

УДК 519.95+551.509

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРАТКОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА ПОГОДЫ

© С.Е. Жуликов

Ключевые слова: математическое моделирование; прогноз погоды; алгоритм расчета уравнений модели; вычислительный эксперимент.

Проблема предсказания климата, т. е. описания будущих состояний климатической системы и изменчивости различных характеристик ее компонентов, является центральной среди многочисленных задач, связанных с исследованием как климатической системы Земли в целом, так и отдельных компонентов. В работе представлен краткий обзор математических моделей, используемых в настоящее время для прогнозов погоды. Приведена математическая модель гидротермодинамики атмосферных процессов, алгоритмы ее реализации и результаты вычислительных экспериментов.

К настоящему времени предложен ряд математических моделей задач прогноза погоды и общей циркуляции атмосферы и численных алгоритмов для их решения [1–7]. Вместе с тем необходимо отметить, что уравнения гидротермодинамики атмосферных процессов настолько сложны, что до сих пор имеется необходимость разработки более качественных алгоритмов, способных с высокой точностью описать широкий спектр задач динамической метеорологии и прогноза погоды. Построение качественных алгоритмов решения таких задач тесно связано с проблемой аппроксимации уравнений и устойчивости полученных разностных схем, которые вообще являются основными проблемами при конструировании новых численных алгоритмов.

Проблема предсказания климата, т. е. описания будущих состояний климатической системы и изменчивости различных характеристик ее компонентов, является центральной среди многочисленных задач, связанных с исследованием как климатической системы Земли в целом, так и отдельных компонентов.

Современные климатические модели. В многообразии климатических моделей, используемых сегодня в исследованиях климата, можно выделить следующие четыре класса (в порядке возрастания сложности):

- 1) простые климатические модели (например, двумерные, одномерные или даже нульмерные);
- 2) т. н. модели промежуточной сложности (МПС);
- 3) модели общей циркуляции атмосферы (МОЦА) с упрощенными описаниями верхнего перемешанного слоя океана и морского льда (ВПСО/МЛ);
- 4) сложные трехмерные модели совместной циркуляции атмосферы и океана (МОЦАО), занимающие высшую ступень в иерархии климатических моделей.

В последние полтора десятилетия оценка моделей чрезвычайно облегчается международной кооперацией в виде проектов сравнения моделей. К наиболее известным международным проектам сравнения моделей относятся: Проект Сравнения Атмосферных Моделей

АМIP (Atmospheric Model Intercomparison Project), Проект Сравнения Объединенных Моделей (атмосферы и океана) CMIP (Coupled Model Intercomparison Project), Проект Сравнения Палеоклиматических Моделей PMIP (Paleoclimate Model Intercomparison Project) и Проект «Климат XX века» C20C (Climate of the 20th Century). Проекты сравнения моделей достаточно полно представляют основные аспекты оценки МОЦАО. Значительная часть проектов посвящена сравнению не только основных компонентов МОЦАО (атмосферных, океанских и др.), но даже отдельных параметризаций.

Для глобального климатического прогноза погоды (ГКПП) в разных странах используются различные гидродинамические модели. Примером подобных моделей является ETA-модель США и мезомасштабная модель MM5, разработанная в Национальном центре атмосферных исследований (NCAR) США, MM5 используется в Китае, Новой Зеландии, Бразилии, Израиле и др. Ее усовершенствованный вариант – WRF модель (исследования и прогноз погоды) также получает широкое распространение в мире.

Очевидно, что перспективность использования моделей типа MM5 или WRF и других технологий ГКПП для детальных прогнозов погоды несомненна.

Использование гидродинамических методов в оперативной работе в Гидрометцентре России является предпосылкой к созданию и внедрению в практику системы детализированного прогноза метеовеличин и характеристик погоды в различных пунктах на территории России.

