і l_2 задано канонічними рівняннями: $(l_1)\ \dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}$; $(l_2)\ \dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}$, то кут між ними визначається як кут між напрямними векторами цих прямих: $\overrightarrow{q_1}\{l_1,\ m_1\}$, $\overrightarrow{q_2}\{l_2,\ m_2\}$. За відомою формулою маємо:

$$\cos\left(\overrightarrow{q_1}\overrightarrow{q_2}\right)=\cos\theta=\frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2}}. \tag{7.12}$$

Згідно з формулою (7.12) умови паралельності і перпендикулярності прямих l_1 і l_2 будуть мати вигляд:

- якщо $l_1 \parallel l_2$, то $\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}$;
- якщо $l_1 \perp l_2$, то $l_1l_2+m_1m_2=0$.

Приклад Визначити взаємне розташування прямих $(l_1)\ \dfrac{x-5}{4}=$

$$=\frac{y+3}{6};\ \ (l_2)\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-7}{3}.$$

Розв'язання. Дані прямі задано канонічними рівняннями, тож $l_1=4,\ m_1=6,\ l_2=2,\ m_2=3.$ Перевіримо виконання умови паралельності прямих $\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}$, маємо $\dfrac{4}{2}=\dfrac{6}{3}=2.$ Умова виконується, отже, дані прямі паралельні.

7.5. Відстань від точки до прямої

Відстань точки $A(x_1,\ y_1)$ до прямої $Ax+By+C=0$ є довжина перпендикуляра, опущеного з цієї точки на пряму. Вона обчислюється за формулою:

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|. \tag{7.13}$$

Правило. Щоб обчислити *відстань від точки* $A(x_1,\ y_1)$ *до прямої* $Ax+By+C=0$, треба дане рівняння прямої звести до нормального вигляду, потім у ліву частину здобутого рівняння підставити замість змінних координат координати даної точки. Абсолютна величина одержаного числа і буде шуканою відстанню.

Приклад Обчислити відстань від точки $A(2;5)$ до прямої $6x+8y-5=0.$

Розв'язання. Згідно з наведеним правилом зведемо дане рівняння прямої до нормального вигляду. Обчислюємо нормівний множник:

$$M=\frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{1}{10}.$$

Рівняння прямої нормального вигляду запишеться так:

$$\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{1}{2}=0.$$

Далі в ліву частину цього рівняння $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{1}{2}$ підставимо координати даної точки. Абсолютна величина здобутого числа і дасть шукану відстань:

$$d=\left|\frac{3}{5}\cdot 5+\frac{4}{5}\cdot 5-\frac{1}{2}\right|=4,7.$$

Відстань від точки до прямої є величина завжди додатна. Крім відстані від точки до прямої розглядається ще й відхилення точки від прямої.

Відхилення δ *даної точки від даної прямої* є відстань цієї точки до прямої, взята зі знаком «плюс», коли точка і початок координат знаходяться по різні сторони від прямої, і зі знаком «мінус», якщо точка і початок координат знаходяться по одну сторону від прямої.

Висновок. Відстань від точки до прямої дорівнює абсолютній величині відхилення цієї точки від прямої: $d=|\delta|$.

Приклад Як розташовані відносно початку координат точка $B\left(\frac{1}{6};\frac{1}{4}\right)$ і пряма $6x+8y-5=0$?

Розв'язання. Рівняння даної прямої в нормальному вигляді запишеться так:

$$\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{1}{2}=0.$$

Далі в ліву частину цього рівняння підставимо координати даної точки. Здобуте число буде визначати відхилення даної точки від даної прямої

$$\delta=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{5}.$$

Відхилення є від'ємне число, отже, точка і початок координат знаходяться по одну сторону від прямої.

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення рівняння лінії на площині.
2. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт прямої?

3. Запишіть рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Який геометричний зміст у ньому мають коефіцієнти k і b?

4. Запишіть рівняння прямої, що проходить через дану точку в даному напрямі. Яким чином у даному рівнянні визначається напрям прямої?

5. Запишіть рівняння прямої, що проходить через дві дані точки. За якою формулою визначається кутовий коефіцієнт цієї прямої?

6. Запишіть загальне рівняння прямої. Які координати має нормальний вектор цієї прямої?

7. Запишіть рівняння прямої у відрізках. Який геометричний зміст мають коефіцієнти, що входять у це рівняння?

8. Запишіть канонічне рівняння прямої. Як визначаються координати напрямного вектора цієї прямої?

9. Запишіть параметричне рівняння прямої. Яке фізичне тлумачення має це рівняння, якщо параметр є час?

10. Нормальне рівняння прямої. Який геометричний зміст мають коефіцієнти, що входять у дане рівняння?

11. Запишіть формулу обчислення кута між двома прямими, якщо їх задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами. Як виражаються умови паралельності, перпендикулярності цих прямих?

12. Запишіть формулу обчислення кута між двома прямими, якщо їх задано рівняннями загального вигляду. Як виражаються умови паралельності, перпендикулярності цих прямих?

13. Запишіть формулу обчислення кута між двома прямими, якщо їх задано рівняннями канонічного виду. Як виражаються умови паралельності, перпендикулярності цих прямих?

14. Відстань точки до прямої. Наведіть правило обчислення відстані точки до прямої.

ПІДМОДУЛЬ 8
Площина

8.1. Різні рівняння площини

Загальне рівняння площини

Нехай площина α проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{N}\{A, B, C\}$ (рис. 8.1).

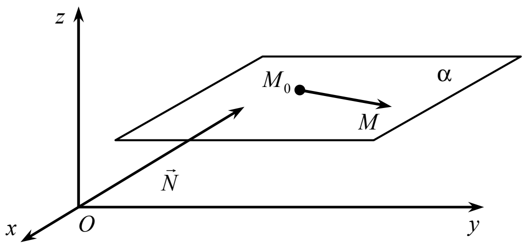


Рис. 8.1

Цими умовами визначається єдина площина в просторі $Oxyz$. Вектор $\vec{N}$ називається нормальним вектором площини α. Візьмемо в площині α довільну точку $M(x, y, z)$. Тоді вектор $\overrightarrow{M_0M}\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ буде перпендикулярним вектору $\vec{N}\{A; B; C\}$. Отже, скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю, тобто $\left(\vec{N}\overrightarrow{M_0M}\right) = 0$.

Одержане рівняння запишемо в координатній формі:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{8.1}$$

Рівняння (8.1) є рівнянням площини, перпендикулярної даному вектору $\vec{N}\{A; B; C\}$, котра проходить через дану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Зауваження. При довільних A, B, C рівняння (8.1) визначає деяку площину, що належить в'язці площин, які проходять через точку M_0. Через це його часто називають рівнянням в'язки площин.

Рівняння площини, записане у вигляді:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{8.2}$$

де $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, називається *загальним рівнянням площини*.

Можна довести, що будь-яке рівняння першого степеня з трьома змінними є рівнянням площини.

Неповні рівняння площини

Якщо в рівнянні (8.2) деякі з A, B, C, D дорівнюють нулю, то такі рівняння називаються *неповними рівняннями площини*. Особливість розташування площин, які задаються неповними рівняннями, в просторі $Oxyz$ визначається такими правилами:

Правило 1. Якщо $D=0$, то рівняння $Ax+By+Cz=0$ визначає площину, яка проходить через початок координат.

Приклад Площина, задана рівнянням $2x-3y+4z=0$ $\left(D=0\right)$, проходить через початок координат.

Правило 2. Якщо коефіцієнт при одній із координатних змінних дорівнює нулю, то площина паралельна відповідній координатній осі.

Приклад Площина, задана рівнянням $7y+4z-5=0$ $(A=0)$, паралельна осі Ox.

Правило 3. Якщо коефіцієнти при двох із координатних змінних дорівнюють нулю, то площина паралельна відповідній координатній площині.

Приклад Площина, задана рівнянням $2z-6=0$ $(A=0,\ B=0)$, паралельна координатній площині xOy.

Правило 4. Якщо коефіцієнт при одній із координатних змінних і $D=0$ дорівнює нулю, то площина проходить через відповідну координатну вісь.

Приклад Площина, задана рівнянням $3x+4y=0$ $(C=0,\ D=0)$, проходить через вісь Oz.

Правило 5. Якщо коефіцієнти при двох координатних змінних і $D=0$ дорівнюють нулю, то площина збігається з відповідною координатною площиною.

Приклад Площина, задана рівнянням $5z=0$, збігається з координатною площиною xOy.

Рівняння площини у відрізках

Рівняння площини у відрізках має вигляд:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{8.3}$$

До цього вигляду можна звести загальне рівняння площини (8.1) за допомогою нескладних перетворень:

$$\begin{aligned}&Ax+By+Cz+D=0,\\&Ax+By+Cz=-D,\\&Ax+By+Cz=-D \quad \Big|\div D\neq 0\\&\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1.\end{aligned}$$

Запишемо останнє рівняння так:

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{x}{-\frac{D}{C}}=1.$$

Введемо позначення: $a=-\frac{D}{A}$; $b=-\frac{D}{B}$; $c=-\frac{D}{C}$. Числа a, b, c дорівнюють відрізкам, які відтинає площина на координатних осях.

Справді, якщо точка A належить осі Ox, то її координатами будуть $(x_0, 0, 0)$ й дістаємо $Ax_0+D=0$, звідки $x_0=-\frac{D}{A}$, отже, $a=-\frac{D}{A}$.

Приклад Записати рівняння площини $x+2y-3z+6=0$ у вигляді рівняння площини у відрізках.

Розв'язання. Дане рівняння є загальним рівнянням площини. Обчислимо відрізки, які вона відтинає на координатних осях:

- на осі Ox, якщо $y=0$, $z=0$, то $x+6=0$, отже, $x=-6$ і $a=-6$;
- на осі Oy, якщо $x=0$, $z=0$, то $2y+6=0$, отже, $y=-3$ і $b=-3$;
- на осі Oz, якщо $x=0$, $y=0$, то $-3z+6=0$, отже, $z=2$ і $c=2$.

Рівняння площини у відрізках матиме вигляд: $\frac{x}{-6}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{2}=1.$

Рівняння площини, що проходить через три дані точки, які не лежать на одній прямій

Нехай маємо три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій (рис. 8.2).

Розглянемо вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$. Ці вектори неколінеарні, а тому змінна точка $M(x; y; z)$ лежить в одній площині з точками

M_1, M_2, M_3 тоді і лише тоді, коли вектори

$$\overrightarrow{M_1M_2}\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\};$$
$$\overrightarrow{M_1M_3}\{x_3-x_1;\ y_3-y_1;\ z_3-z_1\};$$
$$\overrightarrow{M_1M}\{x-x_1;\ y-y_1;\ z-z_1\}$$

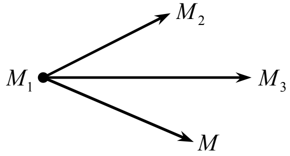


Рис. 8.2

будуть компланарними. Якщо вектори компланарні, то їх мішаний добуток дорівнює нулю: $\overrightarrow{M_1M_2}\ \overrightarrow{M_1M_3}\ \overrightarrow{M_1M}=0.$

Запишемо цю умову у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (8.4)$$

Рівняння (8.4) називається рівнянням площини, що проходить через три дані точки.

Приклад Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;\ 2;\ -1)$, $M_2(-1;\ 0;\ 4)$, $M_3(-2;\ -1;\ 1)$.

Розв'язання. На основі умови (8.4) рівняння шуканої площини можна записати у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -2 & -2 & 5 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Обчислимо цей визначник, розкриваючи його за елементами першого рядка: $11(x-1)-11(y-2)+0(z+1)=0.$

Розкриємо дужки, зведемо подібні члени і скоротимо на 11, після чого одержимо: $x-y+1=0.$ Це рівняння визначає площину, яка паралельна осі Oz.

Нормальне рівняння площини

Нормальне рівняння площини має вигляд:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0. \qquad (8.5)$$

У рівнянні (8.5) $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — координати одиничного нормального вектора, який опущено з початку координат на цю площину, кути α, β, γ — кути, які утворює цей вектор згідно з координатними осями, p — довжина нормального вектора цієї площини, проведеного з початку координат.

Для зведення загального рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$ до нормального вигляду необхідно його помножити на нормівний множник:

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{8.6}$$

Знак нормівного множника M береться протилежним знаку вільного члена D.

Приклад Знайти довжину перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину $10x + 15y - 6z - 380 = 0$, і косинуси кутів, утворені цим перпендикуляром з координатними осями.

Розв'язання. Приведемо рівняння площини до нормального вигляду. За формулою (8.6) знаходимо значення нормівного множника $M = \frac{1}{19}$. Обидві частини рівняння даної площини помножимо на $\frac{1}{19}$ й дістанемо рівняння площини в нормальному вигляді:

$$\frac{10}{19}x + \frac{15}{19}y - \frac{6}{19}z - 20 = 0,$$

з якого видно, що $p = 20$. Отже, довжина перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину, дорівнює 20. Косинуси кутів, утворених цим перпендикуляром з координатними осями, будуть:

$$\cos\alpha = \frac{10}{19}; \quad \cos\beta = \frac{15}{19}; \quad \cos\gamma = -\frac{6}{19}.$$

Контроль: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

8.2. Кут між двома площинами

Кут між двома площинами визначається як кут між нормальними векторами цих площин. Нехай площини задано загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, тоді нормальним вектором першої площини буде вектор $\overrightarrow{N_1}\{A_1, B_1, C_1\}$, а другої — $\overrightarrow{N_2}\{A_2, B_2, C_2\}$. Косинус кута між цими векторами, а отже, і між площинами, обчислюється за відомою формулою:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{8.7}$$

Умова перпендикулярності двох площин збігається з умовою перпендикулярності векторів $\overrightarrow{N_1}$ і $\overrightarrow{N_2}$ і має вигляд:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{8.8}$$

Умова паралельності двох площин збігається з умовою колінеарності векторів $\overrightarrow{N_1} \parallel \overrightarrow{N_2}$ і має вигляд:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{8.9}$$

Приклад Обчислити косинус кута між двома площинами: $5x - 3y + 4z - 4 = 0$, $3x - 4y - 2z + 5 = 0$.

Розв'язання. За формулою (8.7), якщо врахувати, що $A_1 = 5$; $B_1 = -3$; $C_1 = 4$, $A_2 = 3$; $B_2 = -4$; $C_2 = -2$, дістанемо:

$$\cos\varphi = \frac{15 + 12 - 8}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{29}} = \frac{19}{5\sqrt{58}}.$$

Отже, $\cos\varphi = \dfrac{19}{5\sqrt{58}}$.

8.3. Відстань від точки до площини

Відстань від точки $O(x_1, y_1, z_1)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ є довжина перпендикуляра, опущеного з цієї точки на площину. Вона обчислюється за формулою:

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + d}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|. \tag{8.10}$$

Правило. Щоб визначити відстань від точки $A(x_1, y_1, z_1)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$, треба дане рівняння площини привести до нормального вигляду, потім у ліву частину одержаного рівняння підставити замість змінних координат координати даної точки. Абсолютна величина здобутого числа і буде шуканою відстанню.

Приклад Обчислити відстань від точки $A(2;3;-1)$ до площини $7x-6y-6z+42=0$.

Розв'язання. Відстань від точки до площини обчислюємо за формулою (8.10), в якій $A=7$; $B=-6$; $C=-6$; $D=42$, $x_1=2$, $y_1=3$, $z_1=-1$. Отже, $d=4$.

Відстань від точки до прямої є величина завжди додатна. Крім відстані від точки до площини розглядається ще і відхилення точки від площини.

Відхилення δ даної точки від даної площини є відстань цієї точки до даної площини, взята зі знаком «плюс», коли точка і початок координат знаходяться по різні сторони від даної площини, і зі знаком «мінус», якщо точка і початок координат знаходяться по одну сторону від прямої.

Висновок. Відстань від точки до площини дорівнює абсолютній величині відхилення цієї точки від площини: $d=|\delta|$.

Питання для самоперевірки

1. Запишіть загальне рівняння площини і дайте геометричне пояснення коефіцієнтів при змінних у цьому рівнянні.

2. Вкажіть на особливості в розташуванні площин, які задані неповними рівняннями: а) $2x-5y-z=0$; б) $3y+5z-7=0$; в) $2x-14=0$; г) $7y+35=0$; д) $2x-4y+5=0$; е) $7x=0$; є) $4y=0$.

3. Запишіть рівняння площини у відрізках і дайте геометричне пояснення коефіцієнтів у цьому рівнянні.

4. За допомогою яких алгебричних перетворень із загального рівняння площини можна одержати рівняння площини у відрізках?

5. Запишіть рівняння площини, що проходить через три дані точки. Яка властивість компланарних векторів використовується для одержання цього рівняння?

6. Запишіть нормальне рівняння площини і дайте геометричне пояснення коефіцієнтів при змінних і вільному члену в цьому рівнянні.

7. Сформулюйте правило, за яким загальне рівняння площини зводиться до нормального вигляду.

8. Що називається відстанню від точки до площини і за яким правилом вона обчислюється?

9. Запишіть формулу косинуса кута між двома площинами. За допомогою яких міркувань із цієї формули одержуються умови паралельності, перпендикулярності двох площин?

ПІДМОДУЛЬ 9

Пряма в просторі. Взаємне розміщення прямої і площини

9.1. Різні рівняння прямої в просторі

Канонічне рівняння прямої в просторі

Пряму L в просторі можна визначити точкою $M_1(x_1; y_1; z_1)$, яка належить цій прямій, і напрямним вектором $\vec{q}\{l, m, n\}$ цієї прямої (рис. 9.1).

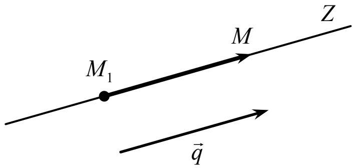


Рис. 9.1

Візьмемо на прямій L змінну точку $M(x; y; z)$ і побудуємо вектор $\overrightarrow{M_1M}$, який матиме проекції $\overrightarrow{M_1M}\{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$. Вектори $\overrightarrow{M_1M}$ і $\vec{q}$ — колінеарні, тому їх відповідні проекції пропорційні. Отже, маємо:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}. \tag{9.1}$$

Рівняння (9.1) є канонічним рівнянням прямої в просторі.

Зауваження. У випадку, коли у рівнянні (9.1) один із знаменників дорівнює нулю, відповідний чисельник теж дорівнює нулю.

Приклад Визначити положення прямої $\frac{x-4}{0} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{4}$.

Розв'язання. Дану пряму задано канонічним рівнянням (9.1). Оскільки $l = 0$, то $x - 4 = 0$. Отже, пряма перетинає вісь Ox у точці $x = 4$ і перпендикулярна до цієї осі.

Рівняння прямої, яка проходить через дві точки

Пряму L в просторі можна визначити двома точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$, що належать цій прямій (рис. 9.2).

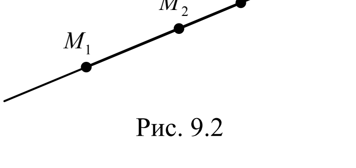


Рис. 9.2

Візьмемо на прямій L змінну точку $M(x; y; z)$ і побудуємо вектори

$$\overrightarrow{M_1M}\left\{x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1\right\},\quad \overrightarrow{M_1M_2}\left\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\right\}.$$

Вектори $\overrightarrow{M_1M}$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$ — колінеарні, а тому їх відповідні проекції пропорційні.

Отже, маємо:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{9.2}$$

Рівняння (9.2) є рівнянням прямої в просторі, яка проходить через дві точки.

Параметричне рівняння прямої

Якщо в рівнянні (9.2) значення відношень позначити параметром t:

$$\frac{x-x_1}{l}=t;\quad \frac{y-y_1}{m}=t;\quad \frac{z-z_1}{n}=t,$$

а потім розв'язати здобуті рівняння відносно x, y, z, то матимемо:

$$\begin{cases} x=x_1+lt,\\ y=y_1+mt,\\ z=z_1+nt. \end{cases} \tag{9.3}$$

Рівняння (9.3) називається параметричним рівнянням прямої.

Параметричне рівняння прямої зручно застосовувати в тих випадках, коли потрібно знайти точку перетину прямої і площини.

Приклад Дана пряма $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ і площина $2x+y+$ $+z-6=0$. Знайти точку їх перетину.

Розв'язання. Дану пряму задано канонічним рівнянням. Параметричне рівняння прямої, що відповідає даному канонічному, буде мати вигляд:

$$x=2+t;\ y=3+t;\ z=4+2t.$$

Підставивши ці вирази в ліву частину даного рівняння площини, приходимо до одного рівняння з одним невідомим:

$$2(2+t)+(3+t)+(4+2t)-6=0.$$

Розв'язавши це рівняння, знаходимо $t=-1$, а отже, координати шуканої точки будуть: $x=1$, $y=2$; $z=2$.

Рівняння прямої як лінії перетину двох площин

Пряма L може бути задана як лінія перетину двох площин (рис. 9.3):

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (\alpha_1), \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (\alpha_2). \end{cases} \tag{9.4}$$

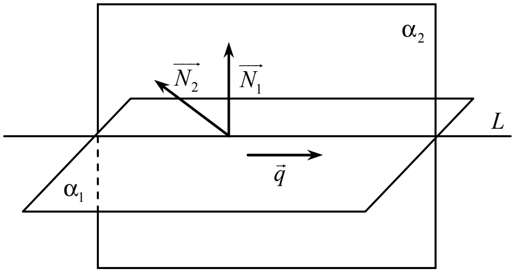


Рис. 9.3

Нормальні вектори цих площин матимуть координати $\overrightarrow{N_1}\{A_1, B_1, C_1\}$, $\overrightarrow{N_2}\{A_2, B_2, C_2\}$. Напрямний вектор $\vec{q}$ прямої L можна обчислити як векторний добуток векторів $\overrightarrow{N_1}$ і $\overrightarrow{N_2}$:

$$\vec{q} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \tag{9.5}$$

Для того, щоб від рівняння (9.4) перейти до канонічного рівняння прямої (9.2), необхідно знати, крім координат вектора $\vec{q}\{l; m; n\}$, ще й координати точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, яка належить цій прямій. Точку M_1 беруть як перетин даної прямої з однією із координатних площин:

- якщо з площиною xOy, то $z = 0$;
- якщо з площиною xOz, то $y = 0$;
- якщо з площиною yOz, то $x = 0$.

У будь-якому разі з рівняння (9.4) одержуємо систему двох рівнянь з двома невідомими, розв'язавши яку, одержимо координати точки M_1.

Приклад Звести рівняння прямої до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Дану пряму задано як лінію перетину двох площин. Канонічне рівняння прямої в просторі має вигляд: $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$. Напрямний вектор $\vec{q}$ цієї прямої обчислимо за формулою (9.5):

$$\vec{q} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -11\vec{i} + 17\vec{j} + 13\vec{k}.$$

За точку M_1 візьмемо точку перетину цієї прямої з площиною yOz, тоді $x = 0$. Дістаємо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} -y + 3z - 1 = 0, \\ 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, маємо $y_1 = 2$, $z_1 = 1$. Отже, точка M_1 матиме координати: $M_1(0;\,2;\,1)$ і канонічне рівняння прямої запишеться у вигляді:

$$\frac{x}{-11} = \frac{y - 2}{17} = \frac{z - 1}{13}.$$

9.2. Кут між двома прямими в просторі

Нехай прямі задано канонічними рівняннями:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \ (L_1), \qquad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2} \ (L_2).$$

Напрямними векторами цих прямих будуть вектори $\overrightarrow{q_1}\{l_1,\, m_1,\, n_1\}$, $\overrightarrow{q_2}\{l_2,\, m_2,\, n_2\}$.

Кут між прямими L_1 і L_2 визначається як кут між напрямними векторами цих прямих:

$$\cos\left(L_1 \wedge L_2\right) = \cos\left(\overrightarrow{q_1} \wedge \overrightarrow{q_2}\right) = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (9.6)$$

Із формули (9.6) одержуємо умови паралельності й перпендикулярності прямих L_1 і L_2:

- якщо $L_1 \perp L_2$, то $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$;
- якщо $L_1 \parallel L_2$, то $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$.

Приклад Знайти косинус гострого кута між прямими:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2}, \qquad \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{-2}.$$

Розв'язання. Кут між двома прямими визначається за формулою (9.6), в якій потрібно взяти $l_1 = 3, m_1 = -1, n_1 = 2, \quad l_2 = 2, \quad m_2 = 4,$ $n_2 = -2$.

Обчисливши формулу (9.6), дістанемо: $\cos\varphi = \dfrac{1}{2\sqrt{21}}$.

9.3. Пряма і площина в просторі

Умова належності двох прямих площині

Нехай прямі задано канонічними рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \ (L_1), \qquad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2} \ (L_2).$$

Пряма L_1 визначається точкою $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і напрямним вектором $\overrightarrow{q_1}\{l_1, m_1, n_1\}$. Пряма L_2 визначається точкою $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і напрямним вектором $\overrightarrow{q_2}\{l_2, m_2, n_2\}$.

Оскільки прямі L_1 і L_2 повинні належати площині, то точки M_1 і M_2 мають належати цій площині, а отже, й вектор $\overrightarrow{M_1M_2}\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ повинен належати площині. Вектори $\overrightarrow{q_1}$ і $\overrightarrow{q_2}$ паралельні площині, тож вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{q_1}$, $\overrightarrow{q_2}$ будуть компланарними, а тому їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}\,\overrightarrow{q_1}\,\overrightarrow{q_2}\right)=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (9.7)$$

Якщо величини $l_1,\ m_1, n_1$ непропорційні величинам $l_2,\ m_2, n_2,$ то співвідношення (9.7) є необхідною і достатньою умовою перетину двох прямих у просторі.

Кут між прямою і площиною

Нехай пряму задано канонічним рівнянням $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=$ $=\dfrac{z-z_1}{n},$ площину — рівнянням загального вигляду $Ax+By+Cz+$ $+D=0.$

Тоді напрямним вектором прямої буде вектор $\vec{q}\{l,\ m, n\},$ а нормальним вектором площини — вектор $\overrightarrow{N}\{A, B, C\}.$

Кутом φ *між прямою і площиною* називається будь-який із двох суміжних кутів, утворених прямою та її проекцією на цю площину (рис. 9.4).

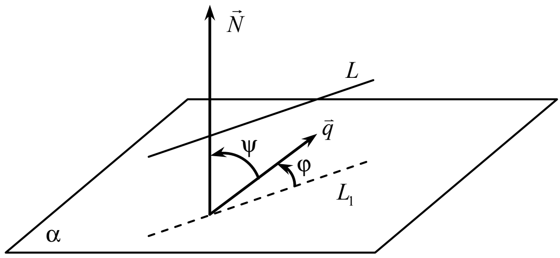


Рис. 9.4

Нехай кут ψ — кут між напрямним вектором прямої $\vec{q}$ і нормальним вектором площини $\overrightarrow{N},\ L_1$ — проекція прямої L на площину $\alpha.$ Можемо вважати, що $\varphi\le\dfrac{\pi}{2},$ оскільки синуси суміжних кутів рівні $\sin\varphi=\sin(180^\circ-\varphi).$ З рис. 9.4 видно, що $\psi+\varphi=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\psi=\dfrac{\pi}{2}-\varphi.$

Враховуючи ці зауваження, обчислюємо косинус кута ψ:

$$\cos\psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Остаточно

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (9.8)$$

За формулою (9.8) розраховується синус кута між прямою і площиною. В чисельнику стоїть знак модуля, бо $\sin\varphi \ge 0$.

Із формули (9.8) одержуємо умови паралельності і перпендикулярності прямої L і площини α:

- якщо $L \perp \alpha$, то $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$;
- якщо $L \parallel \alpha$, то $Al + Bm + Cn = 0$.

Умова належності прямої площині

Умова належності прямої $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ площині $Ax + By + Cz + D = 0$ виражається двома рівностями:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \\ Al + Bm + Cn = 0. \end{cases} \qquad (9.9)$$

Пряма визначається точкою $M_1(x_1,\, y_1,\, z_1)$ і напрямним вектором $\vec{q}\{l;\, m;\, n\}$.

З рівняння площини випливає, що її нормальний вектор $\vec{N}$ буде мати координати $\overrightarrow{N}\{A;\, B;\, C\}$. Перша рівність в умові (9.9) випливає з вимоги: якщо пряма належить площині, то і точка, яка належить цій прямій, теж належить площині. А якщо так, то координати точки M_1 повинні задовольняти рівняння площини: $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Вектори $\vec{q}$ і $\vec{N}$ взаємно перпендикулярні, а тому їх скалярний добуток дорівнює нулю: $Al + Bm + Cn = 0$.

Приклад Перевірити, що пряма $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{3}$ (L) лежить у площині $x + y - z - 6 = 0$ (α).

Розв'язання. В нашій умові $x_1 = 2$, $y_1 = 3$, $z_1 = -1$, $l = 2$, $m = 1$, $n = 3$, $A = 1$, $B = 1$, $C = -1$.

Перша і друга рівності умови (9.9) виконуються, а отже, пряма L лежить у площині α.

Питання для самоперевірки

1. Запишіть загальне рівняння площини і дайте геометричне пояснення коефіцієнтів при змінних у цьому рівнянні.
2. Запишіть рівняння в'язки площин.
3. Запишіть рівняння площини у відрізках і дайте геометричне пояснення коефіцієнтів у цьому рівнянні.
4. За допомогою яких алгебричних перетворень із загального рівняння площини можна одержати рівняння площини у відрізках?
5. Запишіть рівняння площини, що проходить через три дані точки. Яка властивість компланарних векторів використовується для одержання цього рівняння?
6. Запишіть нормальне рівняння площини і дайте геометричне пояснення коефіцієнтів при змінних і вільному члену в цьому рівнянні.
7. Сформулюйте правило, за яким загальне рівняння площини приводиться до нормального вигляду.
8. Що називається відстанню від точки до площини і за яким правилом вона обчислюється?
9. Що таке відхилення точки від площини? В якому випадку відхилення точки від площини дорівнює відстані точки до площини?
10. Запишіть формулу косинуса кута між двома площинами. Сформулюйте умови паралельності, перпендикулярності двох площин.
11. Запишіть канонічне рівняння прямої в просторі. Який геометричний зміст мають сталі, що входять у це рівняння?
12. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки.
13. Параметричне рівняння прямої в просторі. Як отримати параметричне рівняння прямої з її канонічного рівняння?
14. Рівняння прямої як лінії перетину двох площин. Як звести від рівняння прямої як лінії перетину двох площин до канонічного вигляду?
15. Запишіть формулу косинуса кута між двома прямими. Сформулюйте умови паралельності, перпендикулярності двох прямих.
16. Запишіть умову належності двох прямих площині. Запишіть необхідну і достатню умову перетину двох прямих.
17. Дайте визначення кута між прямою і площиною.
18. Запишіть формулу обчислення синуса кута між прямою і площиною. Сформулюйте умови паралельності, перпендикулярності прямої і площини.

ПІДМОДУЛЬ 10
Криві другого порядку

10.1. Елементарні властивості кривих другого порядку

Рівняння вигляду:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (10.1)$$

де принаймні один із коефіцієнтів A, B, C відмінний від нуля, називається *рівнянням другого степеня*.

Криві, які описуються рівняннями другого степеня, називаються *кривими другого порядку*. До кривих другого порядку належать: коло, еліпс, гіпербола, парабола.

Властивості кривих другого порядку можна вивчати через дослідження рівняння другого степеня (10.1). Ми будемо вивчати криві другого порядку як геометричні місця точок, які задовольняють певні властивості.

Множина точок, які мають певну властивість, серед якої немає жодної точки, що не має цієї властивості, називається *геометричним місцем точок.*

Розглянемо приклади застосування поняття геометричного місця точок в елементарній геометрії.

Приклад Геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін кута, називається бісектрисою цього кута.

Приклад Геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є перпендикуляр до цього відрізка, проведений через його середину.

10.2. Коло

Геометричне місце точок на площині, рівновіддалених від однієї точки O_1, називається *колом.*

Точка O_1 називається *центром кола*, а відстань від точок кола до центра називається *радіусом*.

Нехай дано коло радіуса R з центром у точці $O_1(a; b)$ (рис. 10.1). Знайдемо його рівняння.

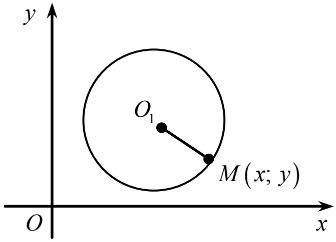


Рис. 10.1

Для довільної точки $M(x;\, y)$ кола виконується рівність $OM = R$. Використовуючи формулу відстані між двома точками, дістанемо: $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$ або після піднесення до квадрату одержимо рівносильне рівняння:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (10.2)$$

Отже, координати кожної точки кола $M(x,\, y)$ задовольняють рівняння (10.2). Неважко показати, що координати довільної точки, яка не лежить на колі, це рівняння не задовольняють.

Рівняння (10.2) називається *канонічним*, або *нормальним* рівнянням кола. Зокрема, рівняння кола з центром у початку координат $(a=0,\, b=0)$ має вигляд:

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (10.3)$$

З'ясуємо, за яких умов рівняння (10.1) буде рівнянням кола. З цією метою рівняння (10.3) запишемо у вигляді:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0. \qquad (10.4)$$

Якщо рівняння (10.4) зіставити з рівнянням (10.1), то дійдемо такого висновку.

Висновок. Щоб рівняння (10.1) було рівнянням кола, необхідно, щоб виконувалася рівність коефіцієнтів при x^2 і y^2 $(A=C)$, а коефіцієнт при xy дорівнював нулю $(B=0)$.

Приклад Звести до канонічного вигляду загальне рівняння кола

$$2x^2+2y^2-4x-2y-\frac{11}{2}=0.$$

Розв'язання. У даному рівнянні виконуються вимоги висновку $A = C = 2,\ B = 0.$ Поділимо обидві частини рівняння на 2. Згрупуємо члени, які містять тільки x або тільки $y,$ і доповнимо їх до повного квадрату. Одержимо рівняння: $(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 4.$

Здобуте рівняння є канонічним рівнянням кола, у якого центром є точка $O\left(1; -\frac{1}{2}\right),$ а радіус $R = 2.$

Рівняння дотичних до кола в точці $M_1(x_1,\ y_1)$ мають вигляд:

$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)=R^2, \qquad (10.5)$$

$$xx_1 + yy_1 = R^2, \qquad (10.6)$$

залежно від того, визначається коло рівнянням (10.2) або (10.3).

Приклад Дане коло $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25.$ Записати рівняння його дотичної в точці $A(5;\ 5).$

Розв'язання. Коло задано рівнянням (10.2), отже, рівняння дотичної матиме вигляд:

$$(x-1)(5-1)+(y-2)(5-2)=25.$$

Після перетворень одержуємо рівняння: $4x+3y-35=0.$

10.3. Еліпс

Еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней від яких до двох фіксованих точок $F_1,\ F_2$ (фокусів) є величина стала.

Для одержання канонічного рівняння еліпса його фокуси $F_1,\ F_2$ візьмемо на осі Ox і позначимо відстань $F_1F_2 = 2c,$ тоді $F_1(c;\ 0);$ $F_2(-c;\ 0)$ (рис. 10.2).

Нехай довільна точка $M(x,\ y)$ належить еліпсу. На основі означення еліпса маємо: $F_1M + F_2M$ дорівнює сталій величині. Позначимо цю сталу величину через $2a,$ тоді

$$F_1M + F_2M = 2a. \qquad (10.7)$$

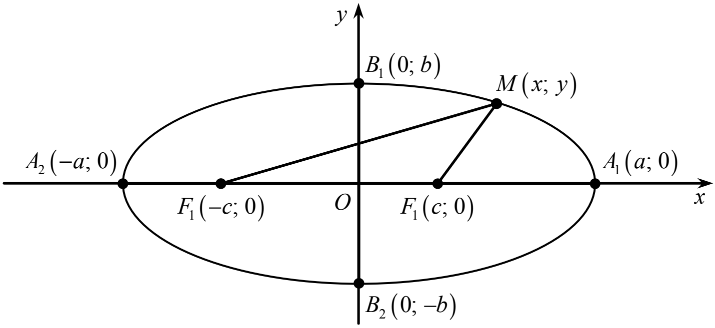


Рис. 10.2

З ΔF_1MF_2 за відомою теоремою про співвідношення між сторонами трикутника одержуємо нерівність:

$$F_1M + F_2M > F_1F_2 \Rightarrow 2a > 2c \Rightarrow a > c.$$

З рівності (10.7), використовуючи формулу відстані між двома точками, дістаємо рівність:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

В останній рівності, після двократного піднесення до квадрату, звільняємося від радикалів. Виконавши відповідні алгебричні перетворення, отримаємо:

$$x^2\left(a^2 - c^2\right) + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right).$$

Введемо позначення $a^2 - c^2 = b^2$, алгебрична обґрунтованість якого випливає з нерівностей $a > c \Rightarrow a^2 - c^2 > 0$. Геометричний зміст величин a і b буде дано нижче. З величиною b рівність матиме вигляд:

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Поділивши ліву і праву частини рівності на a^2b^2, здобудемо рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (10.8)$$

Рівняння (10.8) називається *канонічним* рівнянням еліпса.