Математическое моделирование гидротермодинамики атмосферных процессов. Основу всех моделей атмосферы составляют уравнения движения, притока тепла, неразрывности, переноса влаги и атмосферных примесей, являющиеся математическим выражением законов физики (законов сохранения импульса, энергии и массы), а также уравнения состояния. Эти уравнения для идеальной атмосферы (без учета турбулентной вязкости), записанные в относительной системе координат, связанной с вращающейся Землей

и с абсолютной системой координат, ось которой совпадает с осью вращения Земли, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\omega \times U + g, \\ \frac{dT}{dt} - \frac{\gamma_a}{g\rho} \cdot \frac{dp}{dt} &= \frac{1}{c_p \rho} (E_r + E_p), \\ \frac{dp}{dt} + \text{div}(\rho U) &= 0, \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{1}{\rho} E_v, \\ \frac{ds_a}{dt} &= E_a, \\ p &= R\rho T(1 + 0.605q), \end{aligned} \quad (1)$$

где $U = u \cdot i + v \cdot j + w \cdot k$ – трехмерный вектор скорости; i, j, k – единичные векторы в декартовой системе координат x, y, z соответственно; u, v, w – проекции вектора скорости на оси координат; p, ρ, T – давление, плотность и температура воздуха; q – удельная влажность воздуха (массовая доля водяного пара); $\theta = T \cdot \left(\frac{p}{p_0}\right)^\lambda$ – потенциальная температура; $P = 1000$ гектопаскалей;

$$\lambda = \frac{c_p - c_v}{c_p},$$

c_p, c_v – удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении и при постоянном объеме, соответственно; g – ускорение свободного падения; ω – вектор угловой скорости вращения Земли; $\gamma_a = \frac{g}{c_p}$ – сухоадиабатический градиент температуры; R – удельная газовая постоянная сухого воздуха; s_a – количество примеси a в единице объема воздуха; E_r и E_p – скорости изменения количества тепла в единице объема за единицу времени; E_v – скорость изменения количества водяного пара; E_a – скорость изменения количества примеси в единице объема.

Система уравнений (1) записана в абсолютной (инерционной) системе координат с началом в центре земли, осью z , совпадающей с осью Земли и направленной с юга на север, а также в относительной системе координат, связанной с Землей, вращающейся с угловой скоростью ω . В локальной декартовой системе координат ось x направлена на восток, ось y – на север, ось z – по местной вертикали; а проекции вектора угловой скорости вращения Земли ω равны:

$$\begin{aligned} \omega_x &= 0, \\ \omega_y &= \omega \cdot \cos \varphi, \\ \omega_z &= \omega \cdot \sin \varphi, \end{aligned}$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – абсолютная величина угловой скорости вращения Земли; $T = 1$ сутки; φ – широта места.

В этой системе координат уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + l \cdot v - l_1 \cdot w, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + l \cdot u, \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + l_1 \cdot u - g, \\ \frac{dT}{dt} - \frac{\gamma_a}{g\rho} \cdot \frac{dp}{dt} &= \frac{1}{c_p \rho} (E_r + E_p), \\ \frac{dp}{dt} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= 0, \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{1}{\rho} E_v, \\ \frac{ds_a}{dt} &= E_a, \\ p &= R\rho T(1 + 0.605q), \end{aligned} \quad (2)$$

где $l = 2\omega \sin \varphi$ – параметр Кориолиса, $l_1 = 2\omega \cos \varphi$.

Для программной реализации математической модели гидротермодинамики атмосферных процессов примем следующие дополнительные допущения:

- изменение влажности воздуха пренебрежимо мало;
- выброс загрязняющих веществ отсутствует;
- подвод (отвод) тепла отсутствует (адиабатические условия).

С учетом принятых допущений уравнения модели имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + l \cdot v - l_1 \cdot w, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + l \cdot u, \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + l_1 \cdot u - g, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= -\left(\frac{\partial(Tu)}{\partial x} + \frac{\partial(Tv)}{\partial y} + \frac{\partial(Tw)}{\partial z} \right), \\ p &= \rho \cdot R \cdot T \cdot \mu, \end{aligned} \quad (3)$$

где μ – молярная масса воздуха.

Система уравнений (3) является замкнутой относительно функций u, v, w, ρ, T, p . Ее следует дополнить начальными и краевыми условиями. Все функции зависят от четырех переменных (τ, x, y, z).

Начальные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} u(0, x, y, z) &= u_0(x, y, z), \\ v(0, x, y, z) &= v_0(x, y, z), \\ w(0, x, y, z) &= w_0(x, y, z), \\ \rho(0, x, y, z) &= \rho_0(x, y, z), \\ T(0, x, y, z) &= T_0(x, y, z). \end{aligned}$$

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}
 u(\tau, 0, y, z) &= u_x(\tau, y, z), \\
 u(\tau, x, 0, z) &= u_y(\tau, x, z), u(\tau, x, y, 0) = u_z(\tau, x, y), \\
 v(\tau, 0, y, z) &= v_x(\tau, y, z), \\
 v(\tau, x, 0, z) &= v_y(\tau, x, z), v(\tau, x, y, 0) = v_z(\tau, x, y), \\
 w(\tau, 0, y, z) &= w_x(\tau, y, z), w(\tau, x, 0, z) = w_y(\tau, x, z), \\
 w(\tau, x, y, 0) &= w_z(\tau, x, y), \\
 \rho(\tau, 0, y, z) &= \rho_x(\tau, y, z), (\tau, x, 0, z) = \rho_y(\tau, x, z), \\
 \rho(\tau, x, y, 0) &= \rho_z(\tau, x, y), \\
 T(\tau, 0, y, z) &= T_x(\tau, y, z), T(\tau, x, 0, z) = T_y(\tau, x, z), \\
 T(\tau, x, y, 0) &= T_z(\tau, x, y).
 \end{aligned}$$

Система уравнений является нелинейной системой уравнений в частных производных. В связи с этим решение в аналитическом виде получить невозможно, и для их интегрирования применяются численные методы.

Алгоритм решения уравнений математического описания. Для решения системы уравнений (3) применим метод сеток.

Метод сеток, или метод конечных разностей, является одним из самых распространенных в настоящее время методов численного решения уравнений в частных производных. В его основе лежит идея замены производных конечно-разностными отношениями. Пространство разбивают на конечные элементы. Центр каждого элемента является узлом.

Обозначим длину ребра элемента пространства dh (шаг по координате). Шаг по времени обозначим dt . Для замены частных производных конечными разностями будем использовать шаблон, при котором частная производная по координате будет заменена следующим образом:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y_{i,j,k} - y_{i-1,j,k}}{dh}, \quad (y - \text{любая переменная}).$$

Производная по времени заменяется следующим образом:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y^{L+1} - y^L}{dt},$$

где L – индекс переменной по оси времени.

Заменяя таким образом производные, получим систему разностных уравнений, позволяющую найти значения переменных на следующем $(L+1)$ -м по времени шаге.

$$u_{i,j,k}^{L+1} = u_{i,j,k}^L + dt \left(-\frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j,k}^L - p_{i-1,j,k}^L}{dh} + l \cdot v_{i,j,k}^L - l_1 \cdot w_{i,j,k}^L \right),$$

$$v_{i,j,k}^{L+1} = v_{i,j,k}^L + dt \left(-\frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j,k}^L - p_{i,j,k-1}^L}{dh} + l \cdot u_{i,j,k}^L \right),$$

$$w_{i,j,k}^{L+1} = w_{i,j,k}^L + dt \left(-\frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j,k}^L - p_{i,j,k-1}^L}{dh} + l_1 \cdot u_{i,j,k}^L - g \right),$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{i,j,k}^{L+1} &= \rho_{i,j,k}^L - dt \left(\frac{\rho_{i,j,k}^L \cdot u_{i,j,k}^L - \rho_{i-1,j,k}^L \cdot u_{i-1,j,k}^L}{dh} + \right. \\
 &+ \left. \frac{\rho_{i,j,k}^L \cdot v_{i,j,k}^L - \rho_{i,j,k-1}^L \cdot v_{i,j,k-1}^L}{dh} + \right. \\
 &+ \left. \frac{\rho_{i,j,k}^L \cdot w_{i,j,k}^L - \rho_{i,j,k-1}^L \cdot w_{i,j,k-1}^L}{dh} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{i,j,k}^{L+1} &= T_{i,j,k}^L - dt \left(\frac{T_{i,j,k}^L \cdot u_{i,j,k}^L - T_{i-1,j,k}^L \cdot u_{i-1,j,k}^L}{dh} + \right. \\
 &+ \left. \frac{T_{i,j,k}^L \cdot v_{i,j,k}^L - T_{i,j,k-1}^L \cdot v_{i,j,k-1}^L}{dh} + \right. \\
 &+ \left. \frac{T_{i,j,k}^L \cdot w_{i,j,k}^L - T_{i,j,k-1}^L \cdot w_{i,j,k-1}^L}{dh} \right),
 \end{aligned}$$

$$p_{i,j,k}^L = \rho_{i,j,k}^L \cdot R \cdot T_{i,j,k}^L \cdot \mu.$$

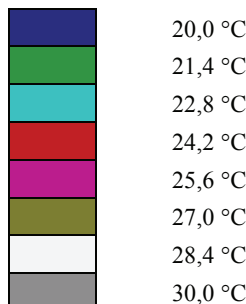
Результаты численного моделирования. Область представляет собой ограниченную часть плоскости с нанесенной на нее сеткой. Ее можно представить в виде квадратной матрицы, состоящей из ячеек, размером $N \times N$ (реально используется 40×40 ячеек, но при необходимости размер матрицы может быть изменен).