Точки перетину еліпса з координатними осями називаються вершинами еліпса. Вершини еліпса мають координати (рис. 10.2): $A_1(a;\,0)$; $A_2(-a;\,0)$; $B_1(0;\,b)$; $B_2(0;-b)$. Відрізок $A_1A_2 = 2a$ називається *великою віссю еліпса*, відрізок $B_1B_2 = 2b$ — *малою віссю еліпса.*

Рівняння (10.2) містить змінні координати тільки в другому степені, а тому координатні осі є осями симетрії еліпса. Вісь Ox — горизонтальна вісь симетрії, Oy — вертикальна вісь симетрії. Вісь, на якій лежать фокуси еліпса, називають також *фокальною віссю*.

Точка перетину осей симетрії називається *центром еліпса*.

Відношення фокусної відстані до довжини великої осі називається *ексцентриситетом еліпса* і позначається:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{10.9}$$

Оскільки $c < a$, то для еліпса $\varepsilon < 1$. Для кола ексцентриситет $\varepsilon = 0$. Якщо ексцентриситети рівні, то криві подібні між собою, тобто однаково стиснуті (деформовані). Для еліпса, коли $\varepsilon \to 0$, то він за формою наближається до кола, якщо $\varepsilon \to 1$ — до відрізка великої осі.

Зауваження. При розв'язуванні задач, пов'язаних з еліпсом, крім його канонічного рівняння користуються рівністю (10.9), а також співвідношенням:

$$a^2 - c^2 = b^2, \tag{10.10}$$

яке було введено при одержанні канонічного рівняння еліпса.

Приклад Дано рівняння еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, обчислити півосі a і b, координати фокусів еліпса та його ексцентриситет.

Розв'язання. Еліпс задано канонічним рівнянням, а тому $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, звідси $a = 4$; $b = 3$. Для визначення координат фокусів скористаємося співвідношенням (10.10): $a^2 - b^2 = c^2$, маємо $16 - 9 = 7 = c^2$. Отже, фокуси еліпса мають координати $F_1(\sqrt{7};\,0)$; $F_2(-\sqrt{7};\,0)$. Ексцентриситет еліпса обчислимо за формулою (10.9):

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Рівняння дотичних до еліпса в точці $M_1(x_1,\ y_1)$ мають вигляд:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1. \qquad (10.11)$$

10.4. Гіпербола

Гіперболою називається геометричне місце точок, різниця відстаней від яких до двох фіксованих точок $F_1,\ F_2$ (фокусів) є величина стала.

Для одержання канонічного рівняння гіперболи її фокуси F_1, F_2 візьмемо на осі Ox і позначимо відстань $F_1\ F_2=2c,$ тоді $F_1\left(c;\ 0\right);$ $F_2\left(-c;\ 0\right)$ (рис. 10.3).

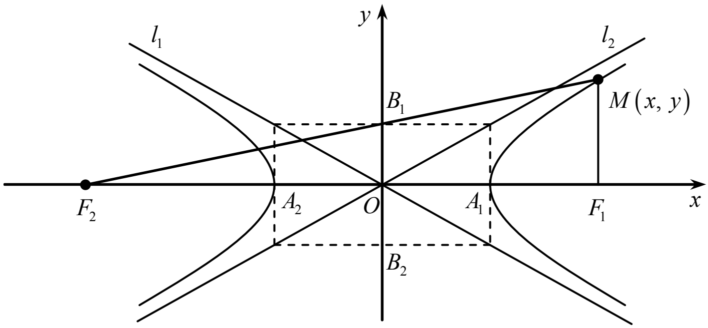


Рис. 10.3

Нехай довільна точка $M\left(x;\ y\right)$ (рис. 10.3) належить гіперболі. Тоді, за означенням гіперболи, маємо

$$F_2M-F_1M=\pm 2a, \qquad (10.12)$$

де $2a$ — деяка стала величина. Знак «+» береться тоді, коли точка $M\left(x;\ y\right)$ лежить правіше осі Oy і «–» — коли точка *M* лежить лівіше осі Oy.

Із рівності (10.12), використовуючи формулу відстані між двома точками, одержуємо рівність:

$$\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}-\sqrt{\left(x-c\right)^2+y^2}=\pm 2a.$$

В останній рівності, після двократного піднесення до квадрату, звільняємося від радикалів. Виконавши відповідні алгебричні перетворення, дістаємо:

$$x^2\left(c^2-a^2\right)-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right).$$

Введемо позначення $c^2-a^2=b^2$. Обґрунтуємо його правомірність. Із ΔF_2MF_1 за відомою теоремою, що різниця двох сторін трикутника завжди менша третьої його сторони, маємо:

$$F_2M-F_1M<F_1F_2\Rightarrow 2a<2c\Rightarrow a<c.$$

Отже, $c^2-a^2>0$, а тому можна позначити $c^2-a^2=b^2$. Геометричний зміст величин a і b буде дано нижче. З величиною b рівність буде мати вигляд:

$$x^2\left(c^2-a^2\right)-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right).$$

Поділивши ліву і праву частини рівності на a^2b^2, одержимо рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (10.13)$$

Рівняння (10.13) називається *канонічним рівнянням гіперболи*. Точки перетину гіперболи з віссю Ox: $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$ називаються *вершинами* гіперболи. Відрізок A_1A_2 називається *дійсною віссю* гіперболи. Вісь Oy не перетинає її. Якщо на осі Oy взяти точки $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$, то відрізок B_1B_2 називається *уявною віссю* гіперболи.

Рівняння (10.13) містить змінні координати тільки в другому степені, а тому координатні осі є осями симетрії гіперболи. Вісь Ox — горизонтальна вісь симетрії, Oy — вертикальна вісь симетрії. Точка перетину осей симетрії називається центром гіперболи.

Розв'яжемо рівняння (10.13) відносно y, одержимо:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \qquad (10.14)$$

На підставі дослідження рівняння (10.14) робимо висновок, що гіпербола складається з двох частин. Ці частини називаються *гілками* гіперболи (див. рис. 10.3).

Відношення фокусної відстані до довжини дійсної осі називається *ексцентриситетом гіперболи* і позначається:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{10.15}$$

Оскільки $c > a$, то для гіперболи $\varepsilon > 1$.

Зауваження. При розв'язуванні задач, пов'язаних з гіперболою, крім її канонічного рівняння (10.13), користуються рівністю (10.15), а також співвідношенням

$$c^2 - a^2 = b^2, \tag{10.16}$$

яке було введено при одержанні канонічного рівняння гіперболи.

Пряма l називається *асимптотою нескінченної гілки кривої*, якщо відстань між точкою, що належить гілці, і цією прямою прямує до нуля, коли точка, рухаючись по гілці, прямує до нескінченності.

Гілки гіперболи мають асимптоти, рівняння яких мають вигляд:

$$(l_1)\ y = \frac{b}{a}x, \quad (l_2)\ y = -\frac{b}{a}x. \tag{10.17}$$

Приклад Дано рівняння гіперболи $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Знайти довжини дійсної і уявної осей гіперболи, координати фокусів. Записати рівняння асимптот гіперболи.

Розв'язання. Гіперболу задано канонічним рівнянням, а тому $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, звідси довжина дійсної осі $2a = 8$, уявної осі $2b = 6$. Для визначення координат фокусів скористаємося співвідношенням (10.16): $c^2 - a^2 = b^2$, маємо $c^2 = a^2 + b^2$ або $c^2 = 16 + 9 = 25$. Отже, фокуси гіперболи мають координати $F_1(5;\ 0)$; $F_2(-5;\ 0)$. Згідно з формулою (10.17) рівняння асимптот гіперболи матимуть відповідно вигляд:

$$y = \frac{3}{4}x; \quad y = -\frac{3}{4}x.$$

Рівняння дотичних до гіперболи в точці $M_1(x_1;\ y_1)$ мають вигляд:

$$\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 1. \tag{10.18}$$

10.5. Парабола

Параболою називається геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки F (фокуса) і даної прямої l (директриси).

Для одержання канонічного рівняння параболи вісь Ox повинна збігатися з прямою, яка проходить через фокус F і перпендикулярна до директриси l. Початок координат лежить на середині відрізка, який знаходиться між фокусом і директрисою. Додатний напрямок осі Ox буде від директриси. Відстань від директриси до фокуса позначимо p і назвемо *параметром* параболи. Виходячи з цих позначень маємо: $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$ — координати фокуса параболи, $x=-\frac{p}{2}$ — рівняння директриси параболи (рис. 10.4).

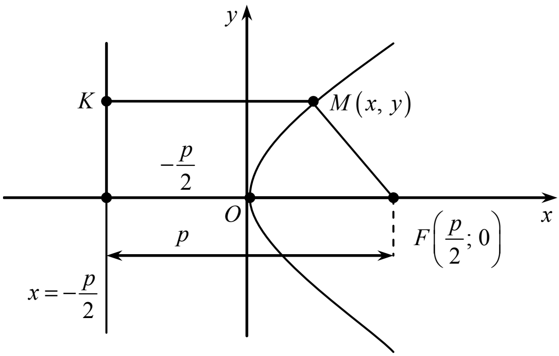


Рис. 10.4

Нехай довільна точка $M(x,\ y)$ (рис. 10.4) належить параболі. На основі означення і за побудовою параболи маємо

$$FM = MK, \tag{10.19}$$

але $FM=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$, а $MK=x+\frac{p}{2}$.

Підставивши ці значення в рівність (10.19), одержимо рівність:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}.$$

Ліву і праву частини здобутої рівності піднесемо до квадрату, а потім, розв'язавши її відносно y^2, дістанемо:

$$y^2 = 2px. \qquad (10.20)$$

Рівняння (10.20) називається *канонічним* рівнянням параболи. Точка перетину параболи з віссю Ox називається *вершиною* параболи. Вершина параболи збігається з початком координат. Парабола лежить правіше осі Oy і симетрична відносно осі Ox. Ексцентриситет параболи $\varepsilon = 1$. Рівняння дотичної до параболи в точці $M_1(x_1, y_1)$ має вигляд:

$$yy_1 = p(x + x_1). \qquad (10.21)$$

Приклад Записати рівняння параболи, знаючи, що відстань від фокуса до вершини дорівнює 3.

Розв'язання. Фокус параболи має координати $F\left(\frac{p}{2};\, 0\right)$, отже, $\frac{p}{2} = 3,\ p = 6.$ Канонічне рівняння параболи має вигляд $y^2 = 2px$, тож рівняння даної параболи буде $y^2 = 12x$.

Зауваження. Рівняння еліпса і гіперболи можна також одержати, користуючись рівняннями їх директрис.

Питання для самоперевірки

1. Запишіть загальне рівняння кривих другого порядку.
2. Дайте визначення кола як геометричного місця точок.
3. Запишіть канонічне рівняння кола і рівняння дотичної до нього, проведеної в точці $M_1(x_1;\, y_1)$.
4. Дайте визначення еліпса як геометричного місця точок. Запишіть канонічне рівняння еліпса.
5. Чому дорівнює ексцентриситет еліпса і які числові значення може він набувати?
6. Запишіть рівняння дотичної до еліпса, проведеної в точці $M_1(x_1;\, y_1)$.
7. Дайте визначення гіперболи як геометричного місця точок.
8. Запишіть канонічне рівняння гіперболи.

9. Чому дорівнює ексцентриситет гіперболи і які числові значення може він набувати?

10. Запишіть рівняння дотичної до гіперболи, проведеної в точці $M_1(x_1;\, y_1)$.

11. Які існують співвідношення між величинами a, b, c для еліпса, для гіперболи?

12. Запишіть рівняння асимптот гіперболи $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

13. Дайте визначення параболи. Запишіть канонічне рівняння параболи.

14. Чому дорівнює ексцентриситет параболи? Запишіть рівняння директриси параболи.

15. Запишіть рівняння дотичної до параболи в точці $M_1(x_1;\, y_1)$.

ПІДМОДУЛЬ 11
Поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називається геометричне місце точок, координати яких задовольняють рівняння другого степеня:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxz + Exz + Kyz + Mx + Ny + Lz + F = 0. \quad (11.1)$$

Рівняння поверхні може і не містити всіх трьох змінних: x, y, z. Якщо рівняння (11.1) можна розв'язати відносно z, то одержимо рівняння поверхні у вигляді: $z = f(x, y)$.

11.1. Сфера

Сферою називається геометричне місце точок простору, рівновіддалених від однієї і тієї самої точки, яка називається центром сфери.

Рівняння сфери має вигляд:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2, \quad (11.2)$$

де a, b, c — координати центра сфери, а R — її радіус. Якщо центр сфери знаходиться в початку координат, то її рівняння має вигляд:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (11.3)$$

Приклад Записати рівняння сфери радіуса $R=3$ з центром у точці $C(-1;\ 2;\ -3)$.

Розв'язання. Підставляючи в рівняння (11.2) $a=-1$; $b=2$; $c=-3$, будемо мати

$$\left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2+(z+3)^2=9,$$

або

$$x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z+5=0.$$

11.2. Циліндр

Циліндричною поверхнею, або *циліндром*, називається поверхня, що описується нескінченною прямою (твірною), яка рухається, залишаючись паралельною даній прямій і перетинаючи дану криву (напрямну).

Ми будемо розглядати тільки такі циліндричні поверхні, у яких твірна паралельна одній із координатних осей, а напрямна лежить в одній із координатних площин. Назва таких циліндричних поверхонь залежить від типу напрямної:

✓ *прямий круговий циліндр*, якщо напрямна лежить в площині xOy, визначається рівнянням $x^2+y^2=r^2$ (рис. 11.1);

✓ *еліптичний циліндр*, напрямна якого лежить в площині xOz, визначається рівнянням $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 11.2);

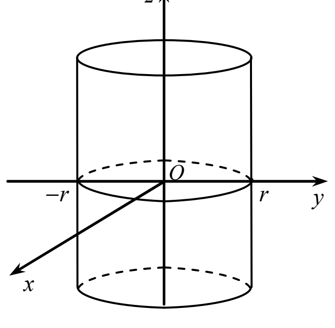


Рис. 11.1

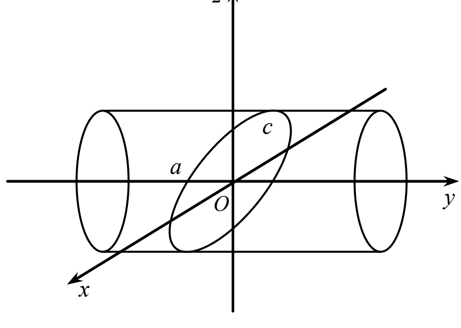


Рис. 11.2

✓ рівняння *гіперболічного циліндра*, напрямна якого лежить у площині xOy, має вигляд $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 11.3);

✓ рівняння *параболічного циліндра*, напрямна якого лежить у площині yOz, має вигляд $y^2=2pz$ (рис. 11.4).

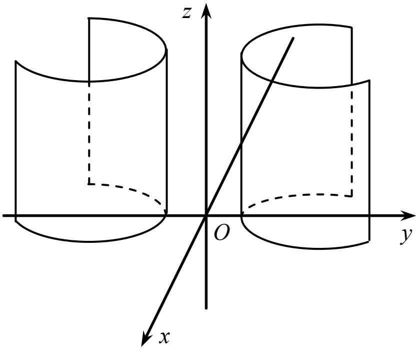


Рис. 11.3

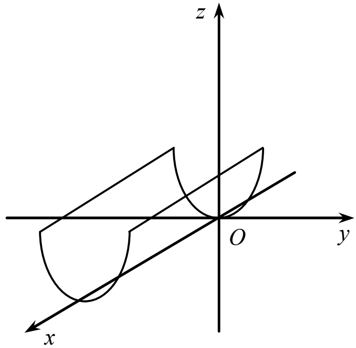


Рис. 11.4

Зауваження. У рівняннях циліндричних поверхонь відсутня змінна, яка однойменна з тією координатною віссю, якій паралельна твірна циліндричної поверхні.

Приклад Які поверхні визначаються такими рівняннями:
а) $x^2+z^2=16$; б) $\frac{x^2}{6}+\frac{z^2}{4}=1$; в) $x=2z^2$; г) $\frac{z^2}{5}-\frac{x^2}{7}=1$?

Розв'язання. Кожне з цих рівнянь містить тільки дві змінні x і z та визначає на площині xOz криві: а) коло; б) еліпс; в) параболу; г) гіперболу.

У просторі кожне з них визначає циліндричну поверхню з твірними, які паралельні осі Oy, бо ці рівняння не містять змінної y. Напрямними цих циліндричних поверхонь є вказані криві:

1) $x^2+z^2=16$ — рівняння прямого кругового циліндра;

2) $\frac{x^2}{6}+\frac{z^2}{4}=1$ — рівняння еліптичного циліндра;

3) $x=2z^2$ — рівняння параболічного циліндра;

4) $\frac{z^2}{5}-\frac{x^2}{7}=1$ — рівняння гіперболічного циліндра.

11.3. Конус

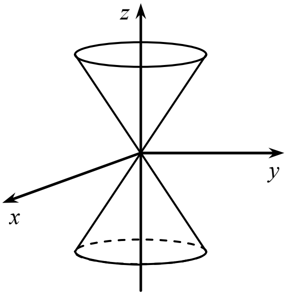


Рис. 11.5

Конічною поверхнею, або *конусом*, називається поверхня, що описується рухомою нескінченною прямою (твірною), яка проходить через точку O (вершину конуса) і перетинає дану криву (напрямну).

Якщо напрямна конуса паралельна площині xOy, то рівняння конічної поверхні має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (11.4)$$

і геометрично зображається так, як на рис. 11.5.

Якщо у формулі (11.4) $a=b$, то рівняння описує круговий конус, якщо $a\neq b$ — еліптичний конус.

11.4. Поверхні обертання

Рівняння поверхні обертання за відомим рівнянням лінії, яка обертається, можна одержати, користуючись правилом:

Щоб дістати рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії l, яка лежить у площині yOz і обертається навколо осі Oy, необхідно в рівнянні цієї лінії замінити z на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$.

Зауваження 1. Залежно від того, в якій координатній площині лежить лінія l і навколо якої координатної осі виконується обертання, користуючись правилом необхідно дотримуватися вимоги: координата, яка однойменна з віссю обертання, повинна залишитись без зміни; другу змінну замінюємо так, щоб перетворене таким чином рівняння в загальному випадку містило три змінні координати: x; y; z.

Зауваження 2. Виходячи з означення поверхні обертання, можна одержати рівняння конічної поверхні (конуса). У цьому випадку лінією обертання l буде пряма лінія.

Приклад Пряма $x=z$ обертається навколо осі Oz. Знайти рівняння поверхні обертання (конуса).

Розв’язання. Оскільки в рівняння лінії l входять тільки змінні x і z, то лінія лежить у площині xOz.

Для одержання рівняння поверхні обертання в рівнянні прямої змінна z повинна залишитись без зміни, оскільки вона відповідає осі обертання Oz.

Друга змінна x у рівнянні прямої повинна бути замінена $\pm$ коренем квадратним із суми квадратів решти двох змінних x і y, тобто $\pm\sqrt{x^2+y^2}$. Рівняння поверхні запишеться так: $\pm\sqrt{x^2+y^2}=z$.

Виконавши піднесення обох частин останньої рівності до квадрата, одержимо остаточно рівняння поверхні обертання у вигляді:

$$x^2+y^2=z^2, \quad \text{або} \quad x^2+y^2-z^2=0 \text{ (конус).}$$

Одержане рівняння є частинним випадком рівняння (11.4) $(a=b=c=1)$.

Приклад Знайти рівняння поверхні обертання, утвореної обертанням еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$: а) навколо осі Ox; б) навколо осі Oy.

Розв'язання. Рівняння кривої містить координати x і y, отже, крива лежить у площині xOy.

а) Для визначення рівняння поверхні, яка утворюється обертанням еліпса навколо осі Ox, необхідно в рівнянні еліпса змінну x, яка відповідає осі обертання, залишити без зміни, а другу змінну y замінити на корінь квадратний із суми квадратів решти двох змінних, тобто на $\pm\sqrt{y^2+z^2}$.

Шукане рівняння поверхні обертання буде мати вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\left(\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)^2}{b^2}=1, \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1.$$

Ця поверхня називається *еліпсоїдом обертання*.

б) Якщо ж обертати даний еліпс навколо осі Oy, то змінну y, що відповідає осі обертання, в рівнянні еліпса слід залишити без зміни, а змінну x замінити на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$.

У цьому випадку рівняння поверхні обертання матиме вигляд:

$$\frac{\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{або} \quad \frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Ця поверхня також називається еліпсоїдом обертання.

Далі наведемо найпростіші рівняння поверхонь другого порядку:

1. Тривісний еліпсоїд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad (11.5)$$

де a, b, c — півосі еліпсоїда.

2. Однопорожнинний гіперболоїд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \qquad (11.6)$$

У перетині поверхні однопорожнинного гіперболоїда з координатними площинами отримуються криві:

1) з площиною xOy $(z=0)$ — еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ який називається головним;

2) з площиною xOz $(y=0)$ — гіпербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$

3) з площиною yOz $(x=0)$ — гіпербола $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$

Вершини головного еліпса називаються вершинами гіперболоїда, їх довжини дорівнюють $2a$ і $2b.$ Вісь гіперболоїда, розташована по осі $Oz,$ що дорівнює $2c,$ називається його повздовжньою віссю.

У випадку, коли повздовжня вісь однопорожнинного гіперболоїда розташована на осі Ox, рівняння його поверхні запишеться у вигляді:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1. \qquad (11.7)$$

Для випадку, коли повздовжня вісь однопорожнинного гіперболоїда знаходиться на осі $Oy,$ його рівняння має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (11.8)$$

3. Двопорожнинний гіперболоїд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (11.9)$$

Площина xOy не перетинає поверхні двопорожнинного гіперболоїда (11.9). Площини xOz, yOz перетинають поверхню (11.9) відповідно по гіперболах:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad \text{і} \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

які називаються головними гіперболами. Відрізок довжиною $2c$, розташований на осі Oz, називається повздовжньою віссю двопорожнинного гіперболоїда (11.9), а відрізки довжиною $2a$ і $2b$, розташовані відповідно на осях Ox і Oy, називаються поперечними його осями.

У двопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \tag{11.10}$$

повздовжня вісь розташована на осі Oy, а у двопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=-1 \tag{11.11}$$

вона розташована на осі Ox.

4. Еліптичний параболоїд:

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}. \tag{11.12}$$

Вісь Oz називається віссю еліптичного параболоїда.

В еліптичного параболоїда

$$y=\frac{x^2}{2p}+\frac{z^2}{2r} \tag{11.13}$$

віссю служить вісь Oy, а в еліптичного параболоїда:

$$x=\frac{y^2}{2q}+\frac{z^2}{2r} \tag{11.14}$$

віссю служить вісь Ox.

5. Гіперболічний параболоїд:

$$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}. \tag{11.15}$$

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення поверхні другого порядку. Які ви знаєте поверхні другого порядку?

2. Дайте визначення сфери. Запишіть рівняння сфери з центром у точці $C(a; b; c)$ і радіусом R.

3. Яка поверхня називається циліндричною? Від чого залежить назва циліндричних поверхонь? Наведіть приклади циліндричних поверхонь.

4. Запишіть рівняння прямого кругового, еліптичного, параболічного циліндра.

5. Скільки змінних наявні в рівняннях циліндричних поверхонь? Як визначається змінна, що відсутня в рівнянні циліндричної поверхні?

6. Дайте визначення конічної поверхні. Запишіть рівняння конічної поверхні, якщо напрямна паралельна площині xOy.

7. Сформулюйте правило, за яким за відомим рівнянням обертаючої лінії можна одержати рівняння поверхні обертання. Наведіть приклади.

8. Запишіть рівняння тривісного еліпсоїда, однопорожнинного гіперболоїда, двопорожнинного гіперболоїда.

9. Запишіть рівняння еліптичного параболоїда, гіперболічного параболоїда.

РОЗДІЛ 2

АУДИТОРНІ ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

ПІДМОДУЛЬ 1
Визначники

1.1. Визначники, їх властивості

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Мінором елемента a_{ij} називається…

2. Записати формулу алгебричного доповнення елемента a_{ij}.

3. Коли визначник дорівнює нулю?

4. Якщо переставити два рядки визначника, то…

5. Теорема про розклад визначника за елементами будь-якого рядка (стовпця).

Завдання для аудиторної роботи

1. Обчислити визначник:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -10 & 7 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \log_a b & \log_{a^2} b \\ \log_{b^2} a & \log_b a \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 4 = 10;$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -10 & 7 \end{vmatrix} = 0 + 30 + 200 - 0 + 30 - 140 = 120;$

в) користуючись формулами: $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, $\log_{a^k} N = \dfrac{1}{k}\log_a N$,

маємо: $\begin{vmatrix} \log_a b & \log_{a^2} b \\ \log_{b^2} a & \log_b a \end{vmatrix} = \log_a b \cdot \log_b a - \log_{b^2} a \cdot \log_{a^2} b = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}.$

Відповідь: а) 10; б) 120; в) $\dfrac{3}{4}$.

2. Розв'язати рівняння, нерівність:

а) $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$

Розв'язання:

а) $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} +$

$+\dfrac{\pi n}{3},\ n \in Z;$

б) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow x^2 + 10x + 24 < 0 \Leftrightarrow -6 < x < -4 \Leftrightarrow x \in (-6; -4).$

Відповідь: а) $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3},\ n \in z$; б) $x \in (-6; -4)$.

3. Обчислити визначники, користуючись їх властивостями:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \beta b_1 + \gamma c_1 & b_1 & c_1 \\ \beta b_2 + \gamma c_2 & b_2 & c_2 \\ \beta b_3 + \gamma c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

Розв'язання:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$

б) $\begin{vmatrix} \beta b_1 + \gamma c_1 & b_1 & c_1 \\ \beta b_2 + \gamma c_2 & b_2 & c_2 \\ \beta b_3 + \gamma c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta b_1 & b_1 & c_1 \\ \beta b_2 & b_2 & c_2 \\ \beta b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma c_1 & b_1 & c_1 \\ \gamma c_2 & b_2 & c_2 \\ \gamma c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} +$

$+ \gamma \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

4. Обчислити визначник, розклавши його за елементами рядка (стовпця):

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2A_{11} - A_{12} + A_{13} = 0;$

б) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 7\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} -$

$- 4\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 5\cdot 2 = 10.$

Відповідь: а) 0; б)10.

5. Обчислити визначник, використовуючи метод накопичення нулів у рядку чи стовпці:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & -5 & 17 & -6 & -11 \\ 4 & 2 & 1 & 7 & 9 \\ 8 & 3 & 6 & 8 & 11 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -2 & -8 & -10 \\ -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} =$

$= -4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 13 \end{vmatrix} = -4\cdot\left(26+35+35-98-25-13\right) = 160;$

б) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & -5 & 17 & -6 & -11 \\ 4 & 2 & 1 & 7 & 9 \\ 8 & 3 & 6 & 8 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 20 & -2 & -6 \\ 0 & -12 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & -25 & -6 & -8 & -9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 & 1 \\ 2 & 20 & -2 & -6 \\ -12 & -5 & -1 & -1 \\ -25 & -6 & -8 & -9 \end{vmatrix} =$

$= 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 30 & -2 & 8 \\ -12 & -65 & -1 & -11 \\ -25 & -131 & -8 & -16 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 30 & -2 & 8 \\ -65 & -1 & -11 \\ -131 & -8 & -16 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 160 & 0 & 30 \\ -65 & -1 & -11 \\ 389 & 0 & 72 \end{vmatrix} =$

$= -2\begin{vmatrix} 160 & 30 \\ 389 & 72 \end{vmatrix} = -2(-150) = 300$

Відповідь: а) 160; б) 300.

6. Обчислити визначник, звівши його до трикутного вигляду:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & -6 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & -6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & -6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-6) \cdot (-1) \cdot 3 = 18.$$

Відповідь. 18.

Домашнє завдання

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$.

Відповідь: а) 10; б) –29; в) 0.

2. Розв'язати нерівність:

а) $\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0$; б) $\begin{vmatrix} |x-1| & 1 \\ 2 & \dfrac{1}{|x+2|} \end{vmatrix} < 0$.

Відповідь: а) $x > 3$; б) $x \in (-\infty;\, -5) \cup (-1;\, \infty)$.

3. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Відповідь: а) $9a + 12b + 3d - 9c$; б) 1800; в) –2.

4. Спростити, використовуючи властивості визначників:

$$\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & x+a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & x+a_3 \end{vmatrix}.$$

Відповідь. $x^3+x^2(a_1+a_2+a_3)$.

5. Використовуючи властивості визначників, довести рівність:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \dfrac{b+c}{2} & \dfrac{c+a}{2} & \dfrac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

ПІДМОДУЛЬ 2
Матриці

2.1. Матриці, дії з ними. Обернена матриця

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Матриця — це...
2. Які матриці можна перемножати?
3. Дайте означення транспонованої матриці.
4. Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A, якщо…
5. Добутком двох матриць називається…

Завдання для аудиторної роботи

1. Обчислити $2A-3B$, якщо $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & -3\end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$2\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 4\\ 6 & 8 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & -3 & -3\\ -9 & -12 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -5 & 1\\ -3 & -4 & 13\end{pmatrix}.$$

Відповідь. $\begin{pmatrix}-3 & -5 & 1\\ -3 & -4 & 13\end{pmatrix}$.

2. Обчислити:

а) $\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

Розв'язання:

а) $$\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 2+(-3)\cdot 1+2\cdot 1 & 1\cdot 5+(-3)\cdot 2+2\cdot 3 & 1\cdot 6+(-3)\cdot 5+2\cdot 2\\ 3\cdot 2+(-4)\cdot 1+1\cdot 1 & 3\cdot 5+(-4)\cdot 2+1\cdot 3 & 3\cdot 6+(-4)\cdot 5+1\cdot 2\\ 2\cdot 2+(-5)\cdot 1+3\cdot 1 & 2\cdot 5+(-5)\cdot 2+3\cdot 3 & 2\cdot 6+(-5)\cdot 5+3\cdot 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 5 & -5\\ 3 & 10 & 0\\ 2 & 9 & -7\end{pmatrix}.$$

б) $$\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+1+4 & 2+0+2\\ 3+3+2 & 1+0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 4\\ 8 & 2\end{pmatrix}.$$

в) $$\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+2+2\\ 9+4+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 14\end{pmatrix}.$$

г) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3+3 & 6+1 \\ 2 & 1+0 & 2+0 \\ 5 & 2+3 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Відповідь: а) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 \\ 14 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Транспонувати матрицю:

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$; в) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Якщо в даній матриці поміняти рядки на відповідні стовпці, то дістанемо транспоновану матрицю.

Отже, $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$; $C^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Відповідь: а) $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $B^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$; в) $C^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

4. Піднести матрицю до квадрату:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Нехай $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}$. Знайти $(A+B)^T-(A^T+B^T)$.

Розв'язання:

$$A+B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix},\ (A+B)^T=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix},\ A^T+B^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$$

$$(A+B)^T-(A^T+B^T)=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -4\\ -2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Відповідь. $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

6. Знайти значення многочлена $f(A)$, якщо $f(x)=x^2-3x+1$, $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

Розв'язання: $f(A)=A^2-3A+E$,

$$f(A)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -4 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & -6\\ 3 & -9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Відповідь. $\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

7. Знайти обернену матрицю:

а) $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}$;

в) $\grave{A}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{pmatrix}$.

Розв'язання:

а) Знайдемо визначник матриці: $\det A=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{vmatrix}=1\neq 0,$ тоді матриця A невироджена, отже, існує обернена матриця A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T, \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Перевірка. $AA^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

б) $\det A=\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{vmatrix}=-1,$ знаходимо алгебричні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}=8;\quad A_{21}-\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}=-29;\quad A_{31}=\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=11;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=5;\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-18;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=7;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=-1;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=3;\quad A_{33}=\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-1.$$

Згідно з формулою, обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевірка. $AA^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

в) $\det A=\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}=1;\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$

Перевірка. $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Відповідь: а) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$

8. Знайти обернену матрицю методом елементарних перетворень $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=-27\neq 0,$$

тоді матриця A невироджена, і для неї існує обернена матриця A^{-1}.

Побудуємо прямокутну матрицю:

$$\left(A|E\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 9 & 2 & -2 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9}\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9}\\ 0 & -3 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & \frac{5}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9}\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9}\end{array}\right).$$

Отже, $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$

Перевірка. $AA^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Відповідь. $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$

9. Обчислити $f(A)$, якщо

$f(x)=\dfrac{x^2+2}{x},\ A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Розв'язання.

$$f(A)=\left(A^2+2E\right)A^{-1},$$

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},\qquad A^2+2E=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\qquad f(A)=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. $f(A)=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$

Домашнє завдання

1. Нехай $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

Знайти: а) $2A-3B$; б) $\left(-\frac{1}{2}B^T-B\right)^T$.

Відповідь: а) $\begin{pmatrix}5 & 4\\ 3 & -14\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1,5 & -1\\ -0,5 & -6\end{pmatrix}$.

2. Знайти матрицю $2B-C^T$, якщо $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

Відповідь. $\begin{pmatrix}1 & 4 & 8\\ 9 & 8 & 9\end{pmatrix}$.

3. Знайти добуток матриць:

а) $\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 7\\ -4 & 2 & 3\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}5 & 0 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ 5\\ 2\end{pmatrix}$.

Відповідь: а) $\begin{pmatrix}11 & -22 & 29\\ 9 & -27 & 32\\ 13 & -17 & 26\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}31\\ 12\\ 9\end{pmatrix}$; в) (34).

4. Знайти $AB-BA$, якщо:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 1\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 5 & 3\\ 0 & 7 & 5\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}$.

Відповідь: а) $\begin{pmatrix}4 & -8\\ 12 & -4\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

5. Піднести матрицю до третього степеня $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$.

Відповідь. $\begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^3 \end{pmatrix}$.

6. Знайти значення многочлена $f(A)$, якщо $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Відповідь. $\begin{pmatrix} 18 & 15 & 5 \\ 19 & 53 & 11 \\ 11 & 15 & 12 \end{pmatrix}$.

7. Знайти значення многочлена $f(A)$, якщо $f(x) = \dfrac{2+x}{1+x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Відповідь. $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Знайти обернену матрицю:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 8 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Відповідь: а) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\dfrac{1}{66}\begin{pmatrix} 29 & 6 & -13 \\ -4 & 6 & 20 \\ -15 & 6 & 9 \end{pmatrix}$; в) Оберненої матриці не існує; г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2. Матричні рівняння. Ранг матриці

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Коли застосовується матричний спосіб розв'язування системи лінійних рівнянь?
2. Чи комутативна операція множення матриць? Приклад.
3. Рангом матриці називається…
4. Мінором *k*-го порядку матриці *A* називається…
5. Означення оберненої матриці.