Единицей времени в модели является одна секунда. Отсчет времени начинается с нуля. Направление ветра задается тангенсом угла наклона к фронту. Сила ветра определяется в граничных условиях. Ось x направлена на восток, ось y направлена на юг. Воздушные массы рассматриваются над горизонтальной плоскостью, чтобы исключить из модели необходимость учитывать рельеф поверхности земли.

Очевидно, имеет место масштабируемость модели как по поверхностным координатам, так и по времени и относительной разности температур начальных и граничных условий.

В качестве демонстрационных примеров были рассчитаны поля температур в приземном слое, при начальных условиях $T = 20$ °C и граничных условиях $T = 30$ °C.

На всех рисунках приведена условная температурная шкала:



Ниже приводятся типовые результаты численных экспериментов.

1. Граничное условие задано на оси y , ветер направлен под углом 45° к точечному фронту теплого воздуха, что хорошо видно на рис. 1.1.

На следующих рисунках 1.2, 1.3 видно распространение теплого воздуха.

2. Граничное условие задано на оси x , ветер направлен под углом 45° к точечному фронту теплого воздуха.



Рис. 1.1. Начальный момент времени

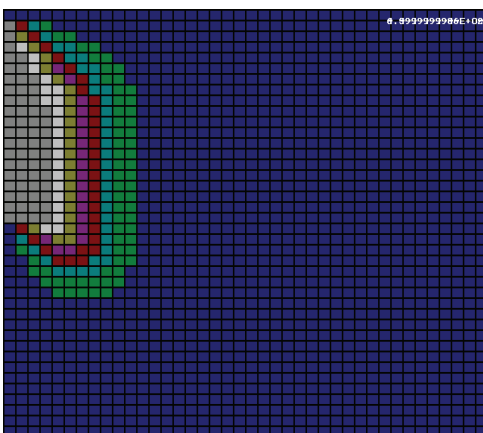


Рис. 1.2. Момент времени $\tau = 1000$ с

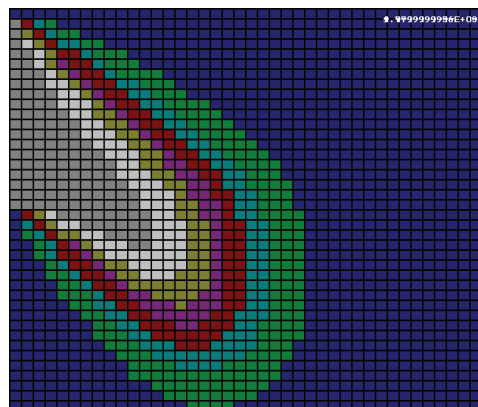


Рис. 1.3. Момент времени $\tau = 3000$ с

Из результатов численных экспериментов очевидна адекватность модели, описывающей однотипные воздействия в различных направлениях.

Кроме того, приведенные иллюстрации хорошо согласуются со стандартным поведением струи в гидродинамической среде при наличии разности температур, концентраций, окраски и т. п. (рис. 2.1, 2.2).

2. Граничное условие задано на оси x , ветер направлен под углом 90° к точечному фронту теплого воздуха (рис. 3.1).

Приведенный пример не учитывает взаимодействия воздушных масс на боковых фронтах и приведен для иллюстрации ламинарного неослабевающего воздушного потока, взаимодействующего со средой только по фронту своего распространения в соответствии с заданным вектором. Результаты численного эксперимента хорошо согласуются с известными моделями поведения газовых и жидкостных сред в условиях, близких к экспериментальным (рис. 3.1, 3.2).

Приведенные результаты численных экспериментов хорошо описывают известные модели поведения гидродинамической среды, однако, условия экспериментов мало согласуются с реальным поведением воздушных масс в приземном слое, распространяющихся большим фронтом, за исключением случая 3, который можно рассматривать и на большом фронте, масштабируя координатную сетку на поверхности земли. Этот случай соответствует северному, восточному, южному или западному ветру, но вследствие упрощений модели является малоинформативным.



Рис. 2.1. Начальный момент времени

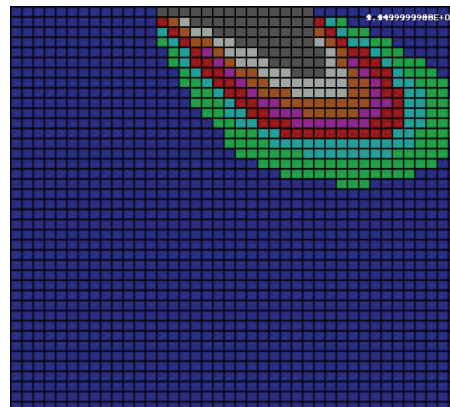
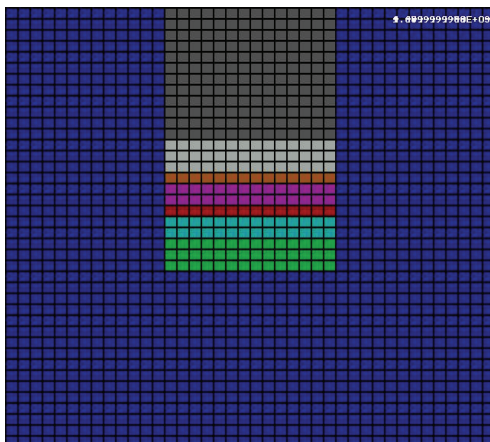


Рис. 2.2. Момент времени $\tau = 3000$ с



Рис. 3.1. Начальный момент времени

Рис. 3.2. Момент времени $\tau = 3000$ с

Рассмотрим промежуточное направление ветра (например, северо-западное).

3. Граничное условие задано на осях x и y , ветер направлен под углом 45° к фронту теплого воздуха (рис. 4.1).

4. Следующие результаты описывают ситуацию, моделирующую наступление воздушных масс с двух смежных направлений на некоторое большое прямоугольное препятствие, могущее быть воздушной массой над водоемом или возвышенностью (рис. 4.2, 4.3).

5. Граничное условие задано по обеим осям x и y , ветер направлен под углом 45° к фронту теплого воздуха (рис. 5.1).

Полученные результаты соответствуют реальной картине вторжения фронта теплого воздуха с принятыми выше допущениями, и можно считать, что качественно приведенная модель является адекватной (рис. 5.2, 5.3).

Для количественного анализа адекватности модели рассмотрим экспериментальные данные, предоставленные Тамбовским гидрометеоцентром.

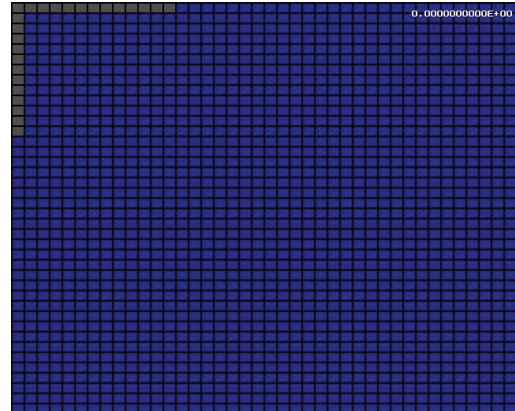
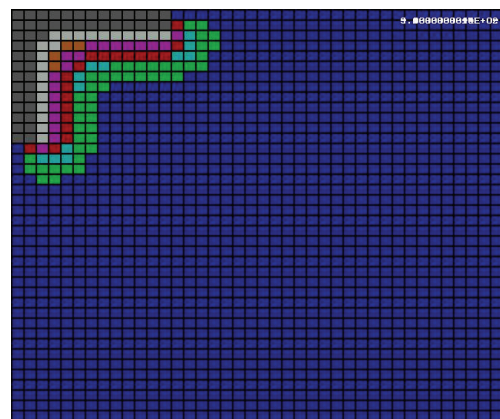
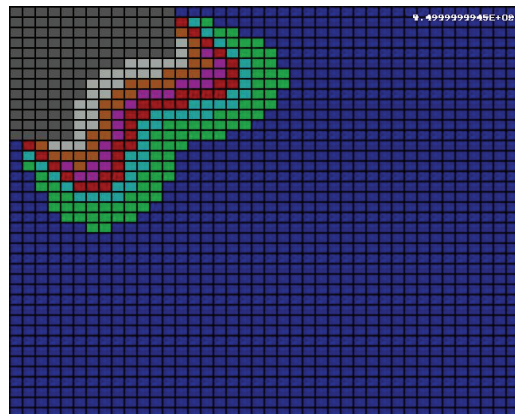