Завдання для аудиторної роботи

1. Розв'язати матричне рівняння:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $X\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

а) Нехай $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, тоді рівняння набуває вигляду $AX = B$, $X = A^{-1}B$.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -23\\ 0 & 8\end{pmatrix}.$$

б) Нехай $A=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-8 & 3 & 0\\ -5 & 9 & 0\\ -2 & 15 & 0\end{pmatrix}$, тоді $XA=B$, $X=BA^{-1}$.

$$\det A=\begin{vmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -5 & 2 & 1\end{vmatrix}=19,\quad \begin{matrix}A_{11}=1; & A_{12}=9; & A_{13}=-13;\\ A_{21}=-1; & A_{22}=10; & A_{23}=-25;\\ A_{31}=-3; & A_{32}=11; & A_{33}=-18.\end{matrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{19} & -\frac{1}{19} & -\frac{3}{19}\\ \frac{9}{19} & \frac{10}{19} & \frac{11}{19}\\ -\frac{13}{19} & -\frac{25}{19} & -\frac{18}{19}\end{pmatrix},$$

$$X=\begin{pmatrix}-8 & 3 & 0\\ -5 & 9 & 0\\ -2 & 15 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{19} & -\frac{1}{19} & -\frac{3}{19}\\ \frac{9}{19} & \frac{10}{19} & \frac{11}{19}\\ -\frac{13}{19} & -\frac{25}{19} & -\frac{18}{19}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}.$$

в) Нехай $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{pmatrix}$, тоді $AXB=C$, $X=A^{-1}CB^{-1}$.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix};\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ \frac{7}{2} & \frac{-5}{2}\end{pmatrix}.$$

$$X=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 3\\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Відповідь: а) $\begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом:

а) $\begin{cases} x+2y-z=-3, \\ 3x+4y+z=1, \\ 5x+y-3z=-2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+z=-2, \\ x+2y=3, \\ -x+y+2z=5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x+2y+3z=-2, \\ 2x+8y-z=8, \\ 9x+y+8z=0. \end{cases}$

Розв'язання:

а) $\begin{cases} x+2y-z=-3, \\ 3x+4y+z=1, \\ 5x+y-3z=-2. \end{cases}$

Нехай $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, тоді СЛР набуває вигляду $AX=B$, $X=A^{-1}B$.

$\det A=32$, отже, існує обернена матриця A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{32}\begin{pmatrix} -13 & 5 & 6 \\ 14 & 2 & -4 \\ -17 & 9 & -2 \end{pmatrix},$$

тоді $X=\frac{1}{32}\begin{pmatrix} -13 & 5 & 6 \\ 14 & 2 & -4 \\ -17 & 9 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

б) $\begin{cases} 3x+z=-2, \\ x+2y=3, \\ -x+y+2z=5. \end{cases}$

Нехай $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, тоді $AX=B$, $X=A^{-1}B$.

$\det A = 15,$ отже, існує $A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -2 & 7 & 1 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$

Тоді $X = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -2 & 7 & 1 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

в) $\begin{cases} 4x + 2y + 3z = -2, \\ 2x + 8y - z = 8, \\ 9x + y + 8z = 0. \end{cases}$

Нехай $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \\ 9 & 1 & 8 \end{pmatrix},$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix},$ тоді $AX = B,$ $X = A^{-1}B.$

$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \\ 9 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0,$ тому оберненої матриці A^{-1} не існує.

Отже, розв'язати систему рівнянь матричним методом не можливо.

Відповідь: а) $x = 1,\ y = -1,\ z = 2;$ б) $x = -1,\ y = 2,\ z = 1.$

3. Обчислити ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

І-й спосіб.

Знайдемо ранг матриці методом окантованих мінорів:

$M_1 = 3,$ $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4,$ $M_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0,$ $M_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$

тоді $r(A) = 2.$

ІІ-й спосіб.

Знайдемо ранг матриці методом елементарних перетворень:

$$A=\begin{pmatrix}3&2&1&2\\2&0&-1&1\\0&4&5&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&2\\-1&0&2&1\\5&4&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&2&5&3\\0&-6&-15&-9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&2\\0&2&5&3\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

тоді $r(A)=2.$

Відповідь: 2.

4. Знайти ранг матриці:

а) $\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\2&0&4&0\\3&0&6&0\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}-1&0\\1&2\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}1&2&3&1\\4&-3&1&7\end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&-1&2\\5&1&5\end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&2\\1&2&-1\end{pmatrix}$; є) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&-1&2&5\\1&2&3&4\\1&3&4&5\end{pmatrix}$.

Розв'язання:

а) Серед мінорів першого порядку (тобто елементів матриці) є відмінні від нуля, тому, $r(A)\geq 1$.

Оскільки один з мінорів другого порядку також відмінний від нуля $M_2=\begin{vmatrix}1&-1\\2&4\end{vmatrix}=6$, а всі мінори третього порядку дорівнюють нулю $M=\begin{vmatrix}1&0&-1\\2&0&4\\3&0&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&0\\2&4&0\\3&6&0\end{vmatrix}=0$, то $r=2$.

б) $\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$, $r=1$; в) $\begin{pmatrix}-1&0\\1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, $r=2$;

г) $\begin{pmatrix}1&2&3&1\\4&-3&1&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&-11&-11&3\end{pmatrix}$, $r=2$; д) $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&-1&2\\5&1&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-9&-10\\0&9&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&9&10\end{pmatrix}$, $r=2$;

е) $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&2\\1&2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&2\\0&0&-4\end{pmatrix}$, $r=3$;

є) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r = 2.$

Відповідь: а) 2; б) 1; в) 2; г) 2; д) 2; е) 3; є) 2.

Домашнє завдання

1. Розв'язати матричне рівняння:

а) $X\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Відповідь: а) Розв'язків немає; б) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Матричним методом розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x-4y=-5, \\ 2x-3y+z=-7, \\ x+4y+2z=-1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3+4x_4=7, \\ 7x_1+3x_2+6x_3+8x_4=1, \\ 3x_1+2x_2+4x_3+5x_4=9, \\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=6. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+2y+3z=-1, \\ x-3y-2z=3, \\ 2x-y+z=-2. \end{cases}$

Відповідь: а) $x=-1,\ y=1,\ z=-2$; б) $x_1=1,\ x_2=-16,\ x_3=47,\ x_4=-30.$

3. Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x-3y+z=0, \\ x+y+z=0, \\ 3x-2y+2z=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0, \\ x_1+3x_2+6x_3+20x_4=0, \\ x_1+4x_2+10x_3+20x_4=0. \end{cases}$

Відповідь: а) система має нескінченну кількість розв'язків; б) $x_1=x_2=x_3=x_4=0$.

4. Обчислити ранг матриці:

$$
\text{а)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Відповідь: а) 4; б) 2; в) 3.

ПІДМОДУЛЬ 3

Системи лінійних алгебричних рівнянь. Метод Крамера

3.1. Система лінійних рівнянь. Формули Крамера

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Записати формули Крамера.
2. Сформулювати елементарні перетворення системи лінійних рівнянь.
3. Розв’язок системи лінійних рівнянь — це…
4. Сумісна система лінійних рівнянь визначена, якщо…
5. Яка система лінійних рівнянь називається сумісною?

Завдання для аудиторної роботи

1. Розв’язати систему лінійних рівнянь методом Крамера:

$$
\text{а)} \begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = -2, \\ x - 2y + z = 1. \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} 2x - y - z = 2, \\ 3x - y + 2z = 5, \\ 4x - 2y - 2z = -3. \end{cases}
$$

в) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 20, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 0, \\ 2x + 5y + 3z = 0, \\ 3x + 4y + 2z = 0. \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ x + 2y - 5z = 0, \\ 3x + y - 2z = 0. \end{cases}$

Розв'язання:

а) $\begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = -2, \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 10,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -15.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-15}{5} = -3 .$$

б) $\begin{cases} 2x - y - z = 2, \\ 3x - y + 2z = 5, \\ 4x - 2y - 2z = -3. \end{cases}$

Оскільки $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$, а $\Delta_x = 3$, то система лінійних рівнянь розв'язків не має.

в) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 20, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 10 \\ 2 & -4 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}4&-1&1&-1\\8&1&2&3\\20&4&3&10\\4&-4&1&-6\end{vmatrix}=0,\quad \Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}1&4&1&-1\\1&8&2&3\\2&20&3&10\\2&4&1&-6\end{vmatrix}=0,$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}1&-1&4&-1\\1&1&8&3\\2&4&20&10\\2&-4&4&-6\end{vmatrix}=0,\quad \Delta_{x_4}=\begin{vmatrix}1&-1&1&4\\1&1&2&8\\2&4&3&20\\2&-4&1&4\end{vmatrix}=0.$$

Отже, система рівнянь невизначена.

г) $\begin{cases}3x+2y+z=0,\\2x+5y+3z=0,\\3x+4y+2z=0.\end{cases}$

$\Delta=\begin{vmatrix}3&2&1\\2&5&3\\3&4&2\end{vmatrix}=-3,$ система має єдиний розв'язок $x=y=z=0,$ оскільки $\Delta x=0,\ \Delta y=0,\ \Delta z=0.$

д) $\begin{cases}2x-y+3z=0,\\x+2y-5z=0,\\3x+y-2z=0.\end{cases}$

$\Delta=\begin{vmatrix}2&-1&3\\1&2&-5\\3&1&-2\end{vmatrix}=0,$ отже, система має нескінченну кількість розв'язків.

Відповідь: а) $x=2,\ y=-1,\ z=-3;$ б) розв'язків не існує; в) безліч розв'язків; г) $x=y=z=0;$ д) безліч розв'язків.

Домашнє завдання

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера:

а) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4,\\x_1+x_2+2x_3+3x_4=1,\\2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6,\\3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4.\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x+y-3z=-1,\\3x-2y+z=\dfrac{1}{3},\\5x-8y+9z=3.\end{cases}$

в) $\begin{cases} x+2y+3z=-1, \\ x-3y-2z=3, \\ 2x-y+z=-2. \end{cases}$

Відповідь: а) $x_1=-1,\ x_2=-1,\ x_3=0,\ x_4=1;$ б) система має безліч розв'язків; в) система розв'язків не має.

2. Розв'язати системи лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} 5x+2y=4, \\ 7x+4y=8. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y+3z=9, \\ 3x-5y+z=-4, \\ 4x-7y+z=5. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+2y+3z=5, \\ 2x-y-z=1, \\ x+3y+4z=6. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ 2x+y+z=2, \\ 3x+2y+2z=3. \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x+2y-z=0, \\ 2x-y+3z=0, \\ x+y-z=0. \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3+x_4=2, \\ x_1+x_2-3x_3+2x_4=1, \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=3, \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=1. \end{cases}$

Відповідь: а) $x=0,\ y=0;$ б) система розв'язків не має; в) $x=5,\ y=-27,\ z=18;$ г) $x=1,\ y=t,\ z=-t,\ t\in \mathrm{IR};$

д) $x=y=z=0;$ е) $x_1=x_2=x_3=x_4=1.$

3. Визначити, при яких $à$ і b система $\begin{cases} 2x-2y+z=b, \\ 5x-8y+9z=3, \\ 2x+y+az=-1, \end{cases}$

а) має єдиний розв'язок;
б) не має розв'язків;
в) має нескінченну кількість розв'язків.

3.2. Метод Гаусса. Теорема Кронекера–Капеллі

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Що таке ранг матриці?
2. Сформулювати теорему Кронекера—Капеллі.
3. Система лінійних рівнянь називається сумісною, якщо...
4. Сформулювати елементарні перетворення системи.
5. У чому полягає метод Гаусса?

Завдання для аудиторної роботи

1. Розв’язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x+7y-4z=-14, \\ 2x-y+z=5, \\ x-3y+z=6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+x_4=1, \\ 2x_1+x_2+7x_3-x_4=5, \\ x_1-7x_2+2x_3+4x_4=3. \end{cases}$

Розв’язання:

а) $\begin{cases} x+7y-4z=-14, \\ 2x-y+z=5, \\ x-3y+z=6. \end{cases}$

Запишемо розширену матрицю системи та зведемо її за допомогою елементарних перетворень до ступеневого вигляду:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -4 & -14 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 1 & 6 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -4 & -14 \\ 0 & -15 & 9 & 33 \\ 0 & -10 & 5 & 20 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -4 & -14 \\ 0 & -5 & 3 & 11 \\ 0 & -10 & 5 & 20 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -4 & -14 \\ 0 & -5 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right).$$

Остання матриця відповідає системі

$$\begin{cases} x+7y-4z=-14, \\ -5y+3z=11, \\ -z=-2. \end{cases}$$

Отже, $x=1,\ y=-1,\ z=2.$

б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3. \end{cases}$

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & -1 & 5 \\ 1 & -7 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Отже, система розв'язків не має.

Відповідь: а) $x = 1,\ y = -1,\ z = 2;$ б) розв'язків не існує.

2. Дослідити системи рівнянь на сумісність:

а) $\begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ 2x + y - 5z = -1, \\ x - y - z = -2. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x - y + z = 3, \\ x - y + 2z = 5. \end{cases}$

Розв'язання:

а) $\begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ r(A) = 2.$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right),\ r(B) = 3.$$

Оскільки $r(A) \neq r(B)$ — то згідно з теоремою Кронекера–Капеллі система несумісна.

б) $\begin{cases} x + 2y - 4z = 1, \\ 2x + y - 5z = -1, \\ x - y - z = -2. \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ r(A) = 2.$$

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-4&1\\2&1&-5&-1\\1&-1&-1&-2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-4&1\\0&-3&3&-3\\0&3&-3&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-4&1\\0&0&0&0\\0&1&-1&1\end{array}\right),\ r(B)=2.$$

Оскільки $r(A)=r(B)=2$, а кількість невідомих n=3, то система сумісна і має безліч розв'язків.

в) $\begin{cases}x+y+z=6,\\2x-y+z=3,\\x-y+2z=5.\end{cases}$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-3&-1\\0&2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&3&1\\0&-2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&3&1\\0&5&0\end{pmatrix},\ r(A)=3.$$

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\2&-1&1&3\\1&-1&2&5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&-3&-1&-9\\0&2&-1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&9\\0&-3&-1&-9\\0&5&0&10\end{array}\right),\ r(B)=3.$$

$r(A)=r(B)=3=n$ — система сумісна і має єдиний розв'язок.

Відповідь: а) система несумісна; б) сумісна, безліч розв'язків; в) сумісна, єдиний розв'язок.

3. Дослідити на сумісність і розв'язати систему рівнянь, якщо вона сумісна:

а) $\begin{cases}x+2y-z=8,\\2x-y+2z=-6,\\3x+y+4z=-7.\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+2y+3z=-4,\\2x+3y+4z=1,\\3x+4y+5z=6.\end{cases}$

в) $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3+x_4=1,\\2x_1+x_2+7x_3-x_4=5,\\x_1-7x_2+2x_3+4x_4=3.\end{cases}$ г) $\begin{cases}x-y-z=0,\\x+4y+2z=0,\\3x+7y+2z=0.\end{cases}$

д) $\begin{cases}3x-2y+z=0,\\x+2y-3z=0.\end{cases}$

Розв'язання:

а) $\begin{cases} x+2y-z=8, \\ 2x-y+2z=-6, \\ 3x+y+4z=-7. \end{cases}$

Виконаємо елементарні перетворення над розширеною матрицею системи:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & -6 \\ 3 & 1 & 4 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -5 & 4 & -22 \\ 0 & -5 & 7 & -31 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -5 & 4 & -22 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -5 & 4 & -22 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{array}\right).$$

Звідси $r(A)=r(B)=3=n.$ Отже, система сумісна і має єдиний розв'язок. Зі здобутої матриці складемо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x+2y-z=8, \\ -5y+4z=-22, \\ 3z=-9, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=5, \\ -5y=-10, \\ z=-3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=-3. \end{cases}$$

б) $\begin{cases} x+2y+3z=-4, \\ 2x+3y+4z=1, \\ 3x+4y+5z=6. \end{cases}$

Виконаємо елементарні перетворення над розширеною матрицею системи:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Оскільки $r(A)=r(B)=2<n,$ то система рівнянь сумісна і невизначена.

Знайдемо базисний мінор: $M_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-1,$ тоді $x,$ y — базисні невідомі, $z=t,$ $t\in$ IR. Останній вигляд розширеної матриці відповідає такій системі:

$$\begin{cases} x+2y+3z=-4, \\ -y-2z=9, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z+14, \\ y=-9-2z, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t+14, \\ y=-9-2t, \\ z=t,\ t\in \mathrm{IR}. \end{cases}$$

Отже, система рівнянь має безліч розв'язків.

в) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+x_4=1, \\ 2x_1+x_2+7x_3-x_4=5, \\ x_1-7x_2+2x_3+4x_4=3. \end{cases}$

Виконаємо елементарні перетворення над розширеною матрицею системи:

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & -1 & 5 \\ 1 & -7 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Звідси $r(A)=2,\ r(B)=3,$ то система рівнянь несумісна.

г) $\begin{cases} x-y-z=0, \\ x+4y+2z=0, \\ 3x+7y+2z=0. \end{cases}$

Виконаємо елементарні перетворення над розширеною матрицею системи:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Звідси $r(A)=2,\ r(B)=3,$ то система рівнянь сумісна. Оскільки кількість невідомих n=3, то система має єдиний розв'язок: $x=y=$ $=z=0.$

д) $\begin{cases} 3x-2y+z=0, \\ x+2y-3z=0. \end{cases}$

Виконаємо елементарні перетворення над розширеною матрицею системи:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&1&0\\1&2&-3&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&1&0\\0&-8&10&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&1&0\\0&0&6&0\end{array}\right).$$

Оскільки $r(A)=r(B)=2<3$, то система рівнянь сумісна і має безліч розв'язків.

Базисний мінор: $M_2=\begin{vmatrix}3&-2\\1&2\end{vmatrix}=8$, тоді x, y — базисні невідомі, а $z=t,\ t\in\mathrm{IR}$.

$$\begin{cases}x+2y-3z=0,\\-4y+5z=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0,5z,\\y=1,25z,\\z=t,\ t\in\mathrm{IR}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0,5t,\\y=1,25t,\\z=t,\ t\in\mathrm{IR}.\end{cases}$$

Відповідь: а) $x=1,\ y=2,\ z=-3$; б) $x=t+14,\ y=-9-2t,\ z=t,\ t\in\mathrm{IR}$. в) система несумісна; г) $x=y=z=0$; д) $x=\dfrac{1}{2}t,\ y=\dfrac{5}{4}t,\ z=t,\ t\in\mathrm{IR}$.

Домашнє завдання

1. Дослідити на сумісність і знайти розв'язок системи, користуючись методом Гаусса:

а) $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=2,\\x_1+x_3-x_4=4,\\3x_1+2x_2-x_3-2x_4=9,\\x_1+2x_2-2x_3+2x_4=0.\end{cases}$ б) $\begin{cases}4x_1+7x_2+3x_3+3x_4=1,\\2x_1-3x_2+x_3-x_4=5,\\3x_1+2x_2+2x_3+x_4=3,\\x_1+5x_2+x_3+2x_4=-2.\end{cases}$

в) $\begin{cases}4x_1+2x_2+3x_3=-2,\\2x_1+8x_2-x_3=8,\\9x_1+x_2+8x_3=0.\end{cases}$ г) $\begin{cases}x_1+2x_2-3x_4+2x_5=1,\\x_1-x_2-3x_3+x_4-3x_5=2,\\2x_1-3x_2+4x_3-5x_4+2x_5=7,\\9x_1-9x_2+6x_3-16x_4+2x_5=25.\end{cases}$

Відповідь: а) $x_1=2,\ x_2=1,\ x_3=1,\ x_4=-1$;

б) $x_1=\dfrac{19}{13}-\dfrac{8}{13}t_1-\dfrac{1}{13}t_2;\ x_2=-\dfrac{9}{13}-\dfrac{1}{13}t_1-\dfrac{5}{13}t_2;\ x_3=t_1;\ x_4=t_2;\ t_1,\ t_2\in\mathrm{IR}$.

в) система несумісна; г) система несумісна.

3. Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 + 7x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

Відповідь: а) $\left(2x_2 + \frac{2}{7}x_4;\ x_2;\ -\frac{5}{7}x_4;\ x_4\right)$; б) $(0;\ 0;\ 0;\ 0)$;
в) $\left(-\frac{3}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_5;\ \frac{5}{8}x_3 + \frac{5}{8}x_5;\ x_3;\ 0;\ x_5\right)$.

ПІДМОДУЛЬ 4

Вектори

4.1. Вектори, дії з ними

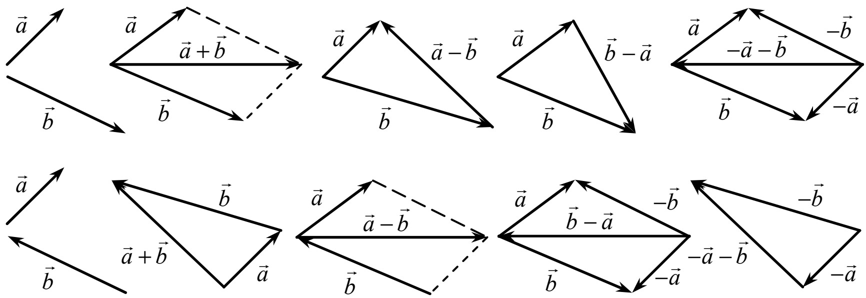
Питання для перевірки теоретичних знань

1. Які величини називаються скалярними, векторними? Наведіть приклади.
2. Записати формулу довжини вектора.
3. Правило трикутника і паралелограма для додавання векторів.
4. Який вектор називається одиничним?
5. Які вектори називаються колінеарними, компланарними?

Завдання для аудиторної роботи

1. За векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектори:
1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $\vec{b} - \vec{a}$; 4) $-\vec{a} - \vec{b}$.

Розв'язання.



2. Як повинні бути розташовані вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб модуль їх суми $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ дорівнював модулю їх різниці $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$?

Розв'язання.

Довжина більшої діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\bar{b}$, дорівнює $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$, а меншої — $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$. Довжина діагоналі $(\vec{a}+\vec{b})$ дорівнюватиме довжині діагоналі $(\vec{a}-\vec{b})$, якщо паралелограм буде прямокутником. Отже, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$, якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Відповідь. $\vec{a}\perp\vec{b}$.

3. Задано вектори: $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$. Знайти їх суму та різницю.

Розв'язання.

Оскільки при додаванні векторів їх проекції додаються, а при різниці — віднімаються, то

$$\vec{a}+\vec{b}=(2+3)\vec{i}+(3-2)\vec{j}+(5+5)\vec{k}=5\vec{i}+\vec{j}+10\vec{k};$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(2-3)\vec{i}+(3+2)\vec{j}+(5-5)\vec{k}=-\vec{i}+5\vec{j}.$$

Відповідь. $5\vec{i}+\vec{j}+10\vec{k}$; $-\vec{i}+5\vec{j}$.

4. Знайти косинуси кутів, які вектор $\overrightarrow{AB}$ утворює з осями координат, якщо $A(1;\,2;\,3)$, $B(2;\,4;\,5)$.

Розв'язання:

Координати вектора $\overrightarrow{AB}$:

$a_x=2-1=1;\ a_y=4-2=2;\ a_z=5-3=2.$

Довжина вектора $\overrightarrow{AB}$: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$

Напрямні косинуси вектора:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{1}{3}, \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{2}{3}, \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{2}{3}.$$

Відповідь: $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$.

5. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$ та їх довжину, якщо: $A(5; -1; 2)$, $B(1; 2; 1)$.

Розв'язання:

$\overrightarrow{AB} = \{-4; 3; -1\}$, $\overrightarrow{BA} = \{4; -3; 1\}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{16 + 9 + 1} = \sqrt{26}.$

Відповідь: $\{-4; 3; -1\}$, $\{4; -3; 1\}$, $\sqrt{26}.$

6. Визначити початок вектора $\vec{a} = \{2; -3; -1\}$, якщо його кінець збігається з точкою $\{1; -1; 2\}$.

Розв'язання.

Нехай кінець вектора $\vec{a}$ знаходиться в точці $B(1; -1; 2)$, а початок — у точці $A(x; y; z)$, тоді координати вектора $\vec{a}$: $\{2; -3; -1\} = \{1 - x; -1 - y; 2 - z\}$.

Звідси координати початку вектора $\vec{a}$: $x = -1$, $y = 2$, $z = 3$.

Відповідь. $(-1; 2; 3)$.

7. Знайти точку *N*, з якою збігається кінець вектора $\vec{a} = \{3; -1; 4\}$, якщо його початок збігається з точкою $M(1; 2; -3)$.

Розв'язання.

Нехай точка *N* має координати (x_2, y_2, z_2), точка $M - (x_1; y_1; z_1)$.

Тоді, $x_2 = a_x + x_1 = 3 + 1 = 4$; $y_2 = -1 + 2 = 1$; $z_2 = 4 + (-3) = 1$.

Відповідь. $N(4; 1; 1)$.

8. Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо $|\vec{a}| = 4$, кути, які він утворює з осями координат: $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$.

Розв'язання.

$$a_x = |\vec{a}|\cos\alpha = 4\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2};\ \ a_y = |\vec{a}|\cos\beta = 4\frac{1}{2} = 2,$$
$$a_z = 4\cos120° = -2.$$

Відповідь. $\left\{2\sqrt{2};\ 2;\ -2\right\}.$

9. Чи може вектор утворювати з координатними осями кути: $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 45°$?

Розв'язання.

$$\cos^2 60° + \cos^2 120° + \cos^2 45° = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1.$$

Відповідь. Так.

10. Визначити, при яких значеннях α, β вектори $\vec{a} = \{-6;\ \beta;\ 2\}$, $\vec{b} = \{\alpha;\ 4;\ -1\}$ — колінеарні.

Розв'язання.

За умовою колінеарності двох векторів:

$$\frac{-6}{\alpha} = \frac{\beta}{4} = \frac{2}{-1}, \quad \text{звідки} \quad \beta = -8,\ \alpha = 3.$$

Відповідь. $\alpha = 3, \beta = -8$.

11. Знайти вершини трикутника *ABC*, знаючи середини його сторін: $M(1;-1)$, $N(-2;4)$, $P(-3;2)$.

Розв'язання.

Нехай координати точок *A*, *B*, *C* дорівнюють відповідно $(x_A;y_A),(x_B;y_B),(x_c;y_c)$.

Тоді, за формулами координат середини відрізка:

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_B}{2} = 1, & \dfrac{y_A + y_B}{2} = -1, \\ \dfrac{x_A + x_c}{2} = -2, & \dfrac{y_A + y_c}{2} = 4, \\ \dfrac{x_B + x_C}{2} = -3, & \dfrac{y_B + y_C}{2} = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 2 - x_B, & y_A = 2 - y_B, \\ x_A = -4 - x_C, & y_A = 8 - y_C, \Rightarrow \\ x_B + x_C = -6, & y_B = 4 - y_C; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = 2 - x_B, & y_A = 2 - y_C, \\ -2 + x_B = 4 + x_C, & 2 + y_B = -8 + y_C, \\ 6 + x_C + x_C = -6, & -10 + y_C + y_C = 4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 2 - x_B, y_A = 8 - y_C, \\ x_B = 6 + x_C, y_B = -10 + y_C, \\ x_C = -6, y_C = 7; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_C = -6, y_C = 7, \\ x_B = 0, y_B = -3, \\ x_A = 2, y_A = 1; \end{cases} \Rightarrow A(2;1),\ B(0;-3),\ C(-6;7).$$

Відповідь. $A(2;1)$, $B(0;-3)$, $C(-6;7)$.

12. Відрізок, обмежений точками $A(2;-2)$, $B(5;4)$, поділено точками C і D на три рівні частини. Знайти координати точок поділу.

Розв'язання.

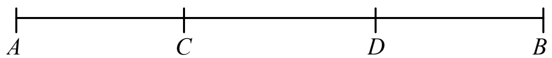
За формулами поділу відрізка AB, де $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ у відношенні λ

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad \lambda_C = \frac{CB}{AC} = \frac{2}{1}.$$

$$x_C = \frac{x_2 + 2\cdot x_1}{1+2} = \frac{5+4}{3} = 3; \quad y_C = \frac{y_2 + 2\cdot y_1}{1+2} = \frac{4-4}{3} = 0.$$ Отже, $C(3;0)$.

$$\lambda_D = \frac{AD}{DB} = 2; \ x_D = \frac{x_1 + 2x_2}{1+2}; \ y_D = \frac{y_1 + 2y_2}{1+2}; \ x_D = \frac{2 + 2\cdot 5}{1+2} = 4;$$

$$y_D = \frac{-2 + 2\cdot 4}{1+2} = 2.$$ Отже, $D(4;2)$.



Відповідь. (3; 0), (4; 2).

13. Дано точки $A(2;1)$, $B(-1;3)$, $C(-2;5)$. Знайти їхні координати в новій системі, якщо початок координат перенесено (без зміни напряму осей) у точку B.

Розв'язання.

Нехай координати точок *A, C* в новій системі координат X_A, Y_A, X_C, Y_C.

Тоді,

$$X_A = x_A - x_B = 2 + 1 = 3, \quad X_C = x_C - x_B = -2 + 1 = -1,$$
$$Y_A = y_A - y_B = 1 - 3 = -2, \quad Y_C = y_C - y_B = 5 - 3 = 2.$$

Отже, в новій системі координат $A(3;-2)$, $C(-1;2)$.

Відповідь. $A(3;-2)$, $B(0;0)$, $C(-1;2)$.

14. Дано дві точки $A(2;-1)$, $B(1;1)$. Знайти координати точки N, яка симетрична точці B відносно точки A.

Розв'язання.

Нехай точка N має координати $(x_1;y_1)$, точка $B(x_2;y_2)$. Тоді точки $A(x;y)$ – середина відрізка BN. Згідно з формулами (5.2) отримуємо

$2=\dfrac{x_1-1}{2}$; $-1=\dfrac{y_1-1}{2}$. $N(3;-3)$. Звідси $x_1=4-1=3$; $y_1=-2-1=-3$.

Відповідь. $N(3;-3)$.

15. Дано: $|\vec a|=13$, $|\vec b|=19$, $|\vec a+\vec b|=24$. Обчислити $|\vec a-\vec b|$.

Розв'язання.

$$|\vec a+\vec b|=\sqrt{(\vec a+\vec b)^2}=\sqrt{\vec a^2+2\vec a\vec b+\vec b^2}=\sqrt{530+2\vec a\vec b},$$

$$24=\sqrt{530+2\vec a\vec b}, \qquad 46=2\vec a\vec b.$$

$$|\vec a-\vec b|=\sqrt{(\vec a-\vec b)^2}=\sqrt{\vec a^2-2\vec a\vec b+\vec b^2}=\sqrt{530-46}=\sqrt{484}=22.$$

Відповідь. 22.

Домашнє завдання

1. Дано: $|\vec a|=11$, $|\vec b|=23$, $|\vec a-\vec b|=30$. Визначити $|\vec a+\vec b|$.

Відповідь. $|\vec a+\vec b|=20$.

2. Знайти $|\vec a+\vec b|$ і $|\vec a-\vec b|$, якщо $\vec a\perp\vec b$ і $|\vec a|=5$; $|\vec b|=12$.

Відповідь. $|\vec a+\vec b|=|\vec a-\vec b|=13$.

3. Три сили $\vec F_1$, $\vec F_2$, $\vec F_3$ прикладені в одній точці і мають взаємно перпендикулярні напрями. Обчислити модуль їх рівнодійної, якщо $|\vec F_1|=10$ Н, $|\vec F_2|=11$ Н, $|\vec F_3|=2$ Н.

Відповідь. 15Н.

4. У ромбі $ABCD$ дано вектори-діагоналі $\overrightarrow{AC}=\vec a$, $\overrightarrow{BD}=\vec b$. Розкласти по цих векторах усі вектори — сторони ромба: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

Відповідь. $\overrightarrow{AB}=\frac{\vec{a}}{2}-\frac{\vec{b}}{2};\ \overrightarrow{BC}=\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{b}}{2};\ \overrightarrow{CD}=-\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{b}}{2};\ \overrightarrow{DA}=\frac{\vec{a}}{2}-\frac{\vec{b}}{2}.$

5. Дано точки $A(-1;\,5;\,-10)$, $B(5;\,-7;\,8)$, $C(2;\,2;\,-7)$, $D(5;-4;\,2)$. Перевірити, чи колінеарні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$. Встановити, який з них довший від іншого і в скільки разів; як вони напрямлені — в один бік чи в протилежні.

Відповідь. $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}$, в один бік.

6. У правильному шестикутнику $ABCDEF$ дано $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{n}$. Розкласти по цих векторах $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$ і $\overrightarrow{EF}$.

Відповідь. $\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n},\ \overrightarrow{AD}=\vec{m}+\vec{n},\ \overrightarrow{AF}=-\frac{1}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n},\ \overrightarrow{EF}=$
$=-\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}.$

7. Дано координати двох суміжних вершин паралелограма $A\left(-4\frac{1}{2};\,-7\right)$, $B(2;\,6)$ і точку перетину діагоналей $M\left(3;\,1\frac{1}{2}\right)$. Знайти координати двох інших вершин паралелограма.

Відповідь. $C\left(10\frac{1}{2};\,10\right)$, $D(4;\,-3)$.

ПІДМОДУЛЬ 5
Скалярний добуток векторів

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається...
2. Сформулювати умову перпендикулярності векторів.
3. Сформулювати алгебричні властивості скалярного добутку.
4. Записати формулу скалярного добутку векторів у координатній формі.
5. Сформулювати геометричні властивості скалярного добутку.

Завдання для аудиторної роботи

1. Яку умову мають задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб вектор $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ був перпендикулярний до вектора $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$?

Розв'язання.

За умовою перпендикулярності векторів $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\Rightarrow$ $\Rightarrow\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$, звідки $\vec{a}^2-\vec{b}^2=0$, тому $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$.

Відповідь. $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$.

2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=60°$, $\left|\vec{a}\right|=5$, $\left|\vec{b}\right|=8$. Знайти $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ і $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

Розв'язання.

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2}=\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2+2\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi+\left|\vec{b}\right|^2}=$$
$$=\sqrt{25+2\cdot5\cdot8\cos60°+64}=\sqrt{25+64+80\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{129}.$$
$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2}=\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2-2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi+\left|\vec{b}\right|^2}=\sqrt{25+64-40}=7.$$

Відповідь. $\sqrt{129}$; 7.

3. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $\frac{2\pi}{3}$, $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=3$. Обчислити: а) $\vec{a}^2$; б) $(3\vec{b}-2\vec{a})\cdot(\vec{b}+2\vec{a})$.

Розв'язання.

а) $\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|=16$;

б) $(3\vec{b}-2\vec{a})(\vec{b}+2\vec{a})=3\vec{b}^2+6\vec{a}\vec{b}-2\vec{a}\vec{b}-4\vec{a}^2=27+4\cdot4\cdot3\left(-\frac{1}{2}\right)-$ $-64=-61$.

Відповідь: а) 16; б) –61.

4. Обчислити скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{p}$ і $\vec{q}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

Розв'язання.

$$\vec{a}\vec{b} = \left(3\vec{p} - 2\vec{q}\right)\left(\vec{p} + 4\vec{q}\right) = 3\vec{p}^2 - 8\vec{q}^2 = 3 - 8 = -5.$$

Відповідь. –5.

5. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{m} + 2\vec{n}$ і $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$, якщо $\left|\vec{m}\right| = 4\sqrt{2}$, $\left|\vec{n}\right| = 6$, кут між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$ дорівнює $\dfrac{\pi}{4}$.

Розв'язання.

Діагоналі паралелограма $(\vec{a} + \vec{b})$ і $(\vec{a} - \vec{b})$,

$$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|(5\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{n} + \vec{m})\right| = \left|6\vec{m} - \vec{n}\right| = \sqrt{(6\vec{m} - \vec{n})^2} =$$

$$= \sqrt{36\vec{m}^2 - 12\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|\cos\frac{\pi}{4} + \vec{n}^2} = \sqrt{1152 - 288 + 36} = 30;$$

$$\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \left|(4\vec{m} + 5\vec{n})\right| = \sqrt{(4\vec{m} + 5\vec{n})^2} =$$

$$= \sqrt{16\vec{m}^2 + 40\left|\vec{m}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|\cos\frac{\pi}{4} + 25\vec{n}^2} = \sqrt{512 + 960 + 900} = 2\sqrt{593}.$$

Відповідь. $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 30$; $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 2\sqrt{593}$.

6. Знайти косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = \{4; -10; 1\}$, $\vec{b} = \{11; -8; -7\}$.

Розв'язання.

$$\cos\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|},$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{4^2 + (-10)^2 + 1^2} = \sqrt{117},\ \left|\vec{b}\right| = \sqrt{11^2 + (-8)^2 + (-7)^2} = \sqrt{234}.$$

$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 44 + 80 - 7 = 117,\ \cos\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Відповідь. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

7. Дано три вектори $\vec{a} = \{3; -6; 21\}$, $\vec{b} = \{1; 4; -5\}$, $\vec{c} = \{3; -4; 12\}$. Обчислити $\text{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$.

Розв'язання.

$$\text{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\text{пр}_{\vec{c}}\vec{a}+\text{пр}_{\vec{c}}\vec{b};$$

$$\text{пр}_{\vec{c}}\vec{a}=\frac{\vec{c}\vec{a}}{\left|\vec{c}\right|}=\frac{9+24+252}{\sqrt{9+16+144}}=\frac{285}{\sqrt{169}}=\frac{285}{13};$$

$$\text{пр}_{\vec{c}}\vec{b}=\frac{\vec{c}\vec{b}}{\left|\vec{c}\right|}=\frac{3-16-60}{13}=-\frac{73}{13};$$

$$\text{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{285-73}{13}=\frac{212}{13}.$$

Відповідь. $\frac{212}{13}$.

8. Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{F}=\{3;\,2;\,4\}$, якщо її точка прикладання переміщується з положення $A(2;\,4;\,6)$ в положення $B(4;\,2;\,7)$. Під яким кутом до вектора AB напрямлена сила $\vec{F}$?

Розв'язання.

Знайдемо $\vec{S}=\overrightarrow{AB}=\{2;\,-2;\,1\}$. Отже, робота A, яку виконує сила $\vec{F}$ при переміщенні $\vec{S}$: $A=\vec{F}\vec{S}=3\cdot 2+2(-2)+4\cdot 1=6.$

Кут між $\vec{F}$ і $\vec{S}$ знайдемо за формулою $\cos\varphi=\frac{\vec{F}\vec{S}}{\left|\vec{F}\right|\left|\vec{S}\right|}$, тобто

$$\cos\varphi=\frac{6}{\sqrt{9+4+16}\sqrt{4+4+1}}=\frac{2}{\sqrt{29}},\qquad \varphi=\arccos\frac{2}{\sqrt{29}}.$$

Відповідь. 6; $\arccos\frac{2}{\sqrt{29}}$.

Домашнє завдання

1. Знайти довжину медіан трикутника, знаючи координати його вершин: $A(3;\,-2)$, $B(5;\,2)$, $C(-1;\,4)$.

Відповідь. $\sqrt{26},\sqrt{17},\sqrt{41}$.

2. Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо відомі кути α, β, γ, які він утворює з осями координат Ox, Oy, Oz і його довжина.

1) $\left|\vec{a}\right|=4$, $\alpha=60°$, $\beta=45°$, $\gamma=60°$;

2) $|\vec{a}|=8,\ \alpha=135°,\ \beta=60°,\ \gamma=60°.$

Відповідь 1) $\left\{2;\ 2\sqrt{2};\ 2\right\}$; 2) $\left\{-8\sqrt{2};\ 2;\ 2\right\}$.

3. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $\frac{2\pi}{3}$, $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$. Обчислити: а) $\vec{a}\vec{b}$; б) $(\vec{a}+\vec{b})^2$.

Відповідь: а) –6; б) 13.

4. Знайти довжину вектора $\vec{a}=6\vec{m}-8\vec{n}$, якщо $\vec{m}$ і $\vec{n}$ — одиничні, взаємно перпендикулярні вектори.

Відповідь. 10.

5. Знайти косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a}=\left\{1;\ -2;\ 2\right\}$, $\vec{b}=\left\{-6;\ 4;\ 12\right\}$; б) $\vec{a}=5\vec{i}+6\vec{j}$, $\vec{b}=6\vec{i}-5\vec{j}$.

Відповідь: а) $\cos\varphi=\frac{5}{21}$; б) $\cos\varphi=0$.

6. Дано дві точки $M(-6;\ 6;\ -7)$, $N(6;\ -10;\ 8)$. Обчислити проекцію вектора $\vec{s}=\left\{2;\ -6;\ 2\right\}$ на вісь $\overrightarrow{MN}$.

Відповідь. 6.

7. Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{F}=\left\{2;\ 3;\ -5\right\}$, коли її точка прикладання переміщується з початку в кінець вектора $\vec{S}=\left\{-7;\ 2;\ -5\right\}$.

Відповідь. 17.

8. Знайти проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь вектора $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\{0;\ 3;\ -4\}$, $\vec{b}=\{6;\ 4;\ 3\}$.

Відповідь. 0.

ПІДМОДУЛЬ 6

Векторний і мішаний добутки векторів

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Записати формулу для знаходження векторного добутку.
2. Чому дорівнює об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$?

3. Записати формулу для знаходження площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

4. Сформулювати основні властивості векторного добутку.

5. Умова компланарності трьох векторів.

Завдання для аудиторної роботи

1. Знайти модуль векторного добутку $\vec{a}\times\vec{b}$, якщо: $|\vec{a}|=\dfrac{3}{\sqrt{3}}$, $|\vec{b}|=4$, кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $\dfrac{\pi}{3}$.

Розв'язання.

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right),\qquad \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=4\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}=6.$$

Відповідь. 6.

2. Знайти векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a}=2\vec{i}+11\vec{j}-10\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}$;

б) $\vec{a}=\{1;-5;3\}$, $\vec{b}=\{0;-1;-3\}$.

Розв'язання:

а) $$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 11 & -10\\ 3 & 6 & -2\end{vmatrix}=38\vec{i}-26\vec{j}-21\vec{k};$$

б) $$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -5 & 3\\ 0 & -1 & -3\end{vmatrix}=18\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}.$$

Відповідь: а) $38\vec{i}-26\vec{j}-21\vec{k}$; б) $18\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$.

3. Дано: $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\times\vec{b}=12$. Обчислити $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

Розв'язання.

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi,\qquad \cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{12}{10\cdot 2}=\frac{12}{20}=0{,}6.$$

$$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1\Rightarrow\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\sqrt{1-0{,}36}=0{,}8.$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=10\cdot 2\cdot 0{,}8=16.$$

Відповідь. 16.

4. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$. Обчислити $\left|\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\right|$.

Розв'язання.

$$\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=3\left(\vec{a}\times\vec{a}\right)-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)+2\left(\vec{b}\times\vec{b}\right)-6\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=$$

$$=-6\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=-5\left(\vec{a}\times\vec{b}\right);$$

$$\left|-5\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right|=5|\vec{a}||\vec{b}|\sin\frac{\pi}{2}=60.$$

Відповідь. 60.

5. Обчислити площу трикутника ABC, заданого вершинами $A(1;-1;-1)$, $B(0;1;2)$, $C(2;1;0)$.

Розв'язання.

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|;$$

$$\overrightarrow{AB}=\{-1;2;3\},\ \overrightarrow{AC}=\{1;2;1\};$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-4\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{k};\ \ S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+4^2+4^2}=2\sqrt{3}.$$

Відповідь. $2\sqrt{3}$ (кв. од.)

6. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо: а) $\vec{a}=\{4;-4;2\}$, $\vec{b}=\{2;3;6\}$; б) $\vec{a}=\{3;4;1\}$, $\vec{b}=\{2;3;1\}$.

Розв'язання:

а) Із формули $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$ маємо

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|},\quad |\vec{a}|=\sqrt{16+16+4}=6,\quad |\vec{b}|=\sqrt{4+9+36}=7,$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -4 & 2\\ 2 & 3 & 6\end{vmatrix}=-30\vec{i}-20\vec{j}+20\vec{k},$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{30^2+20^2+20^2}=\sqrt{1700}=10\sqrt{17},$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{1700}}{6\cdot 7} = \frac{5\sqrt{17}}{21}.$$

б) $$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \frac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|},$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}, \quad \left|\vec{b}\right| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14},$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \quad \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3},$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{26}\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{91}}.$$

Відповідь: а) $\dfrac{5\sqrt{17}}{21}$; б) $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{91}}$.

7. Обчислити мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, якщо:

а) $\vec{a} = \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i}$;

б) $\vec{a} = -4\vec{i} - 3\vec{j} - 9\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{k}$, $\vec{c} = -5\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

Розв'язання:

а) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1;$ б) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -4 & -3 & -9 \\ 1 & 0 & -1 \\ -5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 46.$

Відповідь: а) –1; б) 46.

8. З'ясувати, чи належать точки $A(2;-1;5)$, $B(-1;\ 2;\ 3)$, $C(1;\ 1;\ -1)$ і $D(3;\ 0;\ 3)$ одній площині.

Розв'язання.

Утворимо вектори $\overrightarrow{AB} = \{-3;\ 3;-2\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-1;2;-6\}$, $\overrightarrow{AD} = \{1;1;-2\}$. Обчислимо мішаний добуток цих векторів:

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -24 \neq 0.$$

Тому, за властивістю мішаного добутку дані точки не належать одній площині.

Відповідь. Ні.

9. Знайти об’єм паралелепіпеда, побудованого на заданих векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо $\vec{a} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

Розв’язання.

$$V_{\text{пар}} = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|; \qquad \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -76; \qquad V_{\text{пар}} = 76.$$

Відповідь. 76 (куб. од.).

10. Обчислити об’єм трикутної піраміди, вершини якої знаходяться в точках $A(2;\ 1;\ -1)$, $B(3;\ -2;\ 7)$, $C(2;\ -1;\ 0)$, $D(1;\ 4;\ -3)$.

Розв’язання.

Об’єм піраміди дорівнює $\dfrac{1}{6}$ об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$. Знайдемо ці вектори: $\overrightarrow{AB} = \{1;\ -3;\ 8\}$, $\overrightarrow{AC} = \{0;\ -2;\ 1\}$, $\overrightarrow{AD} = \{-1;\ 3;\ -2\}$.

Об’єм паралелепіпеда дорівнює модулю мішаного добутку векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$, тобто $V_{\text{пар}} = \left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right|$. Обчислюємо мішаний добуток:

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 8 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -12.$$

Отже, $V_{\text{пар}} = 12.$ Тоді об’єм трикутної піраміди

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{6} V_{\text{пар}} = \frac{12}{6} = 2 \text{ (куб. од.).}$$

Відповідь. 2 (куб. од.).

11. Перевірити чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо: $\vec{a} = \{2;3;-1\}$, $\vec{b} = \{1;\ -1;\ 3\}$, $\vec{c} = \{1;\ 9;\ -1\}$.

Розв’язання.

Якщо $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0,$ то $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — компланарні.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -1 \end{vmatrix} = -50 \neq 0.$$

Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — не компланарні.

Відповідь. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — не компланарні.

12. Довести, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис і розкласти вектор $\vec{d}$ за базисом, якщо: $\vec{a}=\{2;1;-3\}$, $\vec{b}=\{3;-2;1\}$, $\vec{c}=\{-1;0;-2\}$, $\vec{d}=\{-2;\,2;\,1\}$.

Розв'язання.

Якщо $\vec{a}\vec{b}\vec{c}\neq 0$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}2 & 1 & -3\\ 3 & -2 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{vmatrix}=19\neq 0.$$

Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис.

Розкладемо вектор $\vec{d}$ за цим базисом: $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$, тоді

$$\begin{cases}2\alpha+3\beta-\gamma=-2,\\ \alpha-2\beta=2,\\ -3\alpha+\beta-2\gamma=1.\end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & -1 & -2\\ 1 & -2 & 0 & 2\\ -3 & 1 & -2 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 0 & -2\\ 2 & 3 & -1 & -2\\ -3 & 1 & -2 & 1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 0 & 2\\ 0 & 7 & -1 & -6\\ 0 & -5 & -2 & 7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 0 & 2\\ 0 & -14 & 2 & 12\\ 0 & -5 & 2 & 7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 2\\ 0 & -14 & 2 & 12\\ 0 & -19 & 0 & 19\end{array}\right),$$

тоді $\alpha=0$, $\beta=-1$, $\gamma=-1$. Отже, $\vec{d}=-\vec{b}-\vec{c}$.

Відповідь. $\vec{d}=-\vec{b}-\vec{c}$.

13. Знайти об'єм тетраедра, заданого вершинами $A(2;\,-1;\,0)$, $B(5;\,5;\,3)$, $C(3;\,2;\,-2)$, $D(4;\,1;\,2)$.

Розв'язання.

$V=\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right|$ — об'єм тетраедра.

Координати векторів $\overrightarrow{AB}=\{3;6;3\}$, $\overrightarrow{AC}=\{1;\ 3;\ -2\}$, $\overrightarrow{AD}=\{2;\ 2;\ 2\}$. Отже,

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=3.$$

Відповідь. 3 (куб.од.).

Домашнє завдання

1. На площині задано трикутник з вершинами $A(1;\,1)$, $B(3;\,1)$, $C(2;\,0)$. Знайти кут, утворений стороною BC і медіаною CM цього трикутника.

Відповідь. 45°.

2. Обчислити площу трикутника ABC, заданого вершинами $A(-1;-1;-1)$, $B(0;\,1;\,2)$, $C(2;\,1;\,0)$.

Відповідь: $2\sqrt{6}$ (куб.од.).

3. У тетраедрі з вершинами в точках: $A(1;-2;\,-1)$, $B(4;\,4;\,4)$, $C(2;\,1;\,-1)$, $D(3;\,0;\,3)$ обчислити висоту DE.

Відповідь. $\dfrac{8}{\sqrt{259}}$ (од.).

4. Довести, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис, розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом, якщо:

а) $\vec{a}=\{0;\,1;\,2\}$, $\vec{b}=\{-1;\,0;\,3\}$, $\vec{c}=\{1;\,2;\,-5\}$, $\vec{d}=\{0;\,3;\,0\}$;

б) $\vec{a}=\{2;\,1;\,1\}$, $\vec{b}=\{1;\,2;\,-2\}$, $\vec{c}=\{1;\,1;2\}$, $\vec{d}=\{4;\,3;\,-2\}$.

Відповідь: а) $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; б) $\vec{d}=2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

5. Об'єм піраміди $V=5$ куб.од., три її вершини лежать у точках $A(2;\,-1;\,1)$, $B(3;\,0;\,1)$, $C(2;\,-1;\,3)$. Знайти координати четвертої вершини D, якщо відомо, що вона лежить на осі Oy.

Відповідь. $D_1(0;\,13;\,0)$, $D_2=(0;\,-17;\,0)$.

ПІДМОДУЛЬ 7
Пряма лінія на площині

7.1. Різні форми рівняння прямої на площині

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Запишіть рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.
2. Запишіть рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
3. Запишіть рівняння прямої у відрізках на осях.
4. Запишіть параметричні рівняння прямої.
5. Відстань від точки до прямої дорівнює...

Завдання для аудиторної роботи

1. Дано координати двох точок $M_1(1;\ 2)$, $M_2(-1;\ 0)$. Записати:
а) загальне рівняння прямої;
б) параметричне рівняння прямої.
Розв'язання.
а) Запишемо рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(1;\ 2)$, $M_2(-1;\ 0)$. З формули $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\Rightarrow\frac{x-1}{-1-1}=\frac{y-2}{0-2}$; $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{-2}$; $x-1=y-2$; $x-y+1=0$ — загальне рівняння прямої.

б) З канонічного рівняння прямої $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{-2}$ знаходимо параметричне рівняння. Для цього в рівнянні $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{-2}$ значення відношень позначимо параметром t: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{-2}=t$. Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{-2}=t,\\[2mm] \dfrac{y-2}{-2}=t,\end{cases}$$

отримаємо: $\begin{cases} x = -2t + 1, \\ y = -2t + 2 \end{cases}$ — параметричне рівняння прямої.

Відповідь: а) $x - y + 1 = 0$; б) $\begin{cases} x = -2t + 1, \\ y = -2t + 2. \end{cases}$

2. Дано загальне рівняння прямої $12x - 5y - 65 = 0.$ Записати:
а) рівняння з кутовим коефіцієнтом;
б) рівняння у відрізках;
в) нормальне рівняння.

Розв'язання.
а) Запишемо рівняння відносно змінної y, отримаємо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y = \frac{12}{5}x - 13$, де $k = \frac{12}{5}$, $b = -13.$

б) Перенесемо вільний член загального рівняння в праву частину та поділимо рівняння прямої на 65. Маємо: $\frac{12x}{65} - \frac{5y}{65} = 1.$ Запишемо останнє рівняння у вигляді $\frac{x}{\frac{65}{12}} + \frac{y}{-\frac{65}{5}} = 1$ й дістанемо рівняння прямої у відрізках.

в) Знайдемо нормований множник (застосовуючи формулу $\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$) $\mu = \frac{1}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{1}{13}$. Помноживши обидві частини загального рівняння на нормований множник, отримаємо нормальне рівняння прямої $\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 5 = 0.$

Відповідь: а) $y = \frac{12}{5}x - 13$; б) $\frac{x}{\frac{65}{12}} + \frac{y}{-\frac{65}{5}} = 1$; в) $\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 5 = 0.$

3. Дано точки $M_1(0;1)$, $M_2(1;-3)$, $M_3(0;-2)$ — вершини трикутника $M_1M_2M_3$. Складіть:
а) загальне рівняння сторони M_1M_2;
б) канонічне рівняння висоти M_1D;
в) параметричне рівняння медіани M_2M.

Розв'язання.

а) Оскільки відомі координати точок $M_1(0;1)$, $M_2(1;-3)$, то згідно з рівнянням $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ маємо: $\dfrac{x-0}{1-0}=\dfrac{y-1}{-3-1}$, $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-4}$, $y-1=-4x$, звідки $4x+y-1=0$ — загальне рівняння прямої, що містить сторону M_1M_2.

б) Щоб записати канонічне рівняння прямої, потрібно знати точку, через яку проходить пряма, і напрямний вектор. Вектор $\overrightarrow{M_2M_3}=\{-1;1\}$ для висоти M_1D є нормальним вектором, тоді вектор $\vec{a}=\{1;1\}$ буде перпендикулярним до вектора $\overrightarrow{M_2M_3}$ (оскільки скалярний добуток $\overrightarrow{M_2M_3}\cdot\vec{a}=0$). Тепер записуємо канонічне рівняння прямої M_1D: $\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y-1}{1}$.

в) Оскільки точка M — середина відрізка M_1M_3, то $x_M=\dfrac{0+0}{2}=$ $=0$, $y_M=\dfrac{1-2}{2}=-0{,}5$. Вектор $\overrightarrow{M_2M}=\{0-1;-0{,}5+3\}=\{-1;\,2,5\}$ — напрямний вектор прямої M_2M. Отже, $l=-1$, $m=2{,}5$ і параметричне рівняння медіани записуємо так:

$$\begin{cases} x=1-t, \\ y=-3+2{,}5t, \end{cases} \quad t\in IR.$$

4. Дано пряму $y-2x-1=0$ і точку $M(-1;2)$. Написати рівняння прямої, що проходить через точку M:

а) перпендикулярно до заданої прямої;

б) паралельно до заданої прямої;

в) під кутом 45° до прямої.

Розв'язання.

а) Кутовий коефіцієнт прямої $y-2x-1=0$ дорівнює $k_1=2$. З умови перпендикулярності двох прямих $k_1\cdot k_2=-1$ знаходимо кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої $y-2x-1=0$, який дорівнює $k_2=-\dfrac{1}{2}$. Отже, за формулою $(y-y_0)=k(x-x_0)$ знаходимо шукане рівняння прямої

$$(y-2)=-\frac{1}{2}(x+1), \quad x+2y-3=0.$$

б) Використовуючи умову паралельності двох прямих $k_1 = k_2$, знайдемо рівняння прямої, яка проходить через точку M паралельно до заданої прямої $y-2x-1=0$.

Оскільки $k_1 = k_2 = 2$, то рівняння прямої набуває вигляду:

$$(y-2)=2(x+1), \quad \text{або} \quad 2x-y+4=0.$$

в) За формулою тангенса кута між прямими $\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$; знайдемо k_2:

— $k_1 = 2$, $\varphi = 45°$; $\operatorname{tg}45° = \frac{k_2 - 2}{1 + 2k_2}$; $1 + 2k_2 = k_2 - 2$; $k_2 = -3$; $y-2=-3(x+1)$; $-3x-y-1=0$; $y=-3x-1$;

— $k_2 = 2$, $\varphi = 45°$; $\operatorname{tg}45° = \frac{2-k_1}{1+2\cdot k_1}$; $1+2k_1 = 2-k_1$; $3k_1 = 1$; $k_1 = \frac{1}{3}$; $y-2=\frac{1}{3}(x+1)$; $y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$.

Тоді рівняння прямої може набувати вигляду: $y=-3x-1$ або $y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$.

Відповідь: а) $x+2y-3=0$; б) $2x-y+4=0$; в) $y=-3x-1$; $y= =\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$.

5. З'ясувати, чи перетинає пряма $2x+3y+5=0$ відрізок, обмежений точками $M_1(-1;\ 3)$, $M_2(2;\ -5)$. Знайти перетин прямої з відрізком M_1M_2.

Розв'язання.

1) Рівняння прямої M_1M_2 має вигляд $\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-3}{-5-3}$. Звідси $-8x-8=3y-9$, $8x+3y-1=0$.

2) Знайдемо точку перетину M_1M_2 і заданої прямої

$$\begin{cases} 2x+3y+5-0, \\ 8x+3y-1=0, \end{cases} \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} x=1, \\ y=-\dfrac{7}{3}. \end{cases}$$

Відповідь. Координати точки перетину (1; –7/3).

6. Записати рівняння прямої у відрізках, яка проходить через точку $M_0(-1;\, 2)$ і має напрямний вектор $\vec{S}\{3;\,-1\}$. Знайти відстань від початку координат до прямої.

Розв'язання.

Підставляючи координати точки $M_0(-1;\, 2)$ та напрямний вектор $\vec{S}\{3;\,-1\}$ у канонічне рівняння прямої, отримаємо

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \Rightarrow \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}, \quad -x-1=3y-6,$$

отже, $x+3y-5=0$ — загальне рівняння прямої.

Поділивши рівняння прямої на 5, дістаємо $\frac{x}{5}+\frac{y}{\frac{5}{3}}=1$ — рівняння прямої у відрізках на осях.

За формулою $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ знаходимо відстань від початку координат до прямої $x+3y-5=0$, маємо:

$$d=\frac{|0+3\cdot 0-5|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Відповідь: $\frac{x}{5}+\frac{y}{\frac{5}{3}}=1;\ \ d=\dfrac{\sqrt{10}}{2}.$

7. Обчислити відстань від точки $M(1;\, 1)$ до прямої $x=-1+2t$, $y=2+t$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння прямої (яка задана у параметричній формі) у загальному вигляді:

$$t=y-2 \Rightarrow x=-1+2y-4, \qquad x-2y+5=0.$$

Знаходимо відстань від точки $M(1;\, 1)$ до прямої $x-2y+5=0$.

$$d=\frac{|1-2\cdot 1+5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Відповідь. $d=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

8. Через точку $M_1(1;\,2)$ провести прямі, розміщені на однаковій відстані від точок $M_2(2;\,3)$, $M_3(4;\,-5)$.

Розв'язання:

1) Пряма проходить через середину M_2M_3. Знайдемо координати середини відрізка: $x_C=3$, $y_C=-1$; $C(3;\,-1)$.

Складемо рівняння прямої M_1C:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{-1-2},\qquad 3x+2y-7=0.$$

2) Пряма проходить через точку M_1 паралельно прямій M_2M_3.

а) Складемо рівняння прямої M_2M_3:

$$\frac{x-2}{4-2}=\frac{y-3}{-5-3},\quad 8x+2y-22=0,\quad 2y=-8x+22;\quad y=-4x+11;\quad k=-4.$$

б) Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку M_1 паралельно прямій M_2M_3:

$$\left(k_1=k=-4\right);\quad y-2=-4(x-1);\qquad 4x+y-6=0.$$

Відповідь. $4x+y-6=0$.

9. Точка $A(2;\,-5)$ є вершиною квадрата, одна зі сторін якого лежить на прямій $x-2y-7=0$. Обчислити площу квадрата.

Розв'язання.

Сторона квадрата:

$$a=d(A,l)=\frac{|2-2(-5)-7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5},\qquad S=a^2=5\ \text{(кв. од.)}.$$

Відповідь. $S=a^2=5$ (кв. од.).

10. Знайти точку Q, симетричну до точки $P(-5;13)$ відносно прямої $2x-3y-3=0$.

Розв'язання.

1) Проведемо через точку P пряму, перпендикулярну до прямої l:

$$2x-3y-3=0;\ \ y=\frac{2}{3}x-1;$$

$$k_1=\frac{2}{3};\ \ k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{3}{2};\ \ y-13=-\frac{3}{2}(x+5),\ \ y=-\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}.$$

2) Розв’язуючи систему рівнянь, знаходимо точку перетину M цих прямих:

$$\begin{cases} 2x-3y-3=0; \\ y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{11}{2}; \end{cases}$$

$$2x+\frac{9}{2}x-\frac{33}{2}-3=0;\quad \frac{13}{2}x-\frac{39}{2}=0;\quad x=3,\ \ y=1.$$

Отже, точка перетину має координати $M(3;\ 1)$.

3) Точка $M(3;\ 1)$ — середина відрізка QP. (Точка $M(3;\ 1)$ — проекція точки Q на пряму.)

Отже, знаходимо координати точки Q:

— $x=\dfrac{x_1+x_2}{2};\ \ 3=\dfrac{-5+x_2}{2};\ \ 6+5=x_2;\ \ x_2=11;$

— $y=\dfrac{y_1+y_2}{2};\ \ 1=\dfrac{13+y_2}{2};\ \ y_2=2-13;\ \ y_2=-11.$

Відповідь. $Q(11;\ -11)$.

11. Написати рівняння бісектрис кутів між прямими: $3x+4y-12=0$, $y=0$.

Розв’язання. Оскільки відстані від точок бісектриси до сторін кута однакові, то маємо:

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}};$$

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}};\qquad \frac{3x+4y-12}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm\frac{y}{1}.$$

Рівняння бісектрис має вигляд:

1) $\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y-\dfrac{12}{5}-y=0;\ \ 3x-y-12=0.$

2) $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{2}{5}+y=0$; $3x+9y-12=0$; $x+3y-4=0$.

Відповідь: $3x-y-12=0$, $x+3y-4=0$.

Домашнє завдання

1. Скласти рівняння медіан трикутника з вершинами у точках $A(-4;\,2)$, $B(2;\,0)$ та $C(2;\,-4)$. Знайти їх точку перетину.

Відповідь: $2x+3y+2=0$, $x-3y-2=0$, $5x+3y+2=0$; точка перетину $\left(0;\,-\frac{2}{3}\right)$.

2. Знайти рівняння бісектриси внутрішнього кута C трикутника з вершинами $A(0;\,0)$, $B(3;\,-1)$, $C(4;\,7)$.

Відповідь. $3x-y-5=0$.

3. Знайти значення A, при яких пряма $Ax+8y-20=0$ відтинає на координатних осях однакові відрізки.

Відповідь. $A=\pm 8$.

4. Середини сторін трикутника лежать у точках $M_1(2;\,1)$, $M_2(5;\,3)$ і $M_3(3;\,-4)$. Скласти рівняння його сторін.

Відповідь: $7x-2y-12=0$, $5x+y-28=0$, $2x-3y-18=0$.

5. Через точку перетину прямих $2x+5y-8=0$ і $x-3y+4=0$ провести пряму, яка:

а) проходить через початок координат;

б) паралельна осі абсцис;

в) паралельна осі ординат;

г) проходить через точку $(4;\,3)$.

Відповідь: а) $4x-y=0$; б) $11y-16=0$; в) $11x-4=0$; г) $17x-$ $-40y+52=0$.

6. Знайти проекцію точки $P(-8;\,12)$ на пряму, що проходить через точки $A(2;-3)$ і $B(-5;\,1)$.

Відповідь. $(-12;\,5)$.

7. Знайти точку M_1, симетричну до точки $M_2(8;\,-9)$ відносно прямої, що проходить через точки $A(3;\,-4)$ і $B(-1;\,-2)$.

Відповідь. $M_1(10;\,-5)$.

8. Через точку перетину прямих $2x-5y-1=0$ і $x+4y-7=0$ провести пряму, що ділить відрізок між точками $A(4; -3)$, $B(-1; 2)$ у відношенні 2 : 3.

Відповідь. $2x-y-5=0$.

9. Переконатись у тому, що точки $A(-4; -3)$, $B(-5; 0)$, $C(1; 1)$ та $D(1; 0)$ є вершинами трапеції, та знайти її висоту.

Відповідь. $h=\dfrac{18}{\sqrt{34}}$.

10. З'ясувати, чи перетинає пряма $3x+2y-10=0$ відрізок AB, якщо його кінці $A(1; 1)$ і $B(2; 2)$. Знайти точку їх перетину.

Відповідь. Так, $C(2; 2)$.

7.2. Різні форми рівняння прямої на площині

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Як знайти кут між двома прямими?
2. Сформулюйте і запишіть умову паралельності двох прямих.
3. Сформулюйте і запишіть умову перпендикулярності двох прямих.
4. Виведіть формулу для знаходження відстані точки від прямої.

Завдання для аудиторної роботи

1. Знайти кут між прямими $3x-4y+1=0$ і $4x+3y-8=0$.

Розв'язання.

Кут між прямими рівний куту між нормальними векторами. За формулою $\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$ маємо:

$$\cos\varphi=\frac{3\cdot4-4\cdot3}{\sqrt{3^2+(-4)^2}\sqrt{4^2+(-3)^2}}=0,\quad \varphi=90^\circ.$$

Таким чином, кут між прямими $3x-4y+1=0$ і $4x+3y-8=0$ дорівнює 90°. Отже, прямі перпендикулярні.

2. Знайти гострий кут між прямими $y=-3x+7$ і $y=2x+1$.

Розв'язання.

Кутові коефіцієнти прямих $y=-3x+7$ і $y=2x+1$ відповідно дорівнюють $k_1=-3,\ k_2=2.$ Тоді за формулою $\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$ маємо:

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{2-(-3)}{1+(-3)\cdot 2}\right|=1, \quad \text{тобто} \quad \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Відповідь. $\varphi=\frac{\pi}{4}.$

3. Чи будуть перпендикулярними прямі (l_1) $4x-5y+7=0;$ (l_2) $10x+8y-15=0$?

Розв'язання.

Оскільки дані прямі (l_1) та (l_2) задано загальними рівняннями, то ми знаходимо нормальні вектори до цих прямих $\overrightarrow{N_1}(4;-5)$, $\overrightarrow{N_2}(10;8)$, бо $l_1\perp\overrightarrow{N_1}$, $l_2\perp\overrightarrow{N_2}$. Використовуючи умови перпендикулярності двох прямих, які задані загальними рівняннями, отримуємо

$$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{N_1}\perp\overrightarrow{N_2}\Rightarrow\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}=0\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0,$$
$$A_1A_2+B_1B_2=4\cdot 10+(-5)\cdot 8=0.$$

Тобто, прямі перпендикулярні.

Відповідь. $l_1\perp l_2$.

4. Довести, що прямі $4x-6y+7=0$ та $20x-30y-11=0$ паралельні.

Розв'язання.

Запишемо задані рівняння $4x-6y+7=0$ та $20x-30y-11=0$ відповідно до рівнянь з кутовими коефіцієнтами $y=\frac{2}{3}x+\frac{7}{6}$, $y=\frac{2}{3}x-\frac{11}{30}$. Оскільки кутові коефіцієнти прямих рівні, $k_1=k_2=\frac{2}{3}$, то прямі паралельні.

5. Визначити, при яких m і n прямі $x+(m+3)y+n=0$ та $mx+$ $+4y+2n-1=0$: а) паралельні; б) перпендикулярні; в) збігаються.

Розв'язання.

а) Застосовуючи умову паралельності для двох прямих: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$, маємо:

$$\frac{1}{m}=\frac{m+3}{4},\quad m(m+3)=4,\quad m^2+3m-4=0,\quad m_1=-4,\quad m_2=1.$$

Отже, при $m_1=-4$, $m_2=1$ прямі паралельні.

б) З умови перпендикулярності прямих $A_1A_2+B_1B_2=0$ маємо:

$$1\cdot m+4\cdot(m+3)=0,\quad \text{тобто}\quad m=-\frac{12}{5}.$$

Отже, прямі перпендикулярні, якщо $m=-\frac{12}{5}$.

в) Прямі збігаються у разі виконання умови $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, тобто $\frac{1}{m}=\frac{m+3}{4}=\frac{n}{2n-1}$, звідки дістанемо дві пари значень $m=-4$, $n=\frac{1}{6}$, або $m=1$, $n=1$.

Отже, при значеннях $m=-4$, $n=\frac{1}{6}$, або $m=1$, $n=1$, прямі $x+(m+3)y+n=0$, $mx+4y+2n-1=0$ збігаються.

Відповідь: а) $m_1=-4, m_2=1$; б) $m=-\frac{12}{5}$; в) $m=-4$, $n=\frac{1}{6}$, або $m=1$, $n=1$.

6. Дано точки $M_1(0;1)$, $M_2(1;-3)$, $M_3(0;-2)$ — вершини трикутника $M_1M_2M_3$. Складіть:

а) загальне рівняння сторони M_1M_2;

б) рівняння прямої, що проходить через точку $M_3(0;-2)$, паралельно до сторони M_1M_2.

Розв'язання.

а) Оскільки відомі координати точок $M_1(0;1)$, $M_2(1;-3)$, то згідно з рівнянням $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ маємо: $\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-1}{-3-1}$, $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-4}$,

$y-1=-4x$, звідки $4x+y-1=0$ — загальне рівняння прямої, що містить сторону M_1M_2.

б) Оскільки пряма, що проходить через точку $M_3(0;\,-2)$ паралельна стороні M_1M_2, то за нормальний вектор шуканої прямої беремо вектор $\vec{n}=\{4;1\}$ — нормальний вектор прямої M_1M_2. Тоді шукане рівняння має вигляд $4(x-0)+1(y+2)=0$, або $4x+y+2=0$.

Відповідь: а) $4x+y-1=0$; б) $4x+y+2=0$.

7. Знайти відстань між прямими $5x-12y+13{,}5=0$ та $10x-24y-25=0$.

Розв'язання.

Оскільки задані прямі паралельні, то відстань між ними дорівнює, наприклад, відстані від довільної точки другої прямої до першої. Знаходимо довільну точку на прямій $10x-24y-25=0$. Нехай $x=0$, тоді $y=-\frac{25}{24}$. Відстань від точки $A\left(0;-\frac{25}{24}\right)$ до прямої $5x-12y+13{,}5=0$ знаходимо за формулою $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$:

$$d=\frac{\left|5\cdot 0-12\cdot\left(\frac{-25}{24}\right)+13{,}5\right|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=2.$$

Таким чином, відстань між прямими $5x-12y+13{,}5=0$ та $10x-24y-25=0$ дорівнює 2.

Відповідь. 2.

8. Обчислити площу трикутника, обмеженого прямою, що проходить через точки $A(-4;-4), B(\ 5;1)$ і осями координат.

Розв'язання.

Використовуючи формулу $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, складемо рівняння прямої, яка проходить через точки $A(-4;-4), B(5;1)$:

$$\frac{x+4}{5+4}=\frac{y+4}{1+4},\quad \frac{x+4}{9}=\frac{y+4}{5},\quad 5(x+4)=9(y+4).$$

Отже, $5x-9y-16=0$ — загальне рівняння прямої AB.

Знайдемо координати точок перетину прямої AB з осями координат.

Нехай $x = 0$, тоді $-9y - 16 = 0$, $y = -\frac{16}{9}$. Якщо $y = 0$, то $5x - 16 = 0$, $x = \frac{16}{5}$.

Отже, пряма перетинає вісь Ox у точці $M_1\left(\frac{16}{5}; 0\right)$, а вісь Oy — у точці $M_2\left(0; -\frac{16}{9}\right)$. Довжина катетів у трикутнику M_1OM_2 відповідно рівна: $OM_1 = \frac{16}{5}$, $OM_2 = \frac{16}{9}$, тоді площа трикутника:

$$S_{\triangle M_1OM_2} = \frac{1}{2} \cdot OM_1 \cdot OM_2, \quad S_{\triangle M_1OM_2} = \frac{128}{45} \text{ кв. од.}$$

Відповідь. $\frac{128}{45}$ кв. од.

9. Дано сторони трикутника: $(AB)\ x + 3y - 7 = 0$, $(BC)\ 4x - y - 2 = 0$, $(AC)\ 6x + 8y - 35 = 0$.

Знайти довжину висоти, яка проходить через вершину B.

Розв'язання.

Знаходимо координати точки B. Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} x + 3y - 7 = 0, \\ 4x - y - 2 = 0, \end{cases}$ маємо $x = 1$, $y = 2$, тобто $B(1; 2)$.

Знайдемо довжину висоти BB_1 як відстань від точки $B(1; 2)$ до прямої AC:

$$|BB_1| = \frac{|6 \cdot 1 + 8 \cdot 2 - 35|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = 1{,}3.$$

Отже, довжина висоти, яка проходить через вершину B, дорівнює 1,3 од.

Відповідь. 1,3 (од.).

10. Дано вершини трикутника: $A(1; 1)$, $B(10; 13)$, $C(13; 6)$. Записати рівняння бісектриси кута A.

Розв'язання.

Нехай D — точка перетину бісектриси зі стороною BC. З властивості бісектриси внутрішнього кута трикутника випливає, що $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$.

$|AB|=\sqrt{(10-1)^2+(13-1)^2}=15$, $|AC|=\sqrt{(13-1)^2+(6-1)^2}=13$. Тоді, $\lambda=\dfrac{|BD|}{|DC|}=\dfrac{15}{13}$.

Знаходимо координати точки D за формулами: $x=\dfrac{x_B+\lambda x_C}{1+\lambda}$, $y=\dfrac{y_B+\lambda y_C}{1+\lambda}$, маємо $x=\dfrac{10+13\cdot\frac{15}{13}}{1+\frac{15}{13}}=\dfrac{325}{28}$, $y=\dfrac{13+6\cdot\frac{15}{13}}{1+\frac{15}{13}}=\dfrac{259}{28}$, тобто $D\left(\dfrac{325}{28};\dfrac{259}{28}\right)$. Задача зводиться до складання рівняння прямої, яка проходить через дві точки A та D:

$$\frac{x-1}{\frac{325}{28}-1}=\frac{y-1}{\frac{259}{28}-1},\quad \text{тобто}\quad \frac{x-1}{\frac{297}{28}}=\frac{y-1}{\frac{231}{28}};$$

$$231x-231=297y-297;\ 231x-297y+66=0,\ 7x-9y+2=0.$$

Отже, шукане рівняння бісектриси кута A має вигляд $7x-9y+2=0$.

Відповідь: $7x-9y+2=0$.

Домашнє завдання

1. Задано сторони трикутника рівняннями $4x+3y-5=0$, $x-3y+10=0$, $x-2=0$. Визначити його вершини.

Відповідь. $(2;-1),(-1;3),(2;4)$.

2. Визначити, при яких значеннях параметрів m і n пряма $(2m-n+5)x+(m+3n-2)y+2m+7n+19=0$ паралельна осі ординат і перетинає вісь абсцис у точці $(5;0)$.

Відповідь. $m=-4$, $n=2$, $x-5=0$.

3. Задані рівняння сторін чотирикутника $x-y=0$, $x+3y=0$, $x-y-4=0$ і $3x+y-12=0$. Скласти рівняння його діагоналей.

Відповідь. $y=0$, $x-3=0$.

4. Знайти проекцію точки $P(-8;12)$ на пряму, що проходить через точки $A(2;-3)$ і $B(-5;1)$.

Відповідь. $(-12; 5)$.

5. Знайти точку перетину медіан і точку перетину висот трикутника з вершинами $A(-4; 2)$, $B(2; -5)$, $C(5; 0)$.

Відповідь. $(1;-1)$, $\left(\frac{8}{3};-2\right)$.

6. У трикутника ABC відомі сторона (AB) $4x+y-12=0$, висота (BH) $5x-4y-15=0$ і висота (AH) $2x+2y-9=0$. Скласти рівняння двох інших сторін і третьої висоти.

Відповідь. (BC) $x-y-3=0$, (AC) $4x+5y-20=0$, (CH) $3x-12y-1=0$.

7. Показати, що точка $M(-1; 2)$ належить прямій: $x=2t$, $y=-1-6t$. Знайти значення параметра t, що відповідає цій точці.

Відповідь. $t=-\frac{1}{2}$.

8. Задано вершини трикутника: $A(-10;-13)$, $B(-2; 3)$, $C(2; 1)$. Обчислити довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, проведену з вершини C.

Відповідь. 4.

9. Скласти рівняння бісектриси гострого кута між двома прямими $x+y+1=0$ і $x-7y-3=0$.

Відповідь. $x+3y+2=0$.

10. Скласти рівняння бісектриси того кута між двома прямими $x+y+2=0$ і $x+7y+3=0$, в якому лежить точка $A(2; -1)$.

Відповідь. $6x+12y+13=0$.

ПІДМОДУЛЬ 8

Площина

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Загальне рівняння площини має вигляд...
2. Рівняння площини, що проходить через три задані точки, має вигляд...
3. Запишіть рівняння площини у відрізках на осях.
4. Відстань від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини можна знайти за формулою...
5. Запишіть умову паралельності двох площин.

Завдання для аудиторної роботи

1. Які особливості в розміщенні площин: а) $3x – 5y + 1 = 0$; б) $2x + 3y – 7z = 0$; в) $9y – 2 = 0$; г) $x + z –5 = 0$; д) $8y – 3z = 0$?

Розв'язання.

а) проходить паралельно осі Oz; б) проходить через початок координат $O(0; 0; 0;)$; в) проходить паралельно площині Oxz; г) проходить паралельно осі Oy; д) проходить через вісь Ox.

2. Чи проходить площина $2x+y-4=0$ через точки $A(–1; 6; 3)$, $B(3; –2; –5)$, $C(0; 4; –1)$, $D(–2; 0; 5)$?

Розв'язання.

Точка належить площині, якщо її координати задовольняють рівняння площини. Підставивши координати точок, отримаємо: $-2+6-4=0,\ 6-2-4=0,\ 0+4-4=0,\ -4+0-4\neq 0.$

Отже, площина проходить через точки A, B, C і не проходить через точку D.

Відповідь. Площина проходить через точки A, B, C і не проходить через точку D.

3. Задано дві точки: $M_1(3; –1; 2)$ і $M_2(4; –2; –1)$. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_1 перпендикулярно $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Розв'язання:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\{1; -1; -3\}.$$

Маємо $1\cdot(x-3)-1\cdot(y+1)-3(z-2)=0,$ або $x-y-3z+2=0.$

Відповідь. Рівняння площини має вигляд $x-y-3z+2=0.$

4. Скласти рівняння площини, що проходить: а) через точки $M_1(1; –3; 2)$, $M_2(–2; 1; 4)$ паралельно осі Ox; б) через точку $M(-1;-2;-3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(1;3;-1)$; в) через вісь Ox і точку $M_1(-1; 1; -3)$.

Розв'язання:

а) Дане рівняння площини можна знайти двома методами.

Перший метод. Запишемо рівняння площини, яка проходить через дві точки паралельно до осі Ox, застосовуючи формулу $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0$, маємо

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ -2-1 & 1+3 & 4-2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$=(x-1)\cdot 0-(y+3)\cdot(-2)+(z-2)\cdot(-4)=2y-4z+14=0.$$

Отже, шукане рівняння площини запишеться у такому вигляді:

$$y-2z+7=0.$$

Другий метод. Запишемо рівняння площини, що проходить через точки M_1, M_2 паралельно осі Ox:

$$A=0, \qquad \begin{cases} -3B+2C+D=0, \\ B+4C+D=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -3B+2C-B-4C=0, \\ D=-B-4C; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4B-2C=0, \\ D=-B-4C; \end{cases} \qquad \begin{cases} C=-2B, \\ D=7B; \end{cases} \qquad By-2Bz+7B=0,$$

$$y-2z+7=0.$$

б) Знайдемо рівняння площини, яка проходить через точку $M(-1;-2;-3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(1;\,3;-1)$.

$$1(x-(-1))+3(y-(-2))-(z-(-3))=0;$$

$$x+1+3y+6-z-3=0 \Rightarrow x+3y-z+4=0.$$

в) Запишемо рівняння площини, яка проходить через вісь Ox і точку $M_1(-1;\,1;-3)$.

Оскільки $A = D = 0$, то рівняння площини має вигляд:

$$By + Cz = 0.$$

Якщо площина, проходить через точку M_1, то

$$B - 3C = 0,$$

$$B = 3C \Rightarrow 3Cy + Cz = 0 \Rightarrow 3y + z = 0.$$

Відповідь: а) $y-2z+7=0$; б) $x+3y-z+4=0$; в) $3y + z = 0$.

5. Скласти рівняння площини, що проходить:

а) через точку $M_0(3;-4;-5)$ перпендикулярно до осі Oz;

б) через точку $M_1(-2;\,3;\,-1)$ паралельно площині Oxy;

в) через точки $M_1\,(1;\,2;\,0)$, $M_2\,(2;\,1;\,1)$ паралельно вектору $\vec{a}\{3;\,0;\,1\}$.

Розв'язання:

а) Запишемо рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;-4;-5)$ перпендикулярно до осі Oz. Оскільки орт $\vec{k}=(0;\,0;\,1)$ перпендикулярний до площини, тому його можна розглядати як нормальний вектор.

Отже, рівняння площини запишеться у вигляді:

$$O\left(x-3\right)+0\left(y-(-4)\right)+1\left(z-(-5)\right)=0;$$

$$z+5=0 \Rightarrow z=-5.$$

б) Запишемо рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(-2;\ 3;\ -1)$ паралельно до площини Oxy.

Оскільки $A = B = 0$, то рівняння площини має вигляд:

$$Cz + D = 0.$$

Рівняння площини, що проходить через точку M_1:

$$-C + D = 0;$$

$$D = C \Rightarrow Cz + C = 0 \Rightarrow z + 1 = 0.$$

в) Дане рівняння площини можна записати двома методами.

Перший метод. Запишемо рівняння площини, яка проходить через дві точки M_1, M_2, паралельно вектору $\vec{a}$. Застосовуючи формулу $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0,$ маємо

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 2-1 & 1-2 & 1-0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\left(x-1\right)\cdot(-1)-\left(y-2\right)\cdot\left(-2\right)+z\cdot 3=-x+2y+3z-3=0.$$

Отже, шукане рівняння площини набуває вигляду

$$x-2y-3z+3=0.$$

Другий метод. Запишемо рівняння площини, що проходить через точки M_1, M_2, паралельно до вектора $\vec{a}$.

$$\begin{cases} A+2B+D=0, \\ 2A+B+C+D=0, \\ 3A+C=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=-A-2B, \\ 2A+B-3A-A-2B=0, \\ C=-3A; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D=-A-2B, \\ -B-2A=0, \\ C=-3A; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=3A, \\ B=-2A, \\ C=-3A; \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} Ax-2Ay-3Az+3A=0; \\ x-2y-3z+3=0. \end{matrix}$$

Відповідь: а) $z+5=0;$ б) $z+1=0;$ в) $x-2y-3z+3=0.$

6. Скласти рівняння площини, що проходить: а) через точку $M_1(1;\ 1;\ 1)$ паралельно до векторів $\vec{a}_1\left\{0;\ 1;\ 2\right\}$ і $\vec{a}_2\left\{-1;\ 0;\ 1\right\}$; б) через точки $A\left(2;-2;\ 1\right)$, $B\left(-1;-4;\ 3\right)$, $C\left(7;\ 6;-2\right)$.

Розв'язання:

а) Дане рівняння площини знайдемо двома методами.

Перший метод. Рівняння площини *P*, яка проходить через точку $M_1(1;\ 1;\ 1)$ паралельно до векторів $\vec{a}_1\{0;\ 1;\ 2\}$ і $\vec{a}_2\{-1;\ 0;\ 1\}$, згідно з формулою

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=0,$$

матиме вигляд

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(x-1)1-(y-1)2+(z-1)1=x-2y+z=0.$$

Отже, рівняння площини має вигляд: $x-2y+z=0.$

Другий метод. Запишемо рівняння площини, що проходить через точку M_1 паралельно до векторів $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2$:

$$\begin{cases} A+B+C+D=0, \\ B+2C=0, \\ -A+C=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C-2C+C+D=0, \\ B=-2C, \\ A=C; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=0, \\ B=-2C, \\ A=C; \end{cases} \Rightarrow$$

$$Cx-2Cy+Cz=0;$$

$$x-2y+z=0.$$

б) Запишемо рівняння площини, застосовуючи формулу

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Маємо: $$\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ -1-2 & -4+2 & 3-1 \\ 7-2 & 6+2 & -2-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 5 & 8 & -3 \end{vmatrix}=$$

$$=(x-2)\cdot(-10)-(y+2)\cdot(-1)+(z-1)\cdot(-14)=-10x+y-14z+36=0.$$

Таким чином, рівняння площини набуває вигляду:

$$-10x+y-14z+36=0.$$

Відповідь: а) $x-2y+z=0$; б) $-10x+y-14z+36=0.$

7. Дано три точки: $M_1(1;\ 2;\ 0)$, $M_2(2;\ 1;\ 1)$, $M_3(3;\ 0;\ 1)$. Обчислити відстань від початку координат до площини, визначити напрямні косинуси та координати нормального вектора площини.

Розв'язання.

Запишемо рівняння площини, що проходить через три точки. Застосовуючи формулу $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0,$ маємо:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 2-1 & 1-2 & 1-0 \\ 3-1 & 0-2 & 1-0 \end{vmatrix}=0, \quad (x-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=0,$$

$$1(x-1)-(-1)(y-2)+0\cdot z=0,\ x-1+y-2=0, \qquad x+y-3=0.$$

Отже, нормальний вектор має координати $\vec{n}=\{1;1;0\}$.

Обчислимо відстань від початку координат до площини:

$$d=\frac{|0+0-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Знаходимо нормівний множник $\mu=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$ тоді нормальне рівняння прямої набуває вигляду $\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}=0.$

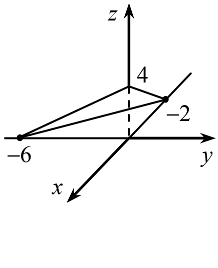
Отже, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},$ $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}},$ $\cos\gamma=0$ — напрямні косинуси вектора $\vec{n}$.

8. Записати задане рівняння $5x-4y+20z-20=0$ у відрізках на осях.

Розв'язання. $5x-4y+20z-20=0,\ 5x-4y+20z=20.$

Поділивши рівняння площини на 20, отримаємо: $\frac{x}{4}-\frac{y}{5}+\frac{z}{1}=1,$ $a=4,$ $b=-5,$ $c=1.$

Відповідь. $\frac{x}{4}-\frac{y}{5}+\frac{z}{1}=1.$



9. Обчислити об'єм V піраміди, яку площина $6x+2y-3z+12=0$ відтинає від координатного кута.

Розв'язання.

Запишемо рівняння площини у відрізках на осях та знайдемо площу отриманого трикутника та об'єм піраміди:

$\frac{x}{-2}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{4}=1;\ a=-2,\ b=-6,\ c=4;\ S_{осн}=\frac{1}{2}ab;\ S_{осн}=\frac{1}{2}6\cdot 2=6;$

$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot H=\frac{1}{3}6\cdot 4=8$ (куб. од).

Відповідь. 8 (куб. од).

10. Скласти рівняння площини, що відтинає на осях Oy і Oz удвічі більші відрізки, ніж на осі Ox, і проходить через точку $M_1(1;-3;5)$.

Розв'язання.

Рівняння площини у відрізках на осях: $\frac{x}{a}+\frac{y}{2a}+\frac{z}{2a}=1$. Оскільки площина проходить через точку M_1, то $\frac{1}{a}-\frac{3}{2a}+\frac{5}{2a}=1$. Отже, $a=2$.

Рівняння площини у відрізках має вигляд: $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1$. Отже, рівняння площини, що проходить через точку M_1, набуває вигляду:

$$2x+y+z-4=0.$$

Відповідь. $2x+y+z-4=0$.

11. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від площин: $x+4y-3z-2=0,\ 5x+z+8=0$.

Розв'язання.

Координати шуканої точки $(0;0;z)$. Запишемо відстані від площин до точки $(0;0;z)$ і прирівняємо їх:

$$\frac{|-3z-2|}{\sqrt{1^2+4^2+3^2}}=\frac{|z+8|}{\sqrt{5^2+1^2}};\qquad \frac{3z+2}{\sqrt{26}}=\pm\frac{z+8}{\sqrt{26}}.$$

Розглянемо два випадки рівнянь:

1) $3z+2=z+8,\ 2z=6,\ z=3;\ (0;0;3)$ або

2) $3z+2=-z-8,\ 4z=-10,\ z=-\frac{5}{2};\ \left(0;0;-\frac{5}{2}\right)$.

Отже, отримали дві рівновіддалені від площини точки з координатами $A(0;0;3)$ та $B\left(0;0;-\frac{5}{2}\right)$.

Відповідь. $A(0;0;3),\ B\left(0;0;-\frac{5}{2}\right)$.

12. З'ясувати взаємне розміщення площин $(P_1): x-2y+z-1=0$, $(P_2): y+3z-1=0$ та обчислити косинус кута між ними.

Розв'язання.

$(P_1): x-2y+z-1=0;\ \vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)=(1;-2;1);$

$(P_2): y+3z-1=0;\ \vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)=(0;1;3).$

Обчислити косинус кута між площинами застосовуючи формулу:

$$\cos\varphi=\cos\left(\overline{n}_1,\hat{}\ \overline{n}_2\right)\cos\frac{\overline{n}_1\overline{n}_2}{|\overline{n}_1||\overline{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

маємо:

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 0-2\cdot 1+1\cdot 3}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\sqrt{0^2+1^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{60}}=\frac{1}{2\sqrt{15}}.$$

Відповідь. $\dfrac{1}{2\sqrt{15}}$.

13. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1; 0; -1)$: а) паралельно площині $2x-y+3z=0$; б) перпендикулярно до площин $x+2y+1=0$ і $3x-2y+z-4=0$.

Розв'язання:

а) За умовою паралельності площин

$$\frac{2}{A}=-\frac{1}{B}=\frac{3}{C}\Rightarrow 2(x-1)-1(y-0)+3(z+1)=0,$$

$$2x-2-y+3z+3=0,\qquad 2x-y+3z+1=0.$$

б) Запишемо умови перпендикулярності площин:

$$\begin{cases}A+2B=0,\\3A-2B+C=0;\end{cases}\qquad\begin{cases}A=-2B,\\-6B-2B+C=0;\end{cases}\qquad\begin{cases}A=-2B,\\C=8B.\end{cases}$$

$$-2B(x-1)+B(y-0)+8B(z+1)=0;$$

$$-2x+2+y+8z+8=0;\qquad -2x+y+8z+10=0.$$

Відповідь: а) $2x-y+3z+1=0$; б) $-2x+y+8z+10=0$.

14. Знайти кути між площинами $3y-z=0$ та $2y+z=0$.

Розв'язання.

Для кожної з площин, знайшовши нормальні вектори $n_1\left(0;3;-1\right)$, $n_2\left(0;2;1\right)$, дістанемо кут між площинами $\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{n_1}\,\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$,

$\cos\varphi=\frac{0+6-1}{\sqrt{0+9+1}\sqrt{0+4+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Тоді, $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=45°$.

Відповідь. $\varphi=45°$.

15. Знайти висоту AH піраміди, заданої вершинами $A(-1;2;-1)$, $B(1;0;2)$, $C(0;1;-1)$, $D(2;0;-1)$.

Розв'язання.

Знаходимо рівняння площини, що проходить через три точки — B, C, D

$$\begin{vmatrix} x-x_B & y-y_B & z-z_B \\ x_C-x_B & y_C-y_B & z_C-z_B \\ x_D-x_B & y_D-y_B & z_D-z_B \end{vmatrix}=0;\ \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 0-1 & 1-0 & -1-2 \\ 2-1 & 0-0 & -1-2 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} x-1 & y-x & z-2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}=0\Rightarrow 3x+6y+z-5=0.$$

Висоту AH знайдемо як відстань від точки $A\left(-1;2;1\right)$ до площини BCD: $AH=\frac{3\left(-1\right)+6\cdot 2+1\left(-1\right)-5}{\sqrt{3^2+6^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{46}}$ (од.).

Відповідь. $\frac{3}{\sqrt{46}}$ (од.).

16. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0\left(1;2;3\right)$ паралельно до векторів $\vec{a}\left(3;-1;0\right)$ і $\vec{b}\left(2;1;2\right)$.

Розв'язання.

Площина паралельна до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тому вектор нормалі до площини $\vec{n}\left(A,B,C\right)$ дорівнює векторному добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-2\vec{i}-6\vec{j}+5\vec{k}.\quad \text{Отже, } \vec{n}\left(-2;-6;5\right).$$

Шукане рівняння площини: $-2\left(x-1\right)-6\left(y-2\right)+5\left(z-3\right)=0$, або $-2x-6y+5z-1=0$.

Відповідь. $-2x-6y+5z-1=0$.

17. Чи паралельні площини:

а) (P_1) $2x-3y-4z+11=0$ і (P_2) $-4x+6y+8z+36=0$;

б) (P_1) $2x-3y-12=0$ та (P_2) $4x+4y-6z+7=0$;

в) (P_1) $3x+7y-5z+4=0$ та (P_2) $6x+14y-10z+8=0$;

г) (P_1) $3x-2y-2z+7=0$ та (P_2) $2x+2y+z+4=0$?

Розв'язання:

а) Площини паралельні, оскільки виконується умова паралельності $\dfrac{-4}{2}=\dfrac{6}{-3}=\dfrac{8}{-4}$.

б) Площина (P_1) $2x-3y-12=0$ не паралельна (P_2) $4x+4y-6z+$ $+7=0$, оскільки не виконується умова паралельності $\dfrac{2}{4}\neq\dfrac{-3}{4}\neq\dfrac{0}{-6}$.

в) Площина (P_1) $3x+7y-5z+4=0$ збігається з площиною (P_2) $6x+14y-10z+8=0$, оскільки виконується співвідношення.

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{D_2}{D_1},\text{ тобто } \frac{6}{3}=\frac{14}{7}=\frac{-10}{-5}=\frac{8}{4}.$$

г) Площина (P_1) $3x-2y-2z+7=0$ перпендикулярна до площини (P_2) $2x+2y+z+4=0$, оскільки $\vec{n}_1\vec{n}_2=0$, $3\cdot 2+(-2)\cdot 2+(-2)\cdot 1=0$.

Відповідь: а) так; б) ні; в) площини збігаються; г) площини перпендикулярні.

18. Скласти рівняння площини, яка проходить через дві точки $M_0(1;2;3)$ і $M_1(2;1;1)$ та перпендикулярна до площини $3x+4y+z-6=0$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння площини, яка проходить через дві точки перпендикулярно до даної площини, застосовуючи формулу

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0.$$

Маємо $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2-1 & 1-2 & 1-3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=$

$$=(x-1)\cdot 7-(y-2)\cdot 7+(z-3)\cdot 7=x-y+z-2=0.$$

Відповідь. $x-y+z-2=0$.

19. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(1;\,3;\,2)$ і перпендикулярна до площин (P_1) $x+2y+z-4=0$ та (P_2) $2x+y+3z+5=0$.

Розв'язання.

Рівняння площини P, яка проходить через точку $A(x_0;\,y_0;\,z_0)$ і перпендикулярна до двох (непаралельних) площин (P_1) A_1x+B_1y+ $+C_1z+D_1=0$ та (P_2) $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=0.$$

Звідки $\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=$

$$=(x-1)\cdot 5-(y-3)+(z-2)\cdot(-3)=5x-y-3z+4=0.$$

Відповідь. Рівняння площини має вигляд $5x-y-3z+4=0$.

20. Знайти відстань від точки $A(3;\,9;\,1)$ до площини $x-2y+$ $+\,2z-3=0$.

Розв'язання.

Відстань від точки $A(3;\,9;\,1)$ до площини, заданої рівнянням $x-2y+2z-3=0$, обчислюємо за формулою:

$$d=|\delta|=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$d=|\delta|=\frac{|x_1-2y_1+2z_1-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{|1\cdot 3-2\cdot 9+2\cdot 1-3|}{\sqrt{9}}=\left|-5\frac{1}{3}\right|=5\frac{1}{3}.$$

Відповідь. Шукана відстань дорівнює $5\frac{1}{3}$.

Домашнє завдання

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $P_1(-2;\ 1;-3)$ і $P_2(1;-3;-4)$ паралельно осі Oy.

Відповідь. $x+3z+11=0$.

2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(0; 1; 2)$ паралельно до векторів $\vec{a} = \{2; 0; 1\}$, $\vec{b} = \{1; 1; 0\}$.

Відповідь. $x - y - 2z + 5 = 0$.

3. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1; 1; 1)$, $M_2(2; 3; -1)$ перпендикулярно до вектора $\vec{a}\{0; -1;\ 2\}$.

Відповідь. $2x - 2y - z + 1 = 0$.

4. Скласти рівняння площини, що проходить через вісь Oy і точку $M(1; -2; 5)$.

Відповідь. $5x - z = 0$.

5. Обчислити об'єм піраміди, обмеженої площиною $2x + 3y - 6z = 24$ і координатними площинами.

Відповідь. 64.

6. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(2; -1;\ 1)$ і відтинає від осей координат рівні відрізки.

Відповідь: $x + y + z - 2 = 0$, $x - y + z - 4 = 0$, $x - y - z - 2 = 0$.

7. Знайти відстань від точки $M(1; 5; 4)$ до площини, що відтинає на осях координат відрізки $a = 1$, $b = 5$ та $c = 4$.

Відповідь. $\frac{40}{21}$.

8. Покажіть, що площини $x - 2y + z - 7 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$ та $x - 3y + 2z - 11 = 0$ мають одну спільну точку, знайдіть координати точки перетину.

Відповідь. $(1; -2; 2)$.

9. Знайти косинус кута між площиною, що проходить через точки $O(0; 0; 0)$, $M_1(1; -1; 0)$, $M_2(1; 1; 1)$ та площиною: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

Відповідь: а) $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{6}}{3}$; б) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{6}$; в) $\cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

10. Скласти рівняння площини, яка проходить через лінію перетину двох площин $x + 2y - z = 0$ і $2x - y + z - 3 = 0$ перпендикулярно до площини, що проходить через точки $(1; 1; 1)$, $(0; 0; 1)$, $(2; 0; 0)$.

Відповідь. $11x + 7y - 2z - 9 = 0$.

ПІДМОДУЛЬ 9

Пряма в просторі.
Взаємне розміщення прямої і площини

9.1. Рівняння прямої в просторі

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Запишіть параметричне рівняння прямої.
2. Запишіть загальне рівняння прямої.
3. Запишіть канонічне рівняння прямої.
4. Запишіть умову паралельності двох прямих.
5. Чому дорівнює косинус кута між двома прямими?

Завдання для аудиторної роботи

1. Звести до канонічного вигляду рівняння прямої

$$\begin{cases} x+2y-3z-5=0, \\ 2x-y+z+2=0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Щоб записати канонічне рівняння прямої, достатньо знайти координати точки, через яку проходить пряма, і напрямний вектор цієї прямої.

Нехай $x=0,$ тоді система набуває вигляду:

$$\begin{cases} 2y-3z-5=0, \\ -y+z+2=0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} -y+z+2=0, \\ -z-1=0, \end{cases} \quad \begin{cases} z=-1, \\ y=z+2=1, \end{cases}$$

розв'язок якої $y=1,$ $z=-1.$ Отже, $M_0\left(0;\,1;\,-1\right)$ належить даній прямій.

Напрямний вектор знайдемо за формулою

$$\vec{q}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-\vec{i}-7\vec{j}-5\vec{k}, \text{ або } \vec{q}=\left\{-1;\ -7;-5\right\}.$$

Отже, канонічне рівняння прямої: $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{-7}=\dfrac{z+1}{-5}.$

Відповідь. $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{-7}=\dfrac{z+1}{-5}.$

2. Скласти параметричне і канонічне рівняння прямої, якщо пряма задана загальним рівнянням:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 4 = 0, \\ x + 2y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Щоб записати параметричне рівняння прямої, необхідно знати напрямний вектор даної прямої та координати точки, через яку проходить пряма.

1) Знайдемо координати напрямного вектора прямої:

$$\vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}, \quad \text{або} \quad \vec{q} = \{-3; 4; 5\}.$$

2) Знайдемо координати точки, що належить прямій.

Нехай $x = 0$, тоді $\begin{cases} -y + 2z - 4 = 0, \\ 2y - z - 1 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2z - 4, \\ 4z - 8 - z - 1 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2, \\ z = 3. \end{cases}$

Отже, точка $M_0(0; 2; 3)$ належить шуканій прямій.

3) Запишемо параметричне рівняння прямої за формулою

$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = pt + z_0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = -3t, \\ y = 2 + 4t, \\ z = 3 + 5t. \end{cases}$$

4) Запишемо канонічне рівняння прямої, використовуючи формулу

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}, \quad \text{або} \quad \frac{x}{-3} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z - 3}{5}.$$

Відповідь: $\begin{cases} x = -3t, \\ y = 2 + 4t, \\ z = 3 + 5t \end{cases}$ та $\dfrac{x}{-3} = \dfrac{y - 2}{4} = \dfrac{z - 3}{5}.$

3. Написати канонічне і параметричне рівняння прямої, що проходять через дві точки $M_1(1; -2; 1)$ та $M_2(3; 1; -1)$.

Розв'язання.

Канонічні рівняння прямої знайдемо за формулою $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} =$

$$= \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \quad \text{або} \quad \frac{x - 1}{3 - 1} = \frac{y + 2}{1 + 2} = \frac{z - 1}{-1 - 1}; \quad \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{3} = \frac{z - 1}{-2}.$$

Для того, щоб записати параметричне рівняння прямої, достатньо знати координати точки, через яку проходить пряма, і напрямний вектор цієї прямої. Підставляючи координати точки $M_1(1;\ -2;\ 1)$ та напрямного вектора $\vec{a}=\{2;\ 3;\ -2\}$ у формулу

$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = pt + z_0, \end{cases} \quad \text{маємо} \quad \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = -2t + 1; \end{cases}$$

Відповідь: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$; $\begin{cases} x = 2t+1, \\ y = 3t-2, \\ z = -2t+1. \end{cases}$

4. Знайти сліди прямої $\begin{cases} x - z - 5 = 0, \\ y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$ у площинах Oxy і Oxz.

Розв'язання.

1) Знайдемо сліди прямої $\begin{cases} x - z - 5 = 0, \\ y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$ у площині Oxy. Для цього розв'яжемо систему при $z = 0$, маємо $\begin{cases} x = 5, \\ y = 4, \end{cases}$ $(5;\ 4;\ 0)$.

2) Знаходимо сліди прямої $\begin{cases} x - z - 5 = 0, \\ y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$ у площині Oxz. При $y = 0$ маємо $\begin{cases} x = 7, \\ z = 2, \end{cases}$ $(7;\ 0;\ 2)$.

5. Знайти напрямний вектор прямої $\begin{cases} 2x - 2y - z + 8 = 0, \\ x + 2y - 2z + 1 = 0. \end{cases}$

Розв'язання.

Напрямний вектор даної прямої знаходимо за формулою $\vec{q} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2}$, де $\overrightarrow{N_1}(2;-2;-1)$ і $\overrightarrow{N_2}(1;\ 2;-2)$ — нормальні вектори площин, що перетинаються по даній прямій:

$$\vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}, \text{ або } \vec{q} = \{6;\ 3;\ 6\}.$$

6. Знайти кут між прямими $\begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0, \\ 2x + y - 3z - 5 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x = -2t, \\ y = -2 + t, \\ z = 2 - 3t. \end{cases}$

Розв'язання.

Напрямний вектор першої прямої знаходимо за формулою

$$\overrightarrow{a_1}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix}=2\vec{i}+8\vec{j}+\overrightarrow{4k},\quad \text{або}\quad \vec{a}_1=\{2;\,8;\,4\}.$$

Вектор $\vec{a}_2=\{-2;\,1;\,3\}$ — напрямний вектор другої прямої.

Знаючи напрямні вектори двох прямих, знайдемо кут між даними прямими

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|},\quad \cos\varphi=\frac{2(-2)+1\cdot 8-3\cdot 4}{\sqrt{4+1+9}\sqrt{4+64+16}}=\frac{-8}{\sqrt{14}\sqrt{84}},$$

$$\varphi=\pi-\arccos\frac{8}{\sqrt{14\cdot 84}}.$$

7. Обчислити кут між прямими $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{3}$ і $\begin{cases}3x+y-5z=0,\\ 2x+3y-8z+1=0.\end{cases}$

Розв'язання.

Напрямний вектор першої прямої має координати $\vec{q}=\{1;\,-2;\,3\}$.

Знайдемо координати напрямного вектора другої прямої:

$$\vec{S}=\left\{\begin{vmatrix}1 & -5\\ 3 & -8\end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix}3 & -5\\ 2 & -8\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}\right\}=\{7;\,14;\,7\},\quad \text{або}\quad \vec{S}\parallel\vec{q}_1\{1;\,2;\,1\};$$

За формулою косинуса кута між прямими $\cos\varphi=\cos(\vec{q},\vec{q}_1)\dfrac{\vec{q}\cdot\vec{q}_1}{|\vec{q}||\vec{q}_1|}$

маємо:

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 1-2\cdot 2+3\cdot 1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{0}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}=0,\quad \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

8. Доведіть паралельність прямих $\begin{cases}2x+2y-z-10=0\\ x-y-z-22=0\end{cases}$ та $\dfrac{x+7}{3}=$ $=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-9}{4}$.

Розв'язання.

Напрямний вектор другої прямої має координати $\vec{q}=\{3;\,-1;\,4\}$.

Знайдемо координати напрямного вектора першої прямої:

$$\vec{S}=\left\{\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & -1\end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right\}=\{-3;\ 1;\,-4\}.$$

Застосовуючи умову паралельності прямих $\frac{-3}{3}=\frac{1}{-1}=\frac{-4}{4}=-1$, робимо висновок, що прямі паралельні.

9. При яких значеннях m_1 та n_2 прямі $\frac{x}{m_1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{4}$ і $\frac{x+1}{-1}=\frac{y-5}{n_2}=\frac{z+3}{-2}$ паралельні?

Розв'язання.

Застосовуючи умову паралельності прямих, маємо

$$\frac{m_1}{-1}=\frac{2}{n_2}=\frac{4}{-2}=-2 \Rightarrow \frac{m_1}{-1}=\frac{4}{-2} \Rightarrow m_1=2; \qquad \frac{2}{n_2}=-2, \qquad n_2=-1.$$

Відповідь. При $m_1=2$ та $n_2=-1$ дані прямі паралельні.

10. Знайти кути, які утворює пряма $\begin{cases} 2x-2y-z+8=0 \\ x+2y-2z+1=0 \end{cases}$ з осями координат.

Розв'язання.

Знайдемо координати напрямного вектора даної прямої:

$$\vec{q}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=6\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}, \quad \vec{q}=(6;\,3;\,6).$$

Знаходимо косинус кута між осями координат та напрямним вектором $\vec{q}$:

$$\cos\alpha=\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+p^2}}=\frac{6}{\sqrt{6^2+3^2+6^2}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3},$$

$$\cos\beta=\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+p^2}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}, \qquad \cos\gamma=\frac{p}{\sqrt{l^2+m^2+p^2}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

11. Знайти кут між прямими

$$\begin{cases} 2x-2y-z+8=0, \\ x+2y-2z+1=0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 4x+y+3z-21=0, \\ 2x+2y-3z+15=0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Напрямний вектор першої прямої має координати

$$\vec{q}_1=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -1\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}=6\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k},\quad \vec{q}_1=(6;\,3;\,6).$$

Знайдемо координати напрямного вектора другої прямої:

$$\vec{q}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 1 & 3\\ 2 & 2 & -3\end{vmatrix}=-9\vec{i}+18\vec{j}+6\vec{k},\quad \vec{q}_2=(-9;\,18;\,6).$$

Знаючи напрямні вектори прямих, знайдемо кут між ними

$$\cos\varphi=\frac{\vec{q}_1\vec{q}_2}{|\vec{q}_1||\vec{q}_2|},\ \cos\varphi=\frac{6(-9)+3\cdot18+6\cdot6}{\sqrt{36+9+36}\sqrt{(-9)^2+18^2+6^2}}=\frac{4}{21},$$

$$\varphi=\arccos\frac{4}{21}.$$

12. Написати канонічне рівняння прямої, що проходить через точку M_0 (2; 0; –3) паралельно:

а) вектору $\vec{S}\{2;\,-3;\,5\}$;

б) прямій $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$;

в) осі Ox;

г) осі Oz;

д) прямій $\begin{cases}3x-y+2z-7=0,\\ x+3y-2z-3=0;\end{cases}$

е) прямій $\begin{cases}x=-2+t,\\ y=2t,\\ z=1-\dfrac{1}{2}t.\end{cases}$

Розв'язання:

а) Запишемо канонічне рівняння прямої, що проходить через точку M_0(2; 0; –3) паралельно вектору $\vec{S}\{2;\,-3;\,5\}$; застосовуючи формулу: $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$, маємо $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+3}{5}$.

б) Запишемо канонічне рівняння прямої, що проходить через точку M_0(2; 0; –3) паралельно прямій $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$; застосовуючи формулу: $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$, маємо $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$.

в) Запишемо канонічне рівняння прямої, що проходить через точку M_0 (2; 0; –3) паралельно осі Ox; застосовуючи формулу:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}, \quad \text{маємо} \qquad \frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{0}.$$

г) Запишемо канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;\ 0;\ -3)$ паралельно осі Oz

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{1}.$$

д) Запишемо канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;\ 0;\ -3)$ паралельно прямій $\begin{cases}3x-y+2z-7=0,\\ x+3y-2z-3=0.\end{cases}$ Знаходимо напрямний вектор для прямої $\begin{cases}3x-y+2z-7=0,\\ x+3y-2z-3=0,\end{cases}$

$\vec{S}=\left\{\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\right\}=\{-4;\ 8;\ 10\}$, тоді канонічне рівняння прямої набуває вигляду

$$\frac{x-2}{-4}=\frac{y}{8}=\frac{z+3}{10}.$$

е) Запишемо канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;\ 0;\ -3)$ паралельно прямій $\begin{cases}x=-2+t,\\ y=2t,\\ z=1-\dfrac{1}{2}t.\end{cases}$ Знаходимо напрямний вектор прямої: $\vec{S}\left\{1;\ 2;\ -\dfrac{1}{2}\right\}$.

Тоді шукане рівняння прямої має вигляд $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+3}{-\frac{1}{2}}$.

13. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(2;\ 3;\ 1)$ на пряму $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$.

Розв'язання.

Рівняння площини, що проходить через точку $A(2;\ 3;\ 1)$ перпендикулярно заданій прямій, має вигляд:

$$2(x-2)-(y-3)+3(z-1)=0, \qquad 2x-y+3z-4=0.$$

Знайдемо координати точки B перетину площини $2x - y + 3z - 4 = 0$ і прямої $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 4 = 0, \\ x = 2t - 1, \\ y = -t, \\ z = 3t + 2 \end{cases} \Rightarrow\ t = 0.$$

Координати точки $B(-1; 0; 2)$. Тепер запишемо рівняння перпендикуляра AB: $\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-3}{0-3} = \frac{z-1}{2-1}$.

Отже, шукане рівняння перпендикуляра AB запишеться у такому вигляді

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{1}.$$

Домашнє завдання

1. Записати в канонічному та параметричному вигляді рівняння прямої $\begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0, \\ 2x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$

Відповідь: $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-7} = \frac{z+1}{-5}$; $x = -t,\ \ y = 1 - 7t,\ \ z = -1 - 5t.$

2. Скласти рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(3; -1; 0)$ і $M_2(1; 0; -3)$.

Відповідь. $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-3}$.

3. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(1; -2; 3)$ і пряму $\begin{cases} 2x - 3y + z - 3 = 0, \\ x + 3y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$

Відповідь. $2x + 15y + 7z + 7 = 0$.

4. Через точку $M_0(1; 1; 1)$ провести пряму, паралельну до площин $x + y + z + 1 = 0$ і $x - y - z + 2 = 0$.

Відповідь. $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$.

5. Знайти проекцію точки $P_0(-1; 3; 2)$ на площину $x-2y+$ $+5z+27=0$.

Відповідь. (–2; 5; –3).

6. Переконатися, що задані прямі $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ і $\frac{x-1}{3}=$ $=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$ лежать в одній площині. Скласти рівняння цієї площини.

Відповідь. $6x-20y-11z+1=0$.

7. У паралелограмі задано три послідовні вершини: $A(6; 2; -10)$, $B(9; -5; 6)$, $C(2; -8; 4)$. Скласти рівняння його діагоналей.

Відповідь. $\frac{x-6}{2}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-10}{-7}$, $\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-7}{9}$.

8. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-1}{-1}$ і площини $x+2y-3z-9=0$.

Відповідь. $(5; 2; 0)$.

9. Обчислити гострий кут між прямими $\begin{cases} x=11t-1, \\ y=-8t+4, \\ z=-7t+5 \end{cases}$ і $\frac{x+2}{7}=$ $=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{-8}$.

Відповідь. $60°$.

10. Переконатися, що прямі $\begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0. \end{cases}$ і $\frac{x+7}{3}=$ $=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$ паралельні.

Відповідь: Так.

9.2. Задачі на пряму і площину в просторі

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Загальне рівняння площини має вигляд...
2. Рівняння площини, що проходить через три задані точки, має вигляд...

3. Запишіть рівняння площини у відрізках на осях.

4. Відстань від точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до площини можна знайти за формулою...

5. Запишіть умову паралельності двох площин.

Завдання для аудиторної роботи

1. Знайти точку перетину площини $2x+3y+3z-8=0$ з прямою $\frac{x+5}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+3}{2}$.

Розв'язання.

Подамо рівняння прямої в параметричному вигляді

$$\begin{cases} \frac{x+5}{3}=t, \\ \frac{y-3}{-1}=t, \\ \frac{z+3}{2}=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3t-5, \\ y=3-t, \\ z=2t-3. \end{cases}$$

Підставимо $\begin{cases} x=3t-5, \\ y=3-t, \\ z=2t-3 \end{cases}$ в рівняння площини $2x+3y+3z-8=0$ і визначимо t:

$$2(3t-5)+3(3-t)+3(2t-3)-8=0,$$
$$6t-10+9-3t+6t-9-8=0,$$
$$9t=18 \Rightarrow t=2.$$

Підставляючи параметр t в систему $\begin{cases} x=3t-5, \\ y=3-t, \\ z=2t-3 \end{cases}$ отримаємо $\begin{cases} x=1, \\ y=1, \\ z=1. \end{cases}$

Відповідь. $M(1;1;1)$ — точка перетину площини $2x+3y+$ $+3z-8=0$ з прямою $\frac{x+5}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+3}{2}$.

2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(1; -2; 3)$ і пряму $\begin{cases} 2x-3y+z-3=0; \\ x+3y+2z+1=0. \end{cases}$

Розв'язання.

Нехай точка $M(x; y; z)$ належить площині π, а точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ — прямій. Вектори $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AM_1}$ і $\vec{S}$ компланарні, тому рівняння площини π має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0.$$

Знайдемо координати точки M_1:

$$\begin{cases} 2x-3y+z-3=0, \\ x+3y+2z+1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} y=0, \\ 2x+z-3=0, \\ x+2z+1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} y=0, \\ -2-4z+z-3=0, \\ x=-1-2z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0, \\ z=-\dfrac{5}{3}, \\ x=\dfrac{7}{3}; \end{cases} \qquad M_1\left(\frac{7}{3};\ 0;\ -\frac{5}{3}\right).$$

Знайдемо напрямний вектор прямої $\begin{cases} 2x-3y+z-3=0; \\ x+3y+2z+1=0. \end{cases}$

$$\vec{q}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=\{-9;\ -3;\ 9\}.$$

Отже, $\vec{q}=\{-9;\ -3;\ 9\}$.

Оскільки точка A збігається з точкою M_0, то рівняння площини π, яка проходить через точку $A(1; -2; 3)$ і пряму $\begin{cases} 2x-3y+z-3=0; \\ x+3y+2z+1=0, \end{cases}$ запишемо у вигляді

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ \dfrac{7}{3}-1 & 0+2 & -\dfrac{5}{3}-3 \\ -9 & -3 & 9 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix} 0+2 & -\dfrac{5}{3}-3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}-(y+2)\cdot\begin{vmatrix} \dfrac{7}{3}-1 & -\dfrac{5}{3}-3 \\ -9 & 9 \end{vmatrix}+(z-3)\cdot\begin{vmatrix} \dfrac{7}{3}-1 & 2 \\ -9 & -3 \end{vmatrix}=0,$$

$$4\cdot(x-1)-(-30)\cdot(y+2)+14\cdot(z-3)=0,$$
$$4x+30y+14z+14=0,$$
$$2x+15y+7z+7=0.$$

Відповідь. $2x+15y+7z+7=0.$

3. Задано пряму $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{0}$ і точку $M(0;\ 1;\ 2)$. Необхідно:

а) скласти рівняння площини, що проходить через задану пряму і точку M;

б) скласти рівняння площини, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої;

в) знайти проекцію точки M на пряму;

г) обчислити відстань від точки до прямої.

Розв'язання.

а) З рівняння прямої $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{0}$ випливає, що точка, через яку проходить дана пряма, має координати $A(2;\ 0;\ -1)$, а напрямний вектор — $\vec{q}=\{2;\ 1;\ 0\}$.

Знаходимо рівняння площини:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-2 \\ 2-0 & 0-1 & -1-2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0;$$

$$3x-6(y-1)+4(z-2)=0,\ \ 3x-6y+4z-2=0\,.$$

б) Запишемо рівняння площини, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої

$$2(x-0)+1(y-1)+0(z-2)=0,\qquad 2x+y-1=0.$$

в) Спочатку знайдемо рівняння площини, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої $2x+y-1=0.$ Знайдемо точку перетину прямої і площини:

$$\begin{cases} 2x+y-1=0, \\ x=2t+2, \\ y=t, \\ z=-1; \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 2(2t+2)+t-1=0, \\ 4t+4+t-1=0, \\ 5t=-3,\ t=-\dfrac{3}{5}; \end{array} \quad \begin{cases} x=-\dfrac{6}{5}+2, \\ y=-\dfrac{3}{5}, \\ z=-1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{4}{5}, \\ y=-\dfrac{3}{5}, \\ z=-1; \end{cases}$$

$M_1\left(\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}; -1\right)$ — проекція точки M на пряму.

г) Обчислимо відстань від точки $M(0;1;2)$ до прямої $\frac{x-2}{2} =$ $= \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$:

$$d(M, l) = d(M, M_1) = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(1 + \frac{3}{5}\right)^2 + (2+1)^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{64}{25} + 9} = \sqrt{\frac{305}{25}} = \sqrt{\frac{61}{5}}.$$

4. Задано площину $x - y - z + 1 = 0$ і пряму $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$.

Необхідно:

а) обчислити синус кута між прямою і площиною;

б) координати точки перетину прямої і площини;

в) скласти рівняння площини Π, що проходить через задану пряму, перпендикулярну до площини.

Розв'язання.

а) Оскільки нормальний вектор площини та напрямний вектор прямої мають відповідно координати $\vec{n} = \{1; -1; -1\}$, $\vec{q} = \{0; 2; 1\}$, то знайдемо синус кута між прямою і площиною

$$\sin\varphi = \sin\left(\widehat{\overline{n}, \overline{q}}\right) = \frac{\overline{n} \cdot \overline{q}}{|\overline{n}||\overline{q}|};$$

$$\sin\varphi = \frac{|0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

б) Знайдемо точку перетину прямої і площини:

$$\begin{cases} x - y - z + 1 = 0, \\ x = 1, \\ y = 2t, \\ z = t - 1; \end{cases} \quad 1 - 2t - t + 1 + 1 = 0; \quad t = 1; \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 1 - 1 = 0. \end{cases}$$

Точка $(1; 2; 0)$ — точка перетину прямої і площини;

в) Рівняння прямої, що проходить через точку (1; 2; 0) перпендикулярно до площини $x - y - z + 1 = 0$, має вигляд:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-0}{-1}.$$

Проведемо площину через отриману пряму і точку даної прямої (1; 0; –1).

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1-1 & 2 & 0+1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$$-1(x-1)+1\cdot y-2(z+1)=0, \quad -x+1+y-2z-2=0,$$

$$x-y+2z+1=0.$$

5. Знайти точку B, симетричну точці $A(1;\ 3;\ -4)$ відносно площини $3x+y-2z=0$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку A, перпендикулярно до площини:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+4}{-2}.$$

Знайдемо точку перетину прямої і площини:

— запишемо рівняння прямої в параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x=3t+1, \\ y=t+3, \\ z=-2t-4; \end{cases}$$

— підставимо отримані рівності в рівняння площини:

$$9t+3+t+3+4t+8=0, \qquad 14t+14=0, \qquad t=-1.$$

Точка $1\left(-2;\, 2;\, -2\right)$ — проекція точки A на площину, середина відрізка AB;

— запишемо рівняння для відшукання координат точки B:

$$-2=\frac{1+x}{2}; \qquad 2=\frac{3+y}{2}; \qquad -2=\frac{-4+z}{2};$$

$$x=-5; \qquad y=1; \qquad z=0.$$

Відповідь. $B\,(-5;\ 1;\ 0)$.

6. Переконатися, що прямі $\begin{cases} 2x+2y-z=0; \\ x-y-z-1=0 \end{cases}$ і $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+30}{-1}=\dfrac{z-2}{4}$ паралельні між собою, і знайти відстань між ними.

Розв'язання.

1) Знаходимо напрямний вектор першої прямої $\begin{cases} 2x+2y-z=0; \\ x-y-z-1=0. \end{cases}$

$$\vec{s}_1=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=\{-3;\ 1;-4\};$$

$$\vec{s}_1=\{-3;\ 1;-4\}.$$

Напрямний вектор другої прямої набуває вигляду

$$\vec{s}_2=\{3;-1;4\}.$$

Застосовуючи умову паралельності двох прямих, маємо:

$$\frac{-3}{3}=\frac{1}{-1}=\frac{-4}{4}=-1.$$

Отже, прямі $\begin{cases} 2x+2y-z=0; \\ x-y-z-1=0 \end{cases}$ і $\frac{x}{3}=\frac{y+30}{-1}=\frac{z-2}{4}$ паралельні.

2) Знайдемо координати однієї з точок першої прямої:

Нехай $y=0$, тоді $\begin{cases} 2x-z=0, \\ x-z-1=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2z+2-z=0, \\ x=z+1; \end{cases}$ $\begin{cases} z=-2, \\ x=-1; \end{cases}$ $M_1(-1;\ 0;\ -2)$.

Точка $M_2(0;\ -30;\ 2)$ — точка, через яку проходить друга пряма, отже, $\overrightarrow{M_1M_2}=\{1;-30;4\}$.

3) Знайдемо відстань між прямими за формулою

$$d=\frac{\left|\vec{s}_2\times\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{|\vec{s}_2|}=\frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -30 & 4 \end{vmatrix}}{\sqrt{(-3)^2+1^2+(-4)^2}}=\frac{\sqrt{116^2+(-8)^2+(-89)^2}}{\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{21441}}{26}.$$

Відповідь: прямі паралельні; $d=\frac{\sqrt{21441}}{26}$.

7. Знайти кут між прямою $\begin{cases} 3x-2y=24 \\ 3x-z=-4 \end{cases}$ і площиною $6x+15y-10z+31=0$.

Розв'язання.

Знайдемо координати напрямного вектора прямої $\begin{cases} 3x-2y=24 \\ 3x-z=-4 \end{cases}$

$$\vec{q}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}=2\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}, \quad \vec{q}=\{2;3;6\}.$$

Вектор $\vec{n}(6;15;-10)$ — нормальний вектор площини $6x+15y-$ $-10z+31=0.$

Тоді кут між прямою $\begin{cases} 3x-2y=24 \\ 3x-z=-4 \end{cases}$ і площиною $6x+15y-10z+$ $+31=0$ знайдемо за формулою

$$\sin\varphi=\frac{\vec{q}\cdot\vec{n}}{|\vec{q}||\vec{n}|}, \ \sin\varphi=\frac{2\cdot6+3\cdot15+6\cdot(-10)}{\sqrt{4+9+36}\sqrt{36+225+100}}=\frac{3}{133}, \ \varphi=\arcsin\frac{3}{133}.$$

8. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-1;-5;8)$ і перпендикулярна до прямої $\frac{x}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{5}.$

Розв'язання.

Маючи точку $M_0(-1;-5;8)$ (через яку проходить пряма) та напрямний вектор $\vec{q}(0;2;5)$, запишемо рівняння площини за формулою:

$$l(x-x_0)+m(y-y_0)+p(z-z_0)=0.$$

Маємо: $0(x+1)+2(y+5)+5(z-8)=0, \quad 2y+5z-30=0.$

9. Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат та перпендикулярна до площини $3x+5z-5=0$, у вигляді симетричного та параметричного рівнянь.

Розв'язання.

Пряма, яка проходить через точку $O(0;0;0)$ і перпендикулярна до площини $3x+5z-5=0$, подається симетричним рівнянням $\frac{x-0}{3}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-0}{5}.$ За формулою $\begin{cases} x=mt+x_0, \\ y=nt+y_0, \\ z=pt+z_0 \end{cases}$

запишемо параметричне рівняння $\begin{cases} x = 3t, \\ y = 0, \\ z = 5t. \end{cases}$

10. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(5;\ 2;\ 3)$ та пряму $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{3}$.

Розв'язання.

З рівняння прямої знайдемо координати точки $M_1(-1;\ -1;\ 5)$, через яку вона проходить, та напрямний вектор $\vec{q}(2;\ 1;\ 3)$.

Знайдемо рівняння площини за формулою

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & p \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-2 & z-3 \\ -1-5 & -1-2 & 5-3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-5 & y-2 & z-3 \\ -6 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-5)\cdot(-11) - (y-2)\cdot(-22) + (z-3)\cdot 0 = 0,$$

$$x - 5 - 2y + 4 = 0,\ x - 2y - 1 = 0.$$

Відповідь. Шукане рівняння площини має вигляд $x - 2y - 1 = 0$.

11. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1;\ 1;\ 1)$ та паралельна до двох прямих: $\frac{x}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{5}$ та $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{3}$.

Розв'язання.

З рівнянь прямих видно, що їхні напрямні вектори відповідно мають координати $\vec{q}_1(0;\ 2;\ 5)$ та $\vec{q}_2(2;\ 1;\ 3)$.

Рівняння площини, яка проходить через дану точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ та паралельна до двох даних прямих, розраховується за формулою

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-1)-(-10)(y-1)+(-4)(z-1)=0, \qquad x+10y-4z-7=0.$$

Відповідь. $x+10y-4z-7=0.$

12. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$ та перпендикулярна до площини $x-y-z+2=0.$

Розв'язання.

З рівняння прямої видно, що точка, через яку проходить пряма, та напрямний вектор мають, відповідно, координати $M_0(1;\,1;\,1)$ та $\vec{q}_1(0;-1;\,1)$, а площина має нормальний вектор $\vec{n}(1;-1;-1)$.

Рівняння площини, яка проходить через дану пряму та перпендикулярна до даної площини, запишеться за формулою

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & p_1 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$$2(x-1)-(-1)(y-1)+(z-1)=0, \qquad 2x+y+z-4=0.$$

Відповідь: рівняння площини набуває вигляду $2x+y+z-4=0.$

Домашнє завдання

1. Переконатися, що задані прямі $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ і $\frac{x-1}{3}=$ $=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$ лежать в одній площині. Скласти рівняння цієї площини.

Відповідь. $6x-20y-11z+1=0.$

2. Через точку $M_0(1;1;1)$ провести пряму, паралельну площинам $x+y+z+1=0$ і $x-y-z+2=0.$

Відповідь. $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}.$

3. Знайти проекцію точки $P_0(-1;\,3;\,2)$ на площину $x-2y+$ $+5z+27=0$.

Відповідь. (–2; 5; –3).

4. Скласти рівняння та знайти довжину перпендикуляра, опущеного з точки $(1;\,0;\,4)$ на пряму $\begin{cases} x-y+z-1=0, \\ 2x+y-z+4=0. \end{cases}$

Відповідь. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$; 3.

5. Знайти відстань від точки $A(1;\,-1;\,0)$ до прямої, що проходить через точки $B(0;\,1;\,2)$ і $C(-1;\,0;\,3)$.

Відповідь. $\dfrac{1}{3}\sqrt{78}$.

6. Скласти рівняння прямої, паралельної площинам $x-y+z-1=0$, $2x+y=0$, що перетинала б прямі $x=y=z$ і $x=2t$, $y=t-1$, $z=-t$.

Відповідь. $\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{3}$.

ПІДМОДУЛЬ 10
Криві другого порядку

10.1. Канонічне рівняння кола й еліпса та їх властивості

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Що називається лінією другого порядку?
2. Що називається колом?
3. Вивести параметричні рівняння кола.
4. Що називається еліпсом? Вивести канонічне рівняння еліпса.
5. Записати параметричні рівняння еліпса.

Завдання для аудиторної роботи

1. Написати рівняння кола, якщо точки $A(-2;3)$ і $B(2;1)$ є кінцями його діаметра.

Розв'язання.

Нехай $O_1(a;\ b)$ — центр кола. Тоді з рівності $AO_1 = O_1B$ та формул $a = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $b = \dfrac{y_A + y_B}{2}$ отримуємо $a = \dfrac{-2+2}{2} = 0$, $b = \dfrac{3+1}{2} = 2$.

Оскільки радіус кола $R = AO_1 = \sqrt{5}$, тоді, підставивши значення a, b та R в рівняння $(x-a)^2 + (x-b)^2 = R^2$, дістанемо:

$$(x-0)^2 + (y-2)^2 = 5, \quad \text{або} \quad x^2 + (y-2)^2 = 5.$$

2. Знайти центр і радіус кола $x^2 + y^2 + x - y = 0$.

Розв'язання.

Згрупуємо доданки зі змінною x та змінною y і доповнимо одержані вирази до повних квадратів:

$$x^2 + y^2 + x - y = 0, \ \text{або} \ \left(x^2 + 2\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + \left(y^2 - 2\frac{y}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} = 0.$$

Звідки
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: точка $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ — центр кола, а $R = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$ — його радіус.

3. Записати рівняння кола, яке проходить через три точки: $A(0;2)$, $B(2;1)$, $C(3;0)$.

Розв'язання.

Шукане рівняння кола має вигляд $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. Підставимо по черзі в це рівняння координати даних точок, отримаємо три рівняння для визначення невідомих:

$$a^2 + (2-b)^2 = R^2, \quad (2-a)^2 + (1-b)^2 = R^2, \quad (3-a)^2 + b^2 = R^2.$$

Прирівняємо ліві частини першого і другого та першого і третього рівнянь, отримаємо:

$$\left.\begin{aligned} a^2+(2-b)^2=(2-a)^2+(1-b)^2 \\ a^2+(2-b)^2=(3-a)^2+b^2 \end{aligned}\right\}.$$

Розкриваючи дужки та спрощуючи вирази, дістаємо систему лінійних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} 4a-2b=1 \\ 6a-4b=5 \end{aligned}\right\}.$$

Звідси $a=-\dfrac{3}{2},\ b=\dfrac{7}{2}$. Підставляючи ці значення a та b в перше рівняння системи, отримаємо $R^2=\dfrac{65}{2}$. Отже, шукане рівняння кола має вигляд: $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2=\dfrac{65}{2}$, або після спрощення

$$x^2+y^2+3x-7y-18=0.$$

4. Скласти рівняння кола, описаного навколо трикутника, сторони якого задані рівняннями $9x-2y-41=0$, $7x+4y+7=0$, $x-3y+1=0$.

Розв'язання.

Знайдемо координати вершин трикутника, розв'язавши три системи рівнянь:

$$\begin{cases} 9x-2y-41=0, \\ 7x+4y+7=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 9x-2y-41=0, \\ x-3y+1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 7x+4y+7=0, \\ x-3y+1=0. \end{cases}$$

У результаті отримаємо $A(3;-7), B(5;2), C(-1;0)$.

Нехай шукане рівняння кола має вигляд $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Для знаходження a, b та R запишемо три рівняння, підставляючи в шукане рівняння координати точок A, B та C:

$$\begin{cases} (3-a)^2+(-7-b)^2=R^2, \\ (5-a)^2+(2-b)^2=R^2, \\ (-1-a)^2+b^2=R^2. \end{cases}$$

Виключаючи R^2, отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases}(3-a)^2+(-7-b)^2=(5-a)^2+(2-b)^2, \\ (3-a)^2+(-7-b)^2=(-1-a)^2+b^2,\end{cases} \text{або} \begin{cases}4a+18b=-29, \\ 8a-14b=57.\end{cases}$$

Звідси $a=3{,}1$, $b=-2{,}3$. Значення R^2 знаходимо з рівняння $(-1-a)^2+b^2=R^2$, тобто $R^2=22{,}1$. Тоді шукане рівняння матиме вигляд $(x-3{,}1)^2+(y+2{,}3)^2=22{,}1$.

5. Записати рівняння кола, яке проходить через точки $A(6;\,1)$ та $B(2;\,5)$, якщо його центр лежить на прямій $x+y-3=0$.

Розв'язання.

Знайдемо координати точки M — середини хорди:

$$x=\frac{6+2}{2}=4,\quad y=\frac{1+5}{2}=3,\quad \text{тобто}\quad M(4;\,3).$$

Центр кола лежить на серединному до відрізка AB перпендикулярі. Рівняння прямої AB має вигляд:

$$\frac{y-1}{5-1}=\frac{x-6}{2-6},\quad \text{тобто}\quad y=-x+7,\quad x+y-7=0.$$

Оскільки кутовий коефіцієнт прямої AB дорівнює $k_1=-1$, то кутовий коефіцієнт перпендикуляра до неї дорівнює $k=-\dfrac{1}{k_1}=1$. Тоді рівняння цього перпендикуляра запишеться у вигляді:

$$y-3=1(x-4),\quad \text{тобто}\quad x-y-1=0.$$

Знайдемо координати центра кола (це точка перетину прямої AB з даним перпендикуляром). Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}x+y-7=0, \\ x-y-1=0,\end{cases} \text{тобто} \begin{cases}x=4, \\ y=3.\end{cases}$$

Отже, точка $C(4;\,3)$ — центр кола. Знайдемо радіус кола (довжина відрізка CA). Обчислимо $R=\sqrt{(6-4)^2+(1-3)^2}=\sqrt{8}$. Таким чином, шукане рівняння кола має вигляд: $(x-4)^2+(y-3)^2=8$.

6. Скласти канонічне рівняння еліпса, який проходить через точки $A\left(\dfrac{3}{2};\,1\right)$ та $B\left(2;\,\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$, якщо фокуси його лежать на осі Ox симетрично відносно початку координат.

Розв'язання.

За умовою координати заданих точок задовольняють рівняння еліпса:

$$\frac{9}{4a^2}+\frac{1}{b^2}=1, \qquad \frac{4}{a^2}+\frac{2}{9b^2}=1.$$

Розв'язуючи систему рівнянь: $\begin{cases}\dfrac{9}{4a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1,\\ \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{2}{9b^2}=1,\end{cases}$ знаходимо $a^2=\dfrac{9}{2}$, $b^2=2$.

Отже, шукане рівняння еліпса має вигляд: $\dfrac{2x^2}{9}+\dfrac{y^2}{2}=1.$

7. Скласти рівняння еліпса, якщо:

а) відстань між фокусами $2c=10$, а велика вісь $2a=16$;

б) мала піввісь $b=8$, а ексцентриситет $\varepsilon=0,6$;

в) сума півосей $a+b=12$, а відстань між фокусами $2c=6\sqrt{2}$.

Розв'язання:

а) За умовою $2c=10$, $2a=16$, тоді $c=5$, $a=8$. Зі співвідношення між величинами a, b та c знайдемо малу піввісь:

$$a^2-b^2=c^2, \quad b^2=a^2-c^2, \quad b^2=64-25=39.$$

Отже, рівняння еліпса має вигляд: $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{39}=1.$

б) $b=8$, $\varepsilon=0,6$; з формули $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ отримуємо $\dfrac{c}{a}=0,6$, $c=0,6a$.

Зі співвідношення між величинами a, b та c знайдемо велику піввісь: $a^2-c^2=b^2$, $a^2=b^2+c^2$, $a^2=64+0,36a^2$, $0,64a^2=64$, $a^2=100$.

Отже, шукане рівняння еліпса набуває вигляду: $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1.$

в) $a+b=12$, $2c=6\sqrt{2}$.

Для визначення рівняння еліпса треба знайти *a* та *b*. Нам відомо, що $c=3\sqrt{2}$, $c^2=18$. Оскільки $a^2-b^2=c^2$, то

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=18, \quad 12(a-b)=18, \quad (a-b)=1,5.$$

Розв'яжемо систему рівнянь: $\begin{cases} a+b=12, \\ a-b=1{,}5, \end{cases}$ $\begin{cases} a=6{,}75, \\ b=5{,}25. \end{cases}$

Отже, рівняння еліпса має вигляд: $\dfrac{x^2}{6{,}75^2}+\dfrac{y^2}{5{,}25^2}=1.$

8. Знайти довжини осей, координати фокусів та ексцентриситет еліпса $4x^2+9y^2=144$.

Розв'язання.

Зведемо дане рівняння до канонічного вигляду. Розділивши обидві частини рівняння на 144, отримаємо $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1$. Звідси випливає, що $a^2=36$, $b^2=16$, $a=6$, $b=4$. Отже, довжини осей відповідно дорівнюють $2a=12$, $2b=8$. Зі співвідношення між величинами a, b та c $c^2=a^2-b^2$, знайдемо: $c=2\sqrt{5}$. Отже, координати фокусів $F_1\left(2\sqrt{5},\, 0\right)$ та $F_2\left(-2\sqrt{5},\, 0\right)$.

Ексцентриситет еліпса: $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$, $\quad \varepsilon=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

9. З точки $A(10;\,-8)$ проведені дотичні до еліпса $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$, які дотикаються до нього в точках B та C. Знайти квадрат довжини хорди BC.

Розв'язання.

Записуючи загальне рівняння дотичної до еліпса в точці $(x_0;\, y_0)$, одержимо $\dfrac{xx_0}{25}+\dfrac{yy_0}{16}=1$. Враховуючи, що точка A лежить на цій прямій, а точка $(x_0;\, y_0)$ — на еліпсі, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{10x_0}{25}-\dfrac{8y_0}{16}=1, \\ \dfrac{x_0^2}{25}+\dfrac{y_0^2}{16}=1. \end{cases}$$

Розв'язавши її, матимемо координати точок:

$$B\left(\frac{5}{4}\left(\sqrt{7}+1\right);\, \sqrt{7}-1\right),\ C\left(\frac{5}{4}\left(1-\sqrt{7}\right);\, -1-\sqrt{7}\right).$$

Звідси $\left|BC\right|^2=\dfrac{287}{4}.$

10. Задано рівняння лінії другого порядку $x^2+4y^2-6x+4y+$ $+5=0$. Визначити вид кривої, знайти її фокуси, півосі, ексцентриситет.

Розв'язання.

Виділивши повні квадрати за змінними x та y, дістанемо

$$\left(x^2-6x\right)+\left(4y^2+4y\right)+5=0,$$

$$\left(x^2-6x+9-9\right)+4\left(y^2+y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+5=0,$$

$$\left(x-3\right)^2+4\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=5,\quad \frac{\left(x-3\right)^2}{5}+\frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{5}{4}}=1.$$

Одержали рівняння еліпса з центром у точці $A\left(3;-\dfrac{1}{2}\right)$, великою піввіссю $a=\sqrt{5}$ та малою піввіссю $b=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Половину фокусної відстані c знайдемо з умови

$$c^2=a^2-b^2,\quad c=\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Фокуси F_1 і F_2 лежать на осі Oy і мають відповідно координати $\left(0;-\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$ і $\left(0;\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$.

Ексцентриситет: $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

11. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо він проходить через точку $M_0\left(2;-\dfrac{5}{3}\right)$, а його ексцентриситет дорівнює $\varepsilon=\dfrac{2}{3}$.

Розв'язання.

Канонічне рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

де a, b, c та ε пов'язані між собою співвідношенням $b^2 = a^2 - c^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Щоб записати рівняння еліпса, потрібно відшукати a та b. Для цього ми маємо систему рівнянь відносно невідомих параметрів (якщо точка M міститься на еліпсі, її координати задовольняють рівняння еліпса):

$$\begin{cases} \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{\frac{25}{9}}{b^2} = 1, \\ \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{3}, \\ b^2 = a^2 - c^2. \end{cases}$$

Із другого рівняння виразимо $c = \frac{2}{3}a$ і підставимо у третє:

$$b^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{5}{9}a^2,$$

а тепер замість b^2 його вираз підставимо в перше рівняння:

$$\frac{4}{a^2} + \frac{25}{9\frac{5}{9}a^2} = 1, \quad \frac{4}{a^2} + \frac{5}{a^2} = 1, \quad a^2 = 9.$$

Тоді $b^2 = \frac{5}{9}a^2 = \frac{5}{9}9 = 5.$

Таким чином, шукане рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

Домашнє завдання

1. Скласти рівняння кола, що дотикається до двох паралельних прямих $2x + y - 5 = 0$ і $2x + y + 15 = 0$, причому до однієї з них — у точці $A(2; 1)$.

Відповідь. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 20.$

2. Написати рівняння діаметра кола $x^2+y^2+4x-6y-17=0,$ перпендикулярного до прямої $5x+2y-13=0.$

Відповідь. $2x-5y+19=0.$

3. Обчислити відстань від центра кола $x^2+y^2-2x=0$ до прямої, що проходить через точки перетину двох кіл: $x^2+y^2+5x-8y+1=0$ та $x^2+y^2-3x+7y-25=0.$

Відповідь. 2.

4. З точки $P(-9;3)$ проведено дотичні до кола x^2+y^2-6x+ $+4y-78=0.$ Обчислити відстань від центра кола до хорди, що сполучає точки дотику.

Відповідь. 7.

5. Скласти рівняння дотичних до кола $x^2+y^2-2x+4y=0,$ перпендикулярних прямій $x-2y+9=0.$

Відповідь: $2x+y-5=0,$ $2x+y+5=0.$

6. Запишіть рівняння еліпса, фокуси якого розміщенні на осі Ox, симетрично відносно початку координат, якщо мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами $2c=10.$

Відповідь. $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1.$

7. Обчислити площу чотирикутника, дві вершини якого лежать у фокусах еліпса $x^2+5y^2=20,$ дві інші збігаються з кінцями його малої осі.

Відповідь. 16 кв. од.

8. На еліпсі $9x^2+25y^2=225$ знайти точки, відстань яких від правого фокуса в чотири рази більша за відстань від лівого.

Відповідь. $\left(-\dfrac{15}{4};\pm\dfrac{\sqrt{63}}{4}\right).$

9. Встановити, яку лінію визначає рівняння $5x^2+9y^2-30x+$ $+18y+9=0,$ знайти її центр C, півосі та ексцентриситет.

Відповідь: $C(3;-1)$, $a=3$, $b=\sqrt{5}$, $\varepsilon=\dfrac{2}{3}.$

10. Скласти рівняння дотичних до еліпса $x^2 + 4y^2 = 20$, перпендикулярних прямій $2x - 2y - 13 = 0$.

Відповідь: $x + y - 5 = 0, x + y + 5 = 0$.

11. З точки $P(-16; 9)$ проведено дотичні до еліпса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. Обчислити відстань від точки P до хорди еліпса, що сполучає точки дотику.

Відповідь. 18.

10.2. Канонічне рівняння гіперболи, параболи, їх властивості

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Що називається гіперболою? Записати канонічне та параметричне рівняння гіперболи.
2. Вивести рівняння асимптот гіперболи.
3. Що називається фокальним радіусом, ексцентриситетом і директрисою гіперболи?
4. Що називається параболою? Вивести канонічне рівняння параболи.

Завдання для аудиторної роботи

1. Звести до канонічного вигляду рівняння лінії другого порядку. Визначити вид кривої, знайти її фокуси, півосі, ексцентриситет, рівняння директрис і асимптот (для гіперболи), якщо:

а) $5x^2 - 2y^2 + 20x + 4y + 3 = 0$;

б) $x^2 - 6x - 2y + 7 = 0$.

Розв’язання.

а) Розглянемо рівняння $5x^2 - 2y^2 + 20x + 4y + 3 = 0$.

Виділивши повні квадрати за змінними x та y, дістанемо

$$\left(5x^2+20x\right)-\left(2y^2-4y\right)+3=0;$$
$$5\left(x^2+4x+4-4\right)-2\left(y^2-2y+1-1\right)+3=0;$$
$$5\left(x+2\right)^2-2\left(y-1\right)^2=15;\quad \frac{\left(x+2\right)^2}{3}-\frac{\left(y-1\right)^2}{\frac{15}{2}}=1.$$

Це — рівняння гіперболи з центром у точці $C\left(-2;1\right)$, дійсною піввіссю $a=\sqrt{3}$ та уявною піввіссю $b=\sqrt{\frac{15}{2}}$. Половину фокусної відстані c знайдемо з формули $c^2=a^2+b^2$, $c=\sqrt{\frac{21}{2}}$.

Фокуси F_1 і F_2 лежать на осі Ox і мають відповідно координати $\left(-\sqrt{\frac{21}{2}};\,0\right)$ і $\left(\sqrt{\frac{21}{2}};\,0\right)$.

Ексцентриситет: $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $\varepsilon=\sqrt{\frac{7}{2}}$.

Рівняння асимптот: $y=\pm\frac{b}{a}x$, $y=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}x$.

б) Далі розглянемо рівняння $x^2-6x-2y+7=0$.
Виділивши повний квадрат за змінною x, дістанемо
$\left(x^2-6x\right)=2y-7$, $\left(x^2-6x+9\right)-9=2y-7$, $\left(x-3\right)^2=2\left(y+1\right)$.

Таким чином, вершина параболи знаходиться в точці $C\left(3;-1\right)$, параметр $p=1$.

Фокус має координати: $F\left(\frac{p}{2};\,0\right)$, $F\left(\frac{1}{2};\,0\right)$.

Рівняння директриси: $x=-\frac{p}{2}$, $x=-\frac{1}{2}$.

2. Знайти відстань від фокуса гіперболи $x^2-y^2=9$ до її асимптоти.

Розв'язання.

Запишемо канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$, звідки $a=3$, $b=3$ — півосі гіперболи.

Рівняння асимптот: $y = \pm\frac{b}{a}x$, $y = \pm x$.

Половину фокусної відстані c знайдемо з умови $c^2 = a^2 + b^2$, $c = 3\sqrt{2}$.

Фокуси F_1 і F_2 мають відповідно координати $\left(-3\sqrt{2}; 0\right)$ і $\left(3\sqrt{2}; 0\right)$.

За формулою $d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ обчислюємо відстань. Тоді відстань від фокуса F_1 до знайденої асимптоти: $d = 3$.

Відповідь. 3 од.

3. Довести, що добуток відстаней від довільної точки гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ до її асимптот є сталою величиною.

Розв'язання.

Рівняння асимптот запишемо в загальному вигляді $ay \pm bx = 0$. Для довільної точки $(x; y)$ знайдемо відстані до кожної з асимптот:

$$d_1 = \frac{|ay + bx|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad d_2 = \frac{|ay - bx|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ тоді } d_1 d_2 = \frac{\left|ay^2 - bx^2\right|}{a^2 + b^2}.$$

Оскільки для точки $(x; y)$ має місце рівність $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, тому добуток $d_1 d_2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$ — стала величина.

4. Скласти рівняння гіперболи, яка проходить через точку $M(3; 2)$, якщо ексцентриситет гіперболи дорівнює 2.

Розв'язання.

З рівності $\varepsilon = \frac{c}{a}$ отримаємо $\frac{c}{a} = 2$, або $c^2 = 4a^2$. Оскільки $c^2 = a^2 + b^2$, то $a^2 + b^2 = 4a^2$, $b^2 = 3a^2$.

Друге рівняння дістанемо з умови, що точка $M(3; 2)$ належить гіперболі, тоді маємо $\frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$.

Щоб знайти півосі гіперболи, розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{9}{a^2}-\dfrac{4}{b^2}=1, \\ b^2=3a^2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \dfrac{9}{a^2}-\dfrac{4}{3a^2}=1, \\ b^2=3a^2, \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} a^2=\dfrac{23}{3}, \\ b^2=23. \end{cases}$$

Отже, $a=\sqrt{\dfrac{23}{3}},\ b=\sqrt{23}.$

Таким чином, шукане рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{\frac{23}{3}}-\frac{y^2}{23}=1, \text{ або } \frac{3x^2}{23}-\frac{y^2}{23}=1.$$

5. На правій гілці гіперболи $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$ знайти точку, відстань від якої до правого фокуса в три рази менше її відстані від лівого фокуса.

Розв'язання.

Для правої гілки гіперболи фокальні радіуси-вектори визначаються за формулами

$$r_1=\varepsilon x-a \quad \text{та} \quad r_2=\varepsilon x+a.$$

Отже, маємо рівняння $\varepsilon x+a=3(\varepsilon x-a)$, звідки $x=\dfrac{2a}{\varepsilon}.$

З рівняння гіперболи випливає, що $a=5,\ b=4,$ тоді ексцентриситет гіперболи дорівнює

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}, \quad \varepsilon=\frac{\sqrt{41}}{5}, \quad \text{отже,} \quad x==\frac{50}{\sqrt{41}}.$$

Ординату обчислимо з рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1, \quad y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{x^2-25}, \quad y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{\frac{1475}{41}}.$$

Таким чином, умову задачі задовольняють дві точки:

$$M_1\left(\frac{50}{\sqrt{41}};\ \frac{4}{5}\sqrt{\frac{1475}{41}}\right), \quad M_2\left(\frac{50}{\sqrt{41}};\ -\frac{4}{5}\sqrt{\frac{1475}{41}}\right).$$

6. Скласти рівняння гіперболи, якщо відстань між її вершинами дорівнює 10, а відстань між фокусами 20.

Розв'язання.

Вершини гіперболи лежать на її дійсній осі. За умовою $2a = 10$, $2c = 20$.

Отже, $a = 5$, $c = 10$, $a^2 = 25$, $c^2 = 100$.

Оскільки величини a, b та c пов'язані співвідношенням $c^2 = a^2 + b^2$, знайдемо

$$b^2 = c^2 - a^2, \ b^2 = 100 - 25 = 75.$$

Отже, рівняння гіперболи набуває вигляду $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{75} = 1$.

7. Скласти рівняння гіперболи, яка проходить через дві точки $A(3;\, 2)$ та $B\left(-\sqrt{5};\, 1\right)$.

Розв'язання.

Підставляючи в рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ координати точок $A(3;2)$ та $B\left(-\sqrt{5};1\right)$, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1, \\ \frac{5}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1. \end{cases} \quad \text{Знайдемо} \quad \begin{cases} a^2 = \frac{11}{3}, \\ b^2 = \frac{11}{4}. \end{cases}$$

Отже, шукане рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{\frac{11}{3}} - \frac{y^2}{\frac{11}{4}} = 1, \quad \text{або} \quad \frac{3x^2}{11} - \frac{4y^2}{11} = 1.$$

8. Знайти рівняння асимптот гіперболи $3x^2 - 2y^2 = 12$.

Розв'язання.

Дане рівняння зводиться до канонічного вигляду $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$.

Це — рівняння гіперболи з центром у точці $C(0;\, 0)$, дійсною піввіссю $a = 2$ та уявною піввіссю $b = \sqrt{6}$.

Підставляючи ці значення в рівняння асимптот $y = \pm\frac{b}{a}x$, отримаємо

$$y = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}x, \quad \text{або} \quad \sqrt{6}x - 2y = 0 \quad \text{та} \quad \sqrt{6}x + 2y = 0.$$

9. Знайти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться у фокусах рівносторонньої гіперболи $x^2 - y^2 = 9$, якщо відомо, що еліпс проходить через точку $A(2;\, 3)$.

Розв'язання.

Запишемо дане рівняння у канонічному вигляді: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{9} = 1$. З рівняння гіперболи випливає, що $a^2 = b^2 = 9$.

Половину фокусної відстані c знайдемо з умови $c^2 = a^2 + b^2$, $c = 3\sqrt{2}$.

Отже, фокуси гіперболи F_1 і F_2 мають відповідно координати $\left(-3\sqrt{2};\, 0\right)$ і $\left(3\sqrt{2};\, 0\right)$. У цих точках знаходяться також і фокуси еліпса.

Позначимо велику та малу півосі еліпса відповідно через a_1 та b_1, але відстань між фокусами еліпса така ж, як і в гіперболи, тому половину цієї відстані позначимо через c. Для еліпса:

$$c = \sqrt{a_1^2 - b_1^2}, \quad 3\sqrt{2} = \sqrt{a_1^2 - b_1^2}, \quad a_1^2 - b_1^2 = 18.$$

Оскільки точка $A(2;\, 3)$ лежить на еліпсі, то її координати задовольняють рівняння еліпса.

Для знаходження великої та малої півосей еліпса, розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_1^2 - b_1^2 = 18, \\ \dfrac{4}{a_1^2} + \dfrac{9}{b_1^2} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1^2 = 18 + b_1^2, \\ 4b_1^2 + 9\left(18 + b_1^2\right) = \left(18 + b_1^2\right) b_1^2, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1^2 = \dfrac{31 + \sqrt{673}}{2}, \\ b_1^2 = \dfrac{-5 + \sqrt{673}}{2}. \end{cases}$$

Отже, шукане рівняння еліпса набуває вигляду:

$$\frac{x^2}{\dfrac{31 + \sqrt{673}}{2}} + \frac{y^2}{\dfrac{-5 + \sqrt{673}}{2}} = 1, \quad \text{або} \quad \frac{2x^2}{31 + \sqrt{673}} + \frac{2y^2}{-5 + \sqrt{673}} = 1.$$

10. Звести до канонічного вигляду рівняння лінії другого порядку $5x^2 - 2y^2 + 20 = 0$. Визначити вид кривої, знайти її фокуси, півосі, ексцентриситет і рівняння асимптот (для гіперболи).

Розв'язання.

Зведемо дане рівняння до канонічного вигляду

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{10} = -1, \quad \text{або} \quad -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{10} = 1.$$

Це — рівняння гіперболи з центром у точці $C(0;\,0)$, дійсною піввіссю $b=\sqrt{10}$ та уявною піввіссю $a=2$.

Половину фокусної відстані c знайдемо з умови $c^2=a^2+b^2$, $c=\sqrt{14}$.

Фокуси F_1 і F_2 лежать на осі Oy і мають відповідно координати $\left(0;\,-\sqrt{14}\right)$ і $\left(0;\,\sqrt{14}\right)$.

Ексцентриситет: $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$, $\varepsilon=\sqrt{1{,}4}$. Рівняння асимптот:

$$y=\pm\frac{b}{a}x,\ \ y=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}x.$$

11. Знайти параметр p параболи $y^2=2px$, яка проходить через точку $A(1;\,2)$.

Розв'язання.

Підставляючи у рівняння параболи $y^2=2px$ координати точки $A(1;\,2)$, отримаємо

$$2^2=2p\cdot 1\quad 4=2p,\quad p=2.$$

Відповідь. Параметр параболи набуває значення $p=2$.

12. Записати рівняння параболи, яка симетрична відносно осі Ox, з вершиною в початку координат, якщо довжина хорди цієї параболи перпендикулярна до осі Ox і дорівнює 18, а відстань від цієї хорди до вершини дорівнює 8.

Розв'язання.

Оскільки відомі довжина хорди та її відстань від вершини, то відомі також координати кінця даної хорди — точки A, яка лежить на параболі.

Рівняння параболи має вигляд $y^2=2px$. Приймаючи в ньому $x=8$, $y=9$, знайдемо $9^2=2p\cdot 8$, $2p=\dfrac{81}{8}$.

Отже, рівняння параболи має вигляд $y^2=\dfrac{81}{8}x$.

13. Записати рівняння параболи з вершиною у початку координат, яка симетрична відносно осі Oy та відсікає на прямій $y = x$ хорду довжиною $4\sqrt{2}$.

Розв'язання.

Знайдемо точку перетину параболи $y^2 = 2px$ з прямою $y = x$. Для цього розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} y = x, \\ y^2 = 2px. \end{cases}$

Отримаємо дві точки перетину параболи та прямої: $O(0;\,0)$, $A(2p;\,2p)$.

Знайдемо довжину хорди (відстань між двома точками):

$$4\sqrt{2} = \sqrt{4p^2 + 4p^2}; \quad 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}p; \quad 2p = 4.$$

Отже, шукане рівняння параболи $x^2 = 4y$.

Домашнє завдання

1. Побудувати гіперболу $16x^2 - 9y^2 = -144$. Знайти: а) півосі; б) координати фокусів; в) ексцентриситет; г) рівняння асимптот.

Відповідь: а) $a = 4$, $b = 3$; б) $F_1(0;-5)$, $F_2(0;5)$;

в) $\varepsilon = \dfrac{5}{4}$; г) $y = \pm\dfrac{4}{3}x$.

2. Знайти кутовий коефіцієнт хорди гіперболи $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{4} = 1$, що проходить через точку $M(3;\,-1)$ і поділяється в ній навпіл.

Відповідь. $k = -4$.

3. Обчислити площу трикутника, утвореного асимптотами гіперболи $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ і прямою $9x + 2y - 24 = 0$.

Відповідь. 12 кв. од.

4. Через лівий фокус гіперболи $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$ проведено перпендикуляр до її дійсної осі. Знайти відстань від фокусів до точок перетину цього перпендикуляра з гіперболою.

Відповідь: $2\frac{1}{12}$; $26\frac{1}{12}$.

5. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$, паралельних прямій $10x-3y+9=0$.

Відповідь: $10x-3y-32=0$; $10x-3y+32=0$.

6. Скласти рівняння параболи, якщо вершина її має координати $(-2;\,2)$, параметр $p=5$, а напрям її осі симетрії збігається з додатним напрямком осі Ox.

Відповідь. $(y-2)^2=10(x+2)$.

7. Скласти рівняння спільної хорди параболи $y^2=18x$ і кола $x^2+y^2+12x-64=0$.

Відповідь. $x-2=0$.

8. Встановити, що рівняння $y^2-4x+8=0$ визначає параболу, знайти координати її вершини C і величину параметра p.

Відповідь: $C(2;0)$; $p=2$.

9. Встановити, яку лінію визначає рівняння $y=-5-\sqrt{-3x-21}$.

Відповідь. Частина параболи $(y+5)^2=-3(x+7)$, розміщена під прямою $y+5=0$.

10. Знайти довжину спільної хорди двох парабол $4y=12-x^2$ і $4x=12-y^2$.

Відповідь. $8\sqrt{2}$.

ПІДМОДУЛЬ 11

Поверхні другого порядку

Питання для перевірки теоретичних знань

1. Що називається поверхнею другого порядку?
2. Що називається еліпсоїдом?
3. Що називається однопорожнинним гіперболоїдом?
4. Що називається двопорожнинним гіперболоїдом?
5. Що називається еліптичним параболоїдом?

Завдання для аудиторної роботи

1. Вказати, яку поверхню визначають рівняння:

а) $x^2+z^2=36$; б) $x=2z^2$; в) $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}=1$; г) $\dfrac{z^2}{5}-\dfrac{x^2}{7}=1$.

Розв'язання.

а) $x^2+z^2=36$ — рівняння прямого кругового циліндра;

б) $x=2z^2$ — рівняння параболічного циліндра;

в) $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}=1$ — рівняння еліптичного циліндра;

г) $\dfrac{z^2}{5}-\dfrac{x^2}{7}=1$ — рівняння гіперболічного циліндра.

2. Записати у канонічному вигляді рівняння $x^2-y^2-2x+4y-$ $-2z=0$.

Розв'язання.

Виділивши повні квадрати за змінними x та y, дістанемо

$$\left(x^2-2x+1\right)-\left(y^2-4y+4\right)=2\left(z-\frac{3}{2}\right);\quad \left(x-1\right)^2-\left(y-2\right)^2=2\left(z-\frac{3}{2}\right).$$

Запровадивши нові змінні $x_1=x-1,\ \ y_1=y-2,\ \ z_1=z-\dfrac{3}{2},$ здобудемо рівняння $x_1^2-y_1^2=2z_1$, яке є канонічним рівнянням гіперболічного параболоїда.

3. Знайти координати центра та радіус сфери, заданої рівнянням $x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z=0$.

Розв'язання.

Виділивши повні квадрати за змінними x, y та z, дістанемо:

$$\left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2+2y+1\right)+\left(z^2+2z+1\right)=3;$$
$$\left(x-1\right)^2+\left(y+1\right)^2+\left(z+1\right)^2=3.$$

Отже, центр сфери — точка $A\left(1;-1;-1\right)$, а її радіус — $R=\sqrt{3}$.

4. Знайти точки перетину еліптичного параболоїда $z=\dfrac{x^2}{4}+y^2$ з прямою $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-10}{4}$.

Розв'язання.

Запишемо пряму у параметричній формі:

$$x=2t+2,\quad y=-t-1,\quad z=4t+10.$$

Підставляючи вирази для x, y, z в рівняння параболоїда, знайдемо шукані точки перетину:

$$4t+10=\frac{\left(2t+2\right)^2}{4}+\left(-t-1\right)^2;$$
$$4t+10=2t^2+4t+2;\quad t_1=-2, t_2=2.$$

Підставляючи знайдені значення параметра в параметричні рівняння прямої, знайдемо точки перетину: $A\left(-2;\,1;\,2\right)$ і $B\left(6;\,-3;\,18\right)$.

5. Визначити, яка лінія зображається системою рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1,\\ z=3?\end{cases}$$

Розв'язання.

Перше рівняння даної системи визначається у просторі еліптичним циліндром, а друге — площина, яка паралельна до площини xOy. Лінією їх перетину буде еліпс, який лежить у даній площині. Його прямокутною проекцією на площину xOy буде еліпс, який визначається першим рівнянням у системі.

Домашнє завдання

1. Скласти рівняння трьох циліндричних поверхонь, описаних навколо сфери $x^2+y^2+z^2-2ax=0$, з осями, паралельними відповідно: а) осі Ox; б) осі Oy; в) осі Oz.

Відповідь: а) $y^2+z^2=a^2$; б) $x^2+z^2=2ax$; в) $x^2+y^2=2ax$.

2. Знайти рівняння поверхонь, які утворилися при обертанні гіперболи $xy=1$ навколо своїх асимптот.

Відповідь: $x^2\left(y^2+z^2\right)=1, y^2\left(x^2+z^2\right)=1$.

3. Скласти рівняння сфери з центром у точці $C(3;-1;-2)$ і радіусом $R=5$.

Відповідь. $(x-3)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=25$.

4. Знайти центр і радіус кола $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-10y=0, \\ x+2y+2z-19=0. \end{cases}$

Відповідь: $C(1;7;2)$, $R=4$.

5. Знайти лінію перетину поверхонь $x^2+y^2-z^2=a^2$ і $x^2-y^2=$ $=2az$.

Відповідь: прямі $\sqrt{2}x=\pm(z+a)$, $\sqrt{2}y=\pm(z-a)$.

РОЗДІЛ 3

ІНДИВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ

Варіант № 1

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & 8 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1, \\ 2x + y - z = 5, \\ x + y - 2z = 5. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $AB - 3B + 5BA$, якщо $A = \begin{pmatrix} 9 & 20 \\ -4 & -9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(8; 4; 8)$, $B(2; 4; -1)$, $C(11; 0; 6)$ і $S(7; 2; 3)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об'єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. У трикутнику з вершинами $A(-3; 5)$, $B(11; -12)$, $C(-7; 12)$. Знайти:

а) довжину сторони AB;

б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;

в) рівняння висоти BF;

г) рівняння медіани AD;

д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано точки $M_1(3; -1; 2)$, $M_2(2; 4; -2)$, площини Π_1: $2x + 3y - 4z + 5 = 0$, Π_2: $x - y + z + 2 = 0$ та дві прямі L_1: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-3}{2}$; L_2: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+3}{2}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1 і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1 і перпендикулярну до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

8. Знайти канонічне рівняння прямої $\begin{cases} x - 3y + 2z - 5 = 0, \\ 3x - 2y - z + 6 = 0. \end{cases}$

9. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо велика вісь еліпса дорівнює 16, а ексцентриситет $\frac{5}{4}$.

10. Дана парабола $y^2 = 8x$. Записати рівняння хорди параболи, яка в точці $A(2; 3)$ ділиться навпіл. Визначити довжину хорди параболи, яка проходить через фокус, перпендикулярно до осі.

Варіант № 2

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & -8 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} x+5y-2z=13, \\ x-2y+3z=-4, \\ 3x-4y+z=6. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $2E+BA-4B^2$, якщо $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 5 & 1 & 2 & 29 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 4 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(1;\,6;\,4)$, $B(0;\,5;\,4)$, $C(4;\,11;\,2)$ і $S(0;\,3;\,-1)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об'єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. Дано трикутник з вершинами $A(-3;\,4)$, $B(-4;\,-3)$, $C(8;\,1)$. Знайти:

а) довжину сторони AB;

б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;

в) рівняння висоти BF;

г) рівняння медіани AD;

д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано точки $M_1(3; 1; -4)$, $M_2(1; -3; 2)$, площини Π_1: $2x - y - z + 4 = 0$, Π_2: $x - 4y + 5z - 1 = 0$ та дві прямі L_1: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-4}{4}$; L_2: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-3}{-2}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1 і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1 і перпендикулярна до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

8. Записати рівняння кола, що має центр у фокусі параболи $y^2 = 2px$, яке дотикається до її директриси.

9. Записати канонічне рівняння еліпса, знаючи, що відстань між фокусами дорівнює 8, а мала піввісь дорівнює 3. Знайти його ексцентриситет.

10. Гіпербола, симетрична відносно осей координат, проходить через точку $M\left(6; -2\sqrt{2}\right)$ і має уявну піввісь 2. Записати рівняння гіперболи і знайти відстань від точки M до фокусів.

Варіант № 3

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 10 \\ 1 & 3 & 16 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & -2 & -6 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 9, \\ x + 2y - 3z = -1, \\ x + y + 5z = 8. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $A^3 + AB - 7BA + 3E$, якщо $A = \begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(4;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,0)$, $C(7;\,6;\,-2)$ і $S(3;\,-2;\,-5)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об’єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. Дано трикутник з вершинами $A(2;\,5)$, $B(-6;\,-4)$, $C(6;\,-3)$. Знайти:

а) довжину сторони AB;

б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;

в) рівняння висоти BF;

г) рівняння медіани AD;

д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано координати точок $M_1(1;\,-2;\,0)$, $M_2(2;\,-3;\,2)$, рівняння площин Π_1: $2x + 3y - 4z - 2 = 0$, Π_2: $2x - y + z + 9 = 0$ та два рівняння прямих L_1: $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{3}$; L_2: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+2}{9} = \dfrac{z-3}{7}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1 і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1 і перпендикулярну до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

8. Знайти довжину хорди еліпса $x^2 + 2y^2 = 18$, що ділить кут між осями навпіл.

9. Написати рівняння параболи і її директриси, якщо парабола проходить через точки перетину прямої $x - y = 0$ і кола $x^2 + y^2 + 4y = 0$ і симетрична відносно осі Oy.

10. Записати рівняння гіперболи, що має вершини у фокусах, а фокуси у вершинах еліпса: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Варіант № 4

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1, \\ 2x + y - 3z = -5, \\ x + y + 2z = 4. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $B^2 - 3BA + 2E + 4A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(6;5;7)$, $B(5;3;7)$, $C(9;9;5)$ і $S(5;1;2)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об'єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. У трикутнику з вершинами $A(-5;-2)$, $B(7;6)$, $C(5;-4)$. Знайти:

а) довжину сторони AB;

б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;

в) рівняння висоти BF;

г) рівняння медіани AD;

д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано координати точок $M_1(1;-2;-4)$, $M_2(2;-1;3)$, рівняння площин Π_1: $5x + 3y - 4z + 8 = 0$, Π_2: $x - y + z + 5 = 0$ та рівняння прямих L_1: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}$; L_2: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+3}{2}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярну до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

8. Записати рівняння параболи, що має ексцентриситет $\sqrt{2}$, проходить через точки (0; 0) і(1; –3) та симетрична відносно осі Oy. Знайти рівняння директриси.

9. Записати рівняння гіперболи, що має ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$, проходить через точку $(2a;\ a\sqrt{3})$ і симетрична відносно осей координат.

10. Асимптота гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ утворює з віссю Ox кут 60°. Записати рівняння діаметра, спряженого з діаметром $y = 2x$.

Варіант № 5

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 9, \\ 3x - 2y + 2z = -2, \\ 3x + 2y + z = 11. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $7B^3 - AB + {}$ $+ 2(A + B)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & -3 \\ 8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(7; 9; 11)$, $B(5; -3; 14)$, $C(8; 17; 12)$ і $S(4; 7; 9)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об'єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. У трикутнику з вершинами $A(-7; 3)$, $B(2; -1)$, $C(-1; -5)$. Знайти:

а) довжину сторони AB;

б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;

в) рівняння висоти BF;

г) рівняння медіани AD;

д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано координати двох точок $M_1(1; -2; 1)$, $M_2(2; -3; 4)$, рівняння двох площин Π_1: $x - 2y + 3z - 4 = 0$, Π_2: $2x + 3y - 4z + 5 = 0$ та рівняння прямих L_1: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{2}$; L_2: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+3}{-3}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярну до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

8. Записати канонічне рівняння еліпса, знаючи, що велика піввісь дорівнює 6, а ексцентриситет дорівнює 0,5. Знайти фокуси еліпса.

9. Записати канонічне рівняння гіперболи, якщо відстань між фокусами дорівнює 10, а між вершинами — $2a = 8$.

10. На параболі $y^2 = 6x$ знайти точку, фокальний радіус-вектор якої дорівнює 4,5.

Варіант № 6

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 10, \\ 2x - y + 4z = 6, \\ -x + 5y - 6z = 7. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $A^2 - AB + 3A -$ $- 2(BA - E)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 8 \\ 3 & -5 & -6 & -7 \\ 1 & -4 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(-2; 4; 1)$, $B(-4; -8; 4)$, $C(-1; 12; 2)$ і $S(-5; 2; -1)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об'єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. Дано трикутник з вершинами $A(-8; -2)$, $B(2; 10)$, $C(4; 4)$. Знайти:

а) довжину сторони AB;

б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;

в) рівняння висоти BF;

г) рівняння медіани AD;

д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Скласти рівняння множини точок площини, рівновіддалених від точки $F(0; 2)$ і прямої $y = 4$. Знайти точки перетину цієї кривої з осями координат і побудувати.

8. Нехай задано координати двох точок $M_1(1; 2; -6)$, $M_2(-3; 3; 4)$, рівняння двох площин Π_1: $x + y - z + 4 = 0$, Π_2: $2x - y + 4z + 5 = 0$ та рівняння прямих L_1: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{5}$; L_2: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+2}{-5}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1 і перпендикулярна до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

9. Знайти ексцентриситет еліпса, якщо відстань між фокусами дорівнює відстані між кінцями великої і малої осей.

10. Записати рівняння дотичних до гіперболи $x^2 - 4y^2 = 16$, проведених з точки $A(0; -2)$.

Варіант № 7

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} x+3y+2z=13, \\ 5x-3y+z=2, \\ 2x-y+z=3. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $B^2+4\left(A-B\right)+$ $+AB-2E$, якщо $A=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 9 & -4 & 9 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 4 & -3 & 2 & 9 \\ 5 & -6 & 2 & 18 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(5;-3;9)$, $B(3;-15;12)$, $C(6;5;10)$ і $S(2;-5;7)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;
б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;
в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;
г) об’єм піраміди $ABCS$;
д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;
е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. Дано трикутник з вершинами $A(-10;5)$, $B(14;-2)$, $C(-4;2)$. Знайти:

а) довжину сторони AB;
б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;
в) рівняння висоти BF;
г) рівняння медіани AD;
д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Дано дві вершини трикутника $A(–4; 3)$ і $B(4; –1)$ і точка перетину висот $M(3; 3)$. Знайти третю вершину C.

8. Нехай задано координати двох точок $M_1(1; –1; 1)$, $M_2(2; –1; –3)$, рівняння двох площин Π_1: $x – 4y + 3z – 1 = 0$, Π_2: $3x – y – 5z – 8 = 0$ та рівняння прямих L_1: $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-3}{2}$, L_2: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-4}{3}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярну до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

9. На еліпсі $9x^2 + 25y^2 = 225$ знайти точку, відстань від якої до правого фокуса в чотири рази більша відстані від неї до лівого фокуса.

10. Записати канонічне рівняння гіперболи, знаючи, що відстань від однієї з її вершин до фокусів дорівнює 9 і 1.

Варіант № 8

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & 8 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 8, \\ x + 2y - 4z = -3, \\ 2x - y + 3z = 10. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $A^2 - 5(A - E) +$ $+ BA + 3AB$, якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(9; 6; 7)$, $B(3; 6; -2)$, $C(12; 2; 5)$ і $S(8; 4; 2)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об’єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. Дано трикутник з вершинами $A(0; 7)$, $B(6; -1)$, $C(2; 1)$. Знайти:

а) довжину сторони AB;

б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;

в) рівняння висоти BF;

г) рівняння медіани AD;

д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Скласти рівняння множини точок площини, рівновіддалених від точки $F(0; 6)$ і від прямої $y = 12$. Знайти точки перетину цієї кривої з осями координат.

8. Нехай задано координати двох точок $M_1(4; 0; -2)$, $M_2(3; 4; -5)$, рівняння двох площин Π_1: $8x + 2y - z + 12 = 0$, Π_2: $2x + y - z + 2 = 0$ та рівняння прямих L_1: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{3}$; L_2: $\frac{x+2}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{-3}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярну до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

9. Знайти кут між радіусами кола $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$, проведеними в точки перетину з віссю Oy.

10. Еліпс, симетричний відносно осей координат, фокуси якого знаходяться на осі Ox, проходить через точку $M(-4; \sqrt{21})$ і має ексцентриситет $\frac{3}{4}$. Записати рівняння еліпса.

Варіант № 9

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 4, \\ x - y - z = 4, \\ 2x - 3z = 8. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $B^2 - 2AB + {}$ $+3(A - B - E)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(5; 4; 12)$, $B(-1; 4; 3)$, $C(8; 0; 10)$ і $S(4; 2; 7)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об'єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. У трикутнику з вершинами $A(1; –1)$, $B(6; 4)$, $C(–2; 2)$. Знайти:

а) довжину сторони AB;

б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;

в) рівняння висоти BF;

г) рівняння медіани AD;

д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Дано точки $A(–2; 0)$ і $B(2; –1)$. На відрізку OA побудовано паралелограм $OACD$, діагоналі якого перетинаються в точці B. Записати рівняння сторін та діагоналей паралелограма.

8. Нехай задано координати двох точок $M_1(–3; 4; 2)$, $M_2(1; 5; –6)$, рівняння двох площин Π_1: $x - y + 3z + 1 = 0$, Π_2: $2x + 3y - z + 3 = 0$ та рівняння прямих L_1: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$; L_2: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z+1}{9}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярна до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

9. Записати канонічне рівняння еліпса, у якого відстань від одного із фокусів до кінців великої осі дорівнює 6 і 2.

10. Записати рівняння гіперболи, асимптоти якої $y = \pm x$, а директриси $x = \pm\sqrt{6}x$.

Варіант № 10

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 11 \\ 2 & -9 & 9 \\ 1 & -4 & -12 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} 7x - 5y = 13, \\ 4x + 11y = 49, \\ 2x + 3y + 4z = 41. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $A^2 - 4(BA - E) + {}$ $+ 5(A + B)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(3; 5; 11)$, $B(-3; 5; 2)$, $C(6; 1; 9)$ і $S(2; 3; 6)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об'єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. У трикутнику з вершинами $A(-2; 1)$, $B(3; 6)$, $C(5; 2)$. Знайти:

а) довжину сторони AB;

б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;

в) рівняння висоти BF;

г) рівняння медіани AD;

д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано координати двох точок $M_1(4; 0; -3)$, $M_2(-2; 5; 4)$, рівняння двох площин Π_1: $3x - y + z - 5 = 0$, Π_2: $x + 2y - z + 2 = 0$ та рівняння прямих L_1: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$; L_2: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{5}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярна до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

8. Записати рівняння кола, що проходить через точки перетину кола $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ з прямою $y = -x$ і точку $A(4; 4)$.

9. На гіперболі $9x^2 - 16y^2 = 144$ знайти точку, відстань від якої до правого фокуса вдвічі менша, ніж до лівого.

10. Написати рівняння параболи, симетричної відносно осі Ox, що проходить через початок координат і точку $M(1; -4)$.

Варіант № 11

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 7 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} x-4y+3z=9, \\ 2x-2y+z=7, \\ x+2y-z=-1. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $3A-4BA+A^2-$ $-B-3E$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(-3; 5; 7)$, $B(-4; 3; 7)$, $C(0; 9; 5)$ і $S(4; 1; 2)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$ та їхні довжини;
б) координати точки M перетину медіан трикутника;
в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;
г) об'єм піраміди $ABCS$;
д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;
е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. У трикутнику з вершинами $A(3; 1)$, $B(6; 3)$, $C(4; 6)$. Знайти:
а) довжину сторони AB;
б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;
в) рівняння висоти BF;
г) рівняння медіани AD;
д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Записати рівняння множини точок площини, сума відстаней кожної з яких від точок $A(-2; 0)$ і $B(2; 0)$ дорівнює $2\sqrt{5}$.

8. Нехай задано координати двох точок $M_1(1; -3; 2)$, $M_2(4; 3; 6)$, рівняння двох площин Π_1: $x + y + z - 4 = 0$, Π_2: $3x + 2y + 3z - 5 = 0$, та рівняння прямих L_1: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{4}$; L_2: $\frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{4}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярна до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

9. Дано точки $A(-2; 0)$ і $B(3; 5)$. Записати рівняння кола, діаметром якого буде відрізок AB.

10. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо рівняння асимптот її $y = \pm\frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами дорівнює 20.

Варіант № 12

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & -7 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} 7x-8y+z=-6, \\ x+y+z=6, \\ -x+y+3z=10. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена A^2-2AB+ $+3(B-A+2E)$, якщо $A=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(2;6;5)$, $B(1;4;5)$, $C(5;10;3)$ і $S(1;2;0)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об'єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. Дано трикутник з вершинами $A(-2; 1)$, $B(5; 2)$, $C(0; -6)$. Знайти:

а) довжину сторони AB;

б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;

в) рівняння висоти BF;

г) рівняння медіани AD;

д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано координати двох точок $M_1(1; -2; 4)$, $M_2(-1; 3; 0)$, рівняння двох площин Π_1: $x - y + z + 5 = 0$, Π_2: $x - 2y + 3z - 1 = 0$ та рівняння прямих L_1: $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{3}$, L_2: $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярна до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

8. Записати рівняння прямої, на якій лежить діаметр кола $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 4 = 0$ паралельний прямій $x = y$.

9. Записати рівняння еліпса, симетричного відносно осей Ox і Oy, у якого відстань між фокусами дорівнює 5, а мала піввісь дорівнює 3.

10. Директриса параболи є пряма $y = -2$. Вершина знаходиться в початку координат. Записати рівняння параболи.

Варіант № 13

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 9 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \\ 8 & -5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} -x + y + 5z = 6, \\ x + y - 3z = 0, \\ 2x - 3y + z = -3. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $B^2 + 3(A - B) - 2BA$, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(-2; 7; 4)$, $B(-3; 5; 1)$, $C(1; 11; 2)$ і $S(-3; 3; -1)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об’єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. Дано трикутник з вершинами $A(0; 7)$, $B(6; -1)$, $C(2; 3)$. Знайти:
а) довжину сторони AB;
б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;
в) рівняння висоти BF;
г) рівняння медіани AD;
д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;
е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;
є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано координати двох точок $M_1(-2; 1; 4)$, $M_2(6; 1; 3)$, рівняння двох площин Π_1: $2x - 2y - z - 10 = 0$, Π_2: $4x - 5y - 10z - 20 = 0$, та рівняння прямих L_1: $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+6}{-3} = \dfrac{z+2}{-2}$, L_2: $\dfrac{x-4}{4} = \dfrac{y+3}{0} = \dfrac{z-1}{1}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярна до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

8. На еліпсі $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ знайти точку, відстань від якої до правого фокуса в чотири рази більша, ніж до лівого фокуса.

9. Скласти рівняння гіперболи, асимптоти якої $y=\pm\frac{2}{3}x$, а ексцентриситет $\sqrt{\frac{52}{6}}$.

10. На гіперболі $x^2-y^2=4$ знайти точку, фокальні радіус-вектори якої перпендикулярні.

Варіант № 14

1. Обчислити визначники:

$$\text{а)}\begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 \\ -7 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & -11 \end{vmatrix};\quad \text{б)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} x+y+5z=6, \\ 2x-y+2z=10, \\ -x+2y-3z=-10. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $7B-A^2+$ $+\,2AB-A$, якщо $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(1; 6; 3)$, $B(-1; -6; 6)$, $C(2; 14; 4)$ і $S(-2; 4; 1)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об'єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. Дано трикутник з вершинами $A(3; 6)$, $B(5; 2)$, $C(0; -6)$. Знайти:
а) довжину сторони AB;
б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;
в) рівняння висоти BF;
г) рівняння медіани AD;
д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;
е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;
є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано координати двох точок $M_1(1; 3; -1)$, $M_2(6; 8; -4)$, рівняння двох площин Π_1: $2x - y + 2z - 17 = 0$, Π_2: $6x + 2y - 3z - 1 = 0$ та рівняння прямих L_1: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{2}$, L_2: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$:
а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;
б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;
в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;
г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;
д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;
е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;
є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;
ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;
з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярна до площин Π_1 і Π_2;
и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

8. Написати канонічне рівняння еліпса, у якого відстань між фокусами дорівнює 4, а мала піввісь дорівнює 3. Знайти фокуси, ексцентриситет і фокальні радіуси точки $M(x; y)$.

9. Записати рівняння параболи, що проходить через точки $(0; 0)$ і $(2; -6)$, симетричної відносно осі Oy. Записати рівняння директриси.

10. Записати рівняння гіперболи, вершини якої знаходяться у фокусах, а фокуси у вершинах еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$

Варіант № 15

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & -3 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} 2x-2y+2z=3, \\ -3x-3y-3z=2, \\ 4x+y=2. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена B^2-A^2- $-3(A+B+2E)+AB$, якщо $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(7;5;4)$, $B(5;-7;7)$, $C(8;13;5)$ і $S(4;3;2)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об'єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. Дано трикутник з вершинами $A(-2;1)$, $B(5;2)$, $C(0;-6)$. Знайти:

а) довжину сторони AB;

б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;

в) рівняння висоти BF;

г) рівняння медіани AD;

д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано координати двох точок $M_1(-5; 4; 0)$, $M_2(3; 11; 4)$, рівняння двох площин Π_1: $2x - 3y + z = 0$, Π_2: $x + 4y + 5z - 4 = 0$ та рівняння прямих L_1: $\frac{x-7}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-9}{4}$, L_2: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-2}{1}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярна до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

8. Записати рівняння кола, що проходить через початок координат, і через точки перетину прямої $x+y+a=0$ з колом $x^2+y^2=a^2$.

9. Записати канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що відстань між фокусами дорівнює 5, а мала піввісь дорівнює 3.

10. Знайти ексцентриситет гіперболи, асимптота якої утворює з дійсною віссю кут 60°.

Варіант № 16

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4, \\ 2x + y - 2z = 3, \\ x + 2y - z = 3. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $3(B - A) + 2AB - (A + 2E)^2$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \\ 1 & -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(5; 3; 7)$, $B(2; -8; 10)$, $C(6; 11; 8)$ і $S(2; 1; 5)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об'єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. Дано трикутник з вершинами $A(-5; -7)$, $B(9; -14)$, $C(-9; 3)$. Знайти:

а) довжину сторони AB;

б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;

в) рівняння висоти BF;

г) рівняння медіани AD;

д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано координати двох точок $M_1(3; 5; -2)$, $M_2(-4; 1; 7)$, рівняння двох площин Π_1: $3x - y + 6z - 14 = 0$, Π_2: $x - 2y + 2 = 0$ та рівняння прямих L_1: $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{-1}$, L_2: $\frac{x-9}{4} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z}{1}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярна до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

8. Дано точки $A(-3; 0)$ і $B(3; 6)$. Записати рівняння кола, діаметром якого служить відрізок AB.

9. Еліпс, симетричний відносно осей координат, проходить через точки $M(2\sqrt{3}; \sqrt{6})$ і $A(6; 0)$. Записати його рівняння, знайти ексцентриситет і відстань від точки M до фокусів.

10. Записати рівняння параболи і її директриси, якщо парабола проходить через точки перетину прямої $y = x$ і кола $x^2 + y^2 + 6x = 0$ і симетрична відносно осі Ox.

Варіант № 17

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0, \\ 2x - 3y + z = -3, \\ -x + y + 5z = 6. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $2AB - A^2 +$ $+ (B - A + 2E)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(6; 4; 14)$, $B(0; 4; 5)$, $C(9; 0; 12)$ і $S(5; 2; 9)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об'єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. Дано трикутник з вершинами $A(1; 1)$, $B(14; 3)$, $C(-4; 7)$. Знайти:

а) довжину сторони AB;

б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;

в) рівняння висоти BF;

г) рівняння медіани AD;

д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано координати двох точок $M_1(3; 1; -2)$, $M_2(6; 2; -2)$, рівняння двох площин Π_1: $6x + 2y - 3z - 1 = 0$, Π_2: $x + y + z - 1 = 0$ та рівняння прямих L_1: $\frac{x+3}{4} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-3}{2}$, L_2: $\frac{x-4}{8} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+7}{3}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини $П_1$, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярна до площин $П_1$ і $П_2$;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин $П_1$ і $П_2$.

8. Дано еліпс $4x^2 + 9y^2 = 36$. Через точку (–2; 1) провести хорду, що ділиться в цій точці навпіл.

9. Записати рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі ординат, симетрично відносно початку і $2a = 16$, а ексцентриситет дорівнює $\frac{5}{4}$.

10. Записати рівняння параболи, що має вершину в точці $(0; a)$, а фокус в точці $(0; 2a)$.

Варіант № 18

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 5y - z = 10, \\ x + 3z = 16. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $B + 3AB - 7A^2 +$ $+ 4(A - E)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(0;8;7)$, $B(-1;6;7)$, $C(3;12;5)$ і $S(-1;4;2)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об'єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. Дано трикутник з вершинами $A(–6;6)$, $B(18; –1)$, $C(0; 3)$. Знайти:

а) довжину сторони AB;

б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;

в) рівняння висоти BF;

г) рівняння медіани AD;

д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано координати двох точок $M_1(3; –1; 2)$, $M_2(1; 2; –4)$, рівняння двох площин Π_1: $x – 2y + z – 1 = 0$, Π_2: $2x – y + 3z – 3 = 0$ та рівняння прямих L_1: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-5}{4}$, L_2: $\frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярна до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

8. Показати, що точка $A(3; 0)$ лежить усередині кола $x^2 + y^2 – – 4x + 2y + 1 = 0$.

9. Для гіперболи $y^2 = a^2 + x^2$ знайти координати її фокусів та кут між асимптотами.

10. Записати рівняння параболи, що проходить через точки (0; 0) і (–1; 2), симетричної відносно осі Ox.

Варіант № 19

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 7, \\ 2x + y - z = 0, \\ -x + y + 3z = 6. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $AB + 2(A + B) - 3E$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(3; 3; 0)$, $B(1; -9; 3)$, $C(4; 11; 1)$ і $S(0; 1; -2)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об’єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. Дано трикутник з вершинами $A(–2; 6)$, $B(12; –1)$, $C(–6; 2)$. Знайти:

а) довжину сторони AB;

б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;

в) рівняння висоти BF;

г) рівняння медіани AD;

д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано координати двох точок $M_1(2; -1; 7)$, $M_2(4; 5; -2)$, рівняння двох площин Π_1: $2x - 3y + 2z - 9 = 0$, Π_2: $5x + 8y - z - 7 = 0$ та рівняння прямих L_1: $\frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}$, L_2: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+1}{2}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярна до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

8. Написати канонічне рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки (2; 0) і прямої $y = 2$.

9. Знайти ексцентриситет еліпса, якщо відстань між фокусами дорівнює відстані між кінцями великої і малої півосей.

10. Написати канонічне рівняння гіперболи, якщо велика піввісь дорівнює 5, а ексцентриситет — $\frac{8}{7}$.

Варіант № 20

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} x+y-z=6, \\ -x+2y+3z=5, \\ 2x-y+4z=21. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $A^2+3(A-B)+$ $+\,BA+2E,$ якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(4;\,6;\,7)$, $B(-2;\,6;\,-2)$, $C(7;\,2;\,5)$ і $S(3;\,4;\,2)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;
б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;
в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;
г) об'єм піраміди $ABCS$;
д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;
е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. Дано трикутник з вершинами $A(-8;3)$, $B(6;-4)$, $C(-12;\,2)$. Знайти:
а) довжину сторони AB;
б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;
в) рівняння висоти BF;
г) рівняння медіани AD;
д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано координати двох точок $M_1(1; 2; 1)$, $M_2(2; 3; -2)$, рівняння двох площин Π_1: $3x - 5y + 8z - 10 = 0$, Π_2: $2x + z - 11 = 0$ та рівняння прямих L_1: $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+3}{2}$; L_2: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+2}{-6} = \dfrac{z-1}{15}$.

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярна до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

8. Написати рівняння кола, центр якого міститься у фокусі параболи $y^2 = 2px$ і яке дотикається до її директриси.

9. Знайти спільні точки еліпса $x^2 + 4y^2 = 4$ і кола, що проходить через фокуси еліпса, а центр знаходиться в його нижній вершині.

10. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі симетрично відносно початку координат, якщо дійсна піввісь дорівнює 8, а ексцентриситет — $\dfrac{5}{4}$.

Варіант № 21

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} x+y-3z=-10, \\ 2x-y+z=16, \\ -x+2y-z=-17. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $AB+BA-$ $-2(B+A-3E)$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(6; 4; 11)$, $B(0; 4; 2)$, $C(9; 0; 9)$ і $S(5; 2; 6)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об'єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. Дано трикутник з вершинами $A(–9; 11)$, $B(5; 4)$, $C(–3; 8)$. Знайти:

а) довжину сторони AB;

б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;

в) рівняння висоти BF;

г) рівняння медіани AD;

д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано координати двох точок $M_1(-1; 2; 3)$, $M_2(0; 2; 1)$, рівняння двох площин Π_1: $2x + 2y - z - 4 = 0$, Π_2: $x - 2y + 2z + 6 = 0$ та рівняння прямих L_1: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-5}{4}$, L_2: $\frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярна до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

8. Знайти кут між радіусами кола $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$, проведеними в точках перетину її з віссю Oy.

9. Записати канонічне рівняння еліпса, директрисами якого будуть прямі $x = \pm\frac{4}{3}$, а велика піввісь якого дорівнює 2.

10. Записати рівняння гіперболи, асимптоти якої $y = \pm x$, а директриси $x = \pm\sqrt{6}$.

Варіант № 22

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 12, \\ -x + 2y - z = -10, \\ 2x - y + 2z = 11. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $3(B+A)-AB+$ $+B^2-3E$, якщо $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(8; 5; 7)$, $B(2; 5; -2)$, $C(11; 1; 5)$ і $S(7; 3; 2)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об'єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. Дано трикутник з вершинами $A(-2; 0)$, $B(2; 4)$, $C(4; 0)$. Знайти:

а) довжину сторони AB;

б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;

в) рівняння висоти BF;

г) рівняння медіани AD;

д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано координати двох точок $M_1(1; -5; 3)$, $M_2(5; -1; 17)$, рівняння двох площин Π_1: $x-y+3z-3=0$, Π_2: $3x-2y+z-12=0$ та рівняння прямих L_1: $\frac{x-1}{4}=\frac{y+5}{3}=\frac{z+1}{12}$, L_2: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{0}=\frac{z+3}{-3}$.

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярна до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

8. Еліпс, симетричний відносно осей Ox і Oy, проходить через точки $M(2\sqrt{3};\sqrt{6})$. Написати його рівняння.

9. Написати рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox, якщо довжина її дійсної осі дорівнює 12, а ексцентриситет дорівнює $\frac{4}{3}$.

10. Дана парабола $y^2 = 16x$. Записати рівняння параболи, яка в точці $A(2; 3)$ ділиться навпіл.

Варіант № 23

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ -x + y + 3z = 2, \\ 2x - y - z = 5. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $AB - 7B^2 +$ $+ 3(A + B - 2E)$, якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(5; 9; 8)$, $B(4; 7; 8)$, $C(8; 13; 6)$ і $S(4; 5; 3)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об’єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. Дано трикутник з вершинами $A(-8; -2)$, $B(2; 10)$, $C(4; 4)$. Знайти:

а) довжину сторони AB;

б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;

в) рівняння висоти BF;

г) рівняння медіани AD;

д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано координати двох точок $M_1(1; 4; 6)$, $M_2(2; 1; -1)$, рівняння двох площин Π_1: $2x - 2y + z + 1 = 0$, Π_2: $2x + 3y - 4z + 2 = 0$ та рівняння прямих L_1: $\dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z-9}{4}$, L_2: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-5}{1}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярна до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

8. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точки $F(4; 0)$ і від прямої $y = 4$.

9. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо його велика вісь дорівнює 14, а ексцентриситет — $\dfrac{2}{3}$.

10. Написати канонічне рівняння гіперболи з асимптотами $y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x,$ яка проходить через точку (–4; –2).

Варіант № 24

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} -x + 2y - 3z = 3, \\ 2x + 3y - z = 8, \\ x - y + z = -3. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $A^2 - 13(A + B) - BA,$ якщо $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix},$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(0; 8; 7),$ $B(-1; 6; 7),$ $C(3; 12; 5)$ і $S(-1; 4; 2)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA},$ $\overrightarrow{SB},$ $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об’єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. Дано трикутник з вершинами A(–7; 3), B(2; –1), C(–1; –5). Знайти:

а) довжину сторони AB;

б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;

в) рівняння висоти BF;

г) рівняння медіани AD;

д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано координати двох точок $M_1(1; -2; -6)$, $M_2(-1; 3; 2)$, рівняння двох площин Π_1: $2x - 3y + 6z - 4 = 0$, Π_2: $6x + 2y - 3z + 2 = 0$ та рівняння прямих L_1: $\frac{x-6}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{0}$, L_2: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{-1}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярна до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

8. У коло $x^2 + y^2 = 4$ вписано правильний трикутник, одна з його вершин має координати (0; 2). Записати рівняння сторін трикутника та координати двох інших вершин.

9. Знайти довжину відрізка прямої $x + 4y - 28 = 0$, що лежить всередині еліпса $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{25} = 1$.

10. Скласти рівняння гіперболи, якщо її вершини лежать у точках (–3; 0) і (3; 0), а фокуси в точках $(-3\sqrt{5}; 0)$ і $(3\sqrt{5}; 0)$.

Варіант № 25

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} 3x + y + 5z = 38, \\ -x - y + 2z = 15, \\ x + 2y + z = 3. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $BA + 2AB + {}$ $+ 4(A - B + 2E)$, якщо $A = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(5; 10; 12)$, $B(4; 8; 12)$, $C(8; 14; 10)$ і $S(4; 6; 7)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об'єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. Дано трикутник з вершинами $A(-7; -1)$, $B(5; 4)$, $C(9; 1)$. Знайти:
а) довжину сторони AB;
б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;
в) рівняння висоти BF;
г) рівняння медіани AD;
д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;
е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;
є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано координати двох точок $M_1(3; 1; 6)$, $M_2(5; -3; 2)$, рівняння двох площин Π_1: $x + 2y - 5z + 10 = 0$, Π_2: $2x + 5y - 4z - 20 = 0$ та рівняння прямих L_1: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-1}{5}$, L_2: $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{4}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярна до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

8. Коло $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 40 = 0$ перетинає пряму $3x - y + 16 = 0$, внутрішній відрізок якої є стороною вписаного в коло прямокутника. Записати рівняння сторін прямокутника.

9. Знайти довжину відрізка прямої $x - 2y = 2$, що лежить усередині еліпса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$.

10. Дано гіперболу $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{256} = 1$. Записати координати фокусів і її вершин, рівняння асимптот, ексцентриситет.

Варіант № 26

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1, \\ 5x - 4y + 2z = 0, \\ x + 3y + 2z = 6. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $2A-(A^2+B)B$, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 2\\ -1 & -3 & 4\end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 5 & 7 & 3\end{pmatrix}$.

5. Точки $A(5; 10; 6)$, $B(3; -2; 9)$, $C(6; 18; 7)$ і $S(2; 8; 4)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об’єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. Дано трикутник з вершинами $A(-6; 1)$, $B(6; -4)$, $C(10; -1)$. Знайти:

а) довжину сторони AB;

б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;

в) рівняння висоти BF;

г) рівняння медіани AD;

д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано координати двох точок $M_1(3; -1; 2)$, $M_2(2; 4; -2)$, рівняння двох площин Π_1: $2x+3y-4z+5=0$, Π_2: $x-y+z+2=0$ та рівняння прямих L_1: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-3}{2}$, L_2: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+3}{2}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярна до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

8. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $P(-1; 3, 1)$ перпендикулярно до прямої $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{1}$.

9. Написати рівняння параболи, що проходить через точки (0; 2) і (1; 3), симетрично відносно осі Oy.

10. Написати рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо:

а) її осі $2a = 10$ і $2b = 8$;

б) відстань між фокусами $2c = 10$, а вісь $2b = 8$;

в) вісь $2a = 16$, ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$.

Варіант № 27

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 5, \\ 3x - 2y - 3z = 14, \\ 2x - 2y - z = 7. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $(A-B)(B+A)-$ $-2AB$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(11; 12; 11)$, $B(9; 0; 14)$, $C(12; 20; 12)$ і $S(8; 10; 9)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об'єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. Дано трикутник з вершинами $A(10; 1)$, $B(-2; 6)$, С$(-6; -3)$. Знайти:

а) довжину сторони AB;

б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;

в) рівняння висоти BF;

г) рівняння медіани AD;

д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано координати двох точок $M_1(3; 1; -4)$, $M_2(1; -3; 2)$, рівняння двох площин Π_1: $2x - y - z + 4 = 0$, Π_2: $x - 4y + 5z - 1 = 0$ та рівняння прямих L_1: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{4}$, L_2: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{-2}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярна до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

8. На гіперболі $9x^2 - 16y^2 = 144$ знайти точку, відстань до якої від лівого фокусу вдвічі менша, ніж від правого.

9. Побудувати параболу, задану рівняннями і визначити координати її фокуса і записати рівняння директриси: а) $y^2 = 4x$; б) $x^2 = -4y$.

10. Знайти точки перетину гіперболи – $\frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{36} = 1$ з прямою $x - y + 5 = 0$.

Варіант № 28

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} 8x + 3y - 6z = 11, \\ -4x - y + 3z = -6, \\ x + y - z = 1. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $AB - BA + (A - B)^2$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(12; 13; 5)$, $B(10; 1; 8)$, $C(13; 21; 6)$ і $S(9; 11; 3)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об'єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. Дано трикутник з вершинами $A(2; 6)$, $B(6; 3)$, $C(-10; 1)$. Знайти:

а) довжину сторони AB;

б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;

в) рівняння висоти BF;

г) рівняння медіани AD;

д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано координати двох точок $M_1(1; -2; 0)$, $M_2(2; -3; 2)$, рівняння двох площин Π_1: $2x + 3y - 4z - 2 = 0$, Π_2: $2x - y + z + 9 = 0$ та рівняння прямих L_1: $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$, L_2: $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{9} = \frac{z-3}{7}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярна до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

8. Обчислити відстань від точки $M(1; 1)$ до прямої, заданої параметрично $x = -1 + 2t$; $y = 2 + t$.

9. Побудувати параболу $y^2 = -6x$, визначити координати її фокуса і написати рівняння директриси.

10. Написати рівняння гіперболи, вершини якої знаходяться у фокусах, а фокуси — у вершинах еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Варіант № 29

1. Обчислити визначники:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}; \text{ б)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} 3x - y + z = -3, \\ x - 2y - 4z = 1, \\ 2x + y - 3z = 12. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $(A^2 - B^2)(B + A)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(7; 7; 13)$, $B(1; 7; 4)$, $C(10; 3; 11)$ і $S(6; 5; 8)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;
б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;
в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;
г) об'єм піраміди $ABCS$;
д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;
е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. Дано трикутник з вершинами $A(6; -2)$, $B(-2; 1)$, $C(3; 7)$. Знайти:
а) довжину сторони AB;
б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;
в) рівняння висоти BF;
г) рівняння медіани AD;
д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано координати двох точок $M_1(1; -2; -4)$, $M_2(2; -1; 3)$, рівняння двох площин Π_1: $5x + 3y - 4z + 8 = 0$, Π_2: $x - y + z + 5 = 0$ та рівняння прямих L_1: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}$, L_2: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+3}{2}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярна до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

8. Знайти довжину хорди еліпса $x^2 + 2y^2 = 18$, яка ділить кут між осями координат навпіл.

9. На гіперболі $x^2 - 4y^2 = 16$ дано точку M з ординатою 1. Знайти відстань від цієї точки до фокусів.

10. Побудувати еліпс $9x^2 + 16y^2 = 144$ та знайти його фокуси та ексцентриситет.

Варіант № 30

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати систему лінійних рівнянь, користуючись методами: Крамера, Гаусса та матричним:

$$\begin{cases} x+2y+2z=4, \\ 3x-y-3z=14, \\ 2x+y+z=8. \end{cases}$$

3. Обчислити значення матричного многочлена $AB-BA(A^2+3B)$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Точки $A(0;8;7)$, $B(-1;6;7)$, $C(3;12;5)$ і $S(-1;4;2)$ — вершини піраміди $ABCS$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан трикутника ABC;

в) кути при вершині S піраміди $ABCS$;

г) об'єм піраміди $ABCS$;

д) площу основи ABC піраміди $ABCS$;

е) довжину висоти SO, проведеної з вершини S на основу ABC.

6. Дано трикутник з вершинами $A(3; 2; –1)$, $B(4; 5; 3)$, $C(–2; 1; 0)$. Знайти:

а) довжину сторони AB;

б) рівняння прямої AM, яка паралельна стороні BC;

в) рівняння висоти BF;

г) рівняння медіани AD;

д) внутрішній кут трикутника $\angle C$;

е) координати точок N і K, що ділять більшу сторону трикутника на три рівні частини;

є) площу трикутника ABC.

7. Нехай задано координати двох точок $M_1(1; –2; 1)$, $M_2(2; –3; 4)$, рівняння двох площин Π_1: $x – 2y + 3z – 4 = 0$, Π_2: $2x + 3y – 4z + 5 = 0$ та рівняння прямих L_1: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$, L_2: $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-3}$:

а) написати рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2, та знайти її напрямні косинуси;

б) знайти гострий кут між прямими L_1 і L_2;

в) через точку M_2 провести площину, паралельну площині Π_2;

г) знайти гострий кут між площинами Π_1 і Π_2;

д) знайти відстань від точки M_1 до площини Π_2;

е) через точку M_2 провести пряму, паралельну прямій L_2;

є) знайти гострий кут між прямою L_2 і площиною Π_2;

ж) через точку M_1 провести пряму, перпендикулярну до площини Π_1, і визначити напрямні косинуси цієї прямої;

з) написати рівняння площини, що проходить через точку M_1, і перпендикулярна до площин Π_1 і Π_2;

и) написати рівняння прямої, яка задається як лінія перетину площин Π_1 і Π_2.

8. Написати рівняння параболи, яка проходить через точки перетину прямої $y = x$ та кола $x^2 + y^2 + 6x = 0$ та симетрична відносно осі абсцис. Побудувати пряму, коло та параболу.

9. Еліпс, симетричний відносно осей координат, проходить через точки $M_1\left(4; \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ і $M_2(0; 4)$. Знайти півосі, координати фокусів та ексцентриситет еліпса.

10. Записати рівняння гіперболи, вершини якої знаходяться у фокусах, а фокуси — у вершинах еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

РОЗДІЛ 4
ЗРАЗОК РОЗВ'ЯЗАННЯ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Завдання 1 Знайти обернену матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Обчислимо визначник матриці A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

У першому стовпці перетворимо всі елементи, крім першого, на нулі. Для цього, залишаючи перший рядок без змін, додамо до четвертого рядка перший, помножений на (–1), до третього — перший, помножений на (–2), до другого — перший, помножений на (–3).

Отримаємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -11 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}.$$

Розклавши цей визначник за елементами першого стовпця, дістанемо

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & -7 & -11 \\ 1 & -5 & -7 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -80 - 11 + 49 - 55 - 28 - 28 = -153 \neq 0.$$

Матриця A невироджена, тому обернена матриця знаходиться за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix},$$

Знаходимо алгебричні доповнення всіх елементів матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -27, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -6, \qquad A_{14} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -39,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -39, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 27,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -39,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 27, \qquad A_{34} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{41} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -39, \qquad A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 27.$$

Згідно з формулою, обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = -\frac{1}{153}\begin{pmatrix} -27 & -39 & -6 & 3 \\ 3 & 27 & -39 & -6 \\ -6 & -3 & 27 & -39 \\ -39 & 6 & -3 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{51} & \frac{13}{51} & \frac{2}{51} & -\frac{1}{51} \\ -\frac{1}{51} & -\frac{9}{51} & \frac{13}{51} & \frac{2}{51} \\ \frac{2}{51} & \frac{1}{51} & -\frac{9}{51} & \frac{13}{51} \\ \frac{13}{51} & -\frac{2}{51} & \frac{1}{51} & -\frac{9}{51} \end{pmatrix}.$$

Відповідь. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{51} & \frac{13}{51} & \frac{2}{51} & -\frac{1}{51} \\ -\frac{1}{51} & -\frac{9}{51} & \frac{13}{51} & \frac{2}{51} \\ \frac{2}{51} & \frac{1}{51} & -\frac{9}{51} & \frac{13}{51} \\ \frac{13}{51} & -\frac{2}{51} & \frac{1}{51} & -\frac{9}{51} \end{pmatrix}.$

Завдання 2 Розв'язати систему лінійних рівнянь методами Крамера та Гаусса:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -3, \\ 2x + 3y + z = -1, \\ x - y - z = 3. \end{cases}$$

Розв'язання.
Розв'яжемо дану систему за формулами Крамера.
Знайдемо визначники Δ, Δx, Δy, Δz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 9;$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 18; \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -18; \quad \Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 9.$$

Тоді, за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = 2; \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -2; \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = 1.$$

Знайдемо розв'язок системи методом Гаусса.

Складемо розширену матрицю системи

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right).$$

Виконаємо елементарні перетворення: помножимо перший рядок матриці на (–2) та додамо до другого рядка, а також, попередньо помноживши третій рядок на (–1), додамо його до першого. Дістанемо таку матрицю:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Здобута матриця відповідає системі ступеневого вигляду

$$\begin{cases} x + 2y - z = -3, \\ -y + 3z = 5, \\ 3z = -6, \end{cases}$$

яка має єдиний розв'язок: $x_1 = 2,\ y_2 = -2,\ z_3 = 1.$

Відповідь. $x = 2,\ y = -2,\ z = 1.$

Завдання 3 Дано вершини піраміди $ABCS: A(6;4;11),\ B(0;4;2),\ C(9;0;9),\ S(5;2;6)$. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ та їхні довжини;

б) координати точки M перетину медіан ΔABC;

в) косинус кута при вершині S грані ASC;

г) довжину висоти SO, опущеної з вершини S на основу ABC.

Розв'язання:

а) Щоб знайти координати вектора, необхідно від координат кінця даного вектора відняти координати початку. Отже,

$$\overrightarrow{SA} = \{6-5;\ 4-2;\ 11-6\} = \{1;\ 2;\ 5\},$$

$$\overrightarrow{SB}=\{-5;\ 2;\ -4\},\qquad \overrightarrow{SC}=\{4;\ -2;\ 3\}.$$

За формулою $|\vec{a}|=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}$ знайдемо довжини векторів $\overrightarrow{SA},\ \overrightarrow{SB},\ \overrightarrow{SC}$:

$$\left|\overrightarrow{SA}\right|=\sqrt{1^2+2^2+5^2}=\sqrt{1+4+25}=\sqrt{30},$$
$$\left|\overrightarrow{SB}\right|=\sqrt{25+4+16}=\sqrt{45},$$
$$\left|\overrightarrow{SC}\right|=\sqrt{16+4+9}=\sqrt{29}.$$

б) Координати точки M знайдено за формулами:

$$x_M=\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\ y_M=\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\ z_M=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}.$$

Звідси $x_M==\dfrac{6+0+9}{3}=\dfrac{5}{3}=5,$

$$y_M=\frac{4+4+0}{3}=\frac{8}{3},\qquad z_M=\frac{11+2+9}{3}=\frac{22}{3}.$$

Отже, $M\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{8}{3};\dfrac{22}{3}\right)$— точка перетину медіан трикутника ABC.

в) Кут при вершині S трикутника ASC є кутом між векторами $\overrightarrow{SA}$ та $\overrightarrow{SC}$. Користуючись формулою $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, обчислимо

$$\cos\left(\overrightarrow{SA},\hat{\ }\overrightarrow{SC}\right)=\frac{\overrightarrow{SA}\overrightarrow{SC}}{\left|\overrightarrow{SA}\right|\left|\overrightarrow{SC}\right|}=\frac{1\cdot4+2(-2)+5\cdot3}{\sqrt{30}\sqrt{29}}=\frac{15}{\sqrt{870}}.$$

г) Із формули $V_{\text{пір}}=\dfrac{1}{3}S_{\text{осн}}H$ знайдемо довжину висоти SO:

$$H=\frac{3V_{\text{пір}}}{S_{\text{осн}}},$$

де $S_{\text{осн}}$ — площа трикутника ABC, що є основою піраміди $ABCS$, $V_{\text{пір}}$ — об’єм піраміди $ABCS$.

Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Отже,

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|.$$

Знайдено координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB} = \{0-6; 4-4; 2-11\} = \{-6; 0; -9\}$,

$\overrightarrow{AC} = \{9-6; 0-4; 9-11\} = \{3; -4; -2\}$.

Обчислимо $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 0 & -9 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -36\vec{i} - 39\vec{j} + 24\vec{k}$. Тоді

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2}\sqrt{36^2 + 39^2 + 24^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3393}.$$

Об’єм піраміди $ABCS$ дорівнює шостій частині об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$, а об’єм паралелепіпеда $V_{\text{пар}} = \left|\overrightarrow{SA}\,\overrightarrow{SB}\,\overrightarrow{SC}\right|$.

Знайдемо мішаний добуток $\overrightarrow{SA}\,\overrightarrow{SB}\,\overrightarrow{SC} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -5 & 2 & -4 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6$, тоді

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{6}V_{\text{пар}} = 1.$$

Отже, довжина висоти

$$SO = \frac{6}{\sqrt{3393}} = \frac{2}{\sqrt{377}}.$$

Відповідь: а) $\sqrt{30}, \sqrt{45}, \sqrt{29}$; б) $\left(5; \frac{8}{3}; \frac{22}{3}\right)$; в) $\frac{15}{\sqrt{870}}$; г) $\frac{2}{\sqrt{377}}$.

Завдання 4 Привести до канонічного вигляду рівняння лінії другого порядку $5x^2 - 2y^2 - 20 = 0$. Визначити вид кривої, знайти її фокуси, півосі, ексцентриситет, рівняння директрис і асимптот (для гіперболи).

Розв'язання.

Зведемо дане рівняння до канонічного вигляду $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{10}=1.$

Це — рівняння гіперболи з центром у точці $C(0;\,0)$, дійсною піввіссю $a=2$ та уявною піввіссю $b=\sqrt{10}$. Половину фокусної відстані c знайдемо з умови

$$c^2=a^2+b^2,\quad c=\sqrt{14}.$$

Фокуси F_1 і F_2 лежать на осі Oy і мають відповідно координати $\left(-\sqrt{14};\ 0\right)$ і $\left(\sqrt{14};\ 0\right)$.

Ексцентриситет: $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $\varepsilon=\sqrt{\frac{7}{2}}$.

Рівняння директрис: $y=\pm\frac{a}{\varepsilon}$, $y=\pm\sqrt{\frac{8}{7}}=\pm2\sqrt{\frac{2}{7}}$.

Рівняння асимптот: $y=\pm\frac{b}{a}x$, $y=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}x$.

Завдання 5 Знайдіть точку *M*, симетричну точці $P(1;\,3;\,-6)$ відносно прямої $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4}$.

Розв'язання.

Складемо рівняння площини α, що проходить через точку $P(1;\,3;\,-6)$, перпендикулярно до прямої $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4}$.

Вектор $\vec{a}\{-1;\,-1;\,4\}$ — напрямний вектор прямої $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4}$ є нормальним вектором площини, яка перпендикулярна до даної прямої. Записуємо рівняння площини α:

$$-(x-1)-(y-3)+4(z+6)=0;\qquad -x-y+4z+28=0.$$

Знаходимо точку Q — проекцію точки $P(1; 3; -6)$ на пряму $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4}$. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -x-y+4z+28=0, \\ \frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4}. \end{cases}$$

Запровадивши параметр t, запишемо рівняння прямої у параметричному вигляді:

$$x=-t+2, \quad y=-t+3, \quad z=4t-1.$$

Виконавши підстановку в рівняння площини, дістанемо:

$$-(-t+2)-(-t+3)+4(4t-1)=0, \quad 18t=9, \quad t=\frac{1}{2}.$$

Отже, $x_Q=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}, \quad y_Q=\frac{5}{2}, \quad z_Q=1.$

Точка $Q\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 1\right)$ є серединою відрізка MP, тому її координати задовольняють рівності:

$$x_Q=\frac{x_M+x_P}{2}, \quad y_Q=\frac{y_M+y_P}{2}, \quad z_Q=\frac{z_M+z_P}{2}.$$

Тобто $x_M=2, \quad y_M=2, \quad z_M=8.$

Отже, координати точки $M(2; 2; 8)$.

Завдання 6 Запишіть у канонічному вигляді рівняння прямої
$$\begin{cases} x-2y+3z+15=0, \\ 2x+3y-4z-12=0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Щоб записати канонічне рівняння прямої, достатньо знати координати точки, через яку проходить пряма, і напрямний вектор цієї прямої.

Нехай $x=0$, система набуває вигляду:

$$\begin{cases} -2y+3z+15=0, \\ 3y-4z-12=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -6y+9z+45=0, \\ 6y-8z-24=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-24, \\ z=-21. \end{cases}$$

Отже, точка $M(0;\,-24;\,-21)$ належить шуканій прямій.

Знайдемо напрямний вектор за формулою

$$\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}=-\vec{i}+10\vec{j}+7\vec{k}, \quad \text{або} \quad \vec{a}=\{-1;10;\,7\}.$$

Отже, канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x=0}{-1}=\frac{y+24}{10}=\frac{z+21}{7}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Беклемишев Д. В*. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. — М. : Наука, 1987. — 320 с.
2. *Бугров Я. С*. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С.Бугров, С. М. Никольский. — М. : Наука, 1983. — 228 с.
3. *Головина Л. И*. Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Л. И. Головина. — М. : Наука, 1985. — 392 с.
4. *Білоусова В. П*. Аналітична геометрія / В. П.Білоусова, І. Г.Ільїн. — К. : Вища шк., 1973. — 327 с.
5. *Буйвол В. М*. Елементи лінійної і векторної алгебри та аналітичної геометрії / В. М. Буйвол. — К. : КМУЦА, 1996. — 220 с.
6. *Вища* математика: збірник задач : навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. І. П. Вовкодав та ін.; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. — К. : А.С.К., 2001. — 480 с.
7. *Данко П. Е*. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е.Данко, А. Г.Попов, Т. Кожевникова. — М. : Наука, 1980. — Т. 1. — 135 с.
8. *Дубовик В. П*. Вища математика / В. П.Дубовик, І. І.Юрик. — К. : Вища шк., 1993. — 647 с.
9. *Ильин В. А*. Линейная алгебра / В. А.Ильин, Е. Г. Позняк. — М. : Наука, 1981. — 183 с.
10. *Каплан И. А*. Практические занятия по высшей математике / И. А. Каплан. — Харьков, 1973.
11. *Клетеник Д. В*. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В.Клетеник. — М.: Наука, 1975. — 214 с.
12. *Коваль О. О*. Елементи лінійної алгебри, векторного числення та аналітичної геометрії : навч. посібник / О. О.Коваль, К. Ф. Топольницька. — К. : КМУЦА, 1996. — 150 с.
13. *Лубенська Т. В*. Елементи лінійної, векторної алгебри та аналітичної геометрії / Т. В.Лубенська, Л. Д. Чупаха. — К. : КВТІУ, 1997. — 261 с.
14. *Олешко Т. І.* Вища математика для економістів // Електронний підручник / Т. І.Олешко, В. Ф.Антоненко, Т. В.Лубенська, Я. В. Крисак.
15. *Овчинников П. П*. Вища математика: підручник: у 2 ч. — Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення / П. П.Овчинников, Ф. П.Яремчик, В. М. Михайленко. — К. : Техніка, 2000. — 592 с.
16. *Федорчук В. В*. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / В. В. Федорчук. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1990. — 329 с.

Навчальне видання

$\boxed{\text{АНТОНЕНКО}}$ Володимир Феодосійович,
КЛЮС Ірина Степанівна,
ГОРІДЬКО Руслана Володимирівна,
ЧУБ Людмила Олексіївна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЧАСТИНА 1

ЛІНІЙНА, ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник

Коректор *А. Бородавко*
Художник обкладинки *Т. Зяблiцева*
Комп'ютерна верстка *Н. С. Ахроменко*

Підп. до друку 07.09.09. Формат 60х84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 17,67. Обл.-вид. арк. 19,0.
Тираж 500 пр. Замовлення № 220-1

Видавництво Національного авіаційного університету «НАУ-друк»
03680. Київ – 58, просп. Космонавта Комарова, 1
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 977 від 05.07.2002