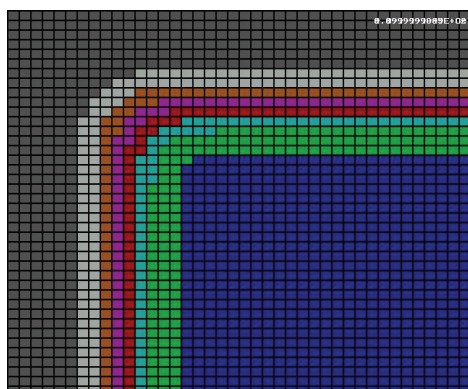
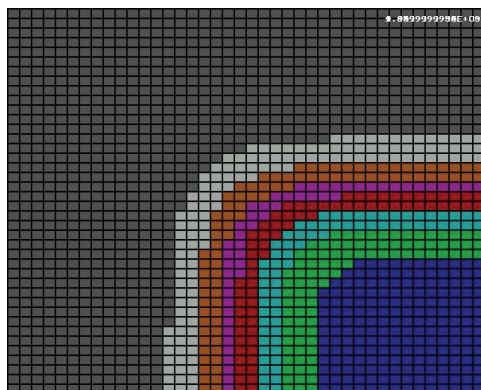
Рис. 4.1. Начальный момент времени

Рис. 4.2. Момент времени $\tau = 1000$ сРис. 4.3. Момент времени $\tau = 3000$ с

Из предоставленной базы данных рассмотрим условия, близкие к моделируемым. Например, 30 августа 2005 г. в течение суток в Тамбове дул северо-западный ветер скоростью 2–4 м/с. Замеры температуры производились в четырех точках Тамбова и пригородов, расположенных приблизительно в вершинах квадрата в 7, 13 и 19 часов.



Рис. 5.1. Начальный момент времени

Рис. 5.2. Момент времени $\tau = 1000$ сРис. 5.3. Момент времени $\tau = 3000$ с

Очевидно, что реальные данные хорошо согласуются с результатами численного эксперимента на рис. 5.1 – 5.3 в верхней левой четверти. Небольшое падение температуры к 19 часам обусловлено вечерним снижением солнечной активности, что не учитывалось в модели.

Аналогичные данные можно привести за 28 июня 2005 г., ветер северо-западный, 2–4 м/с.

Очевидно, что реальные данные хорошо согласуются с результатами численного эксперимента, что свидетельствует об адекватности предложенной модели краткосрочного прогноза температуры.

Таблица 1

Время замера	7 ч		13 ч		19 ч	
Температура в 4-х точках	13,0	12,8	23,0	20,5	22,0	21,5
	12,8	12,8	20,5	20,5	21,5	21,5

Таблица 2

Время замера	7 ч		13 ч		19 ч	
Температура в 4-х точках	15,0	12,9	20,0	20,5	22,0	20,2
	12,9	12,9	20,5	20,5	20,2	20,2

Выбор методов решения задачи обусловлен эффективностью разностных методов при решении систем дифференциальных уравнений в частных производных, а также для моделирования и решения поставленной задачи на ПК.

Таким образом, на основе общих термодинамических уравнений предложена упрощенная математическая модель, описывающая движение воздушных масс в приземном слое и соответствующее распределение температуры.

Показана адекватность работы предложенной модели на основе реальных метеоданных по г. Тамбову.

Тем не менее, задача решена в сильно упрощенном виде без учета слоистой структуры атмосферы, рельефа поверхности, атмосферных примесей, расчета давления, направления и силы господствующих ветров, влажности и т. п. Внесение уточнений в уравнения модели позволят получать более точный и адекватный прогноз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Энциклопедия систем жизнеобеспечения. Знания об устойчивом развитии. М.: Магистр-Пресс, 2005. Т. 1.
2. Дымников В.П. Моделирование климата и его изменений // Глобальные изменения природной среды и климата: избр. науч. тр. М., 1997. С. 21-231. Ж-97/21138.
3. Самарский А.А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1998.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.; СПб.: Физматлит, 2001.
6. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
7. Рындин Е.А. Методы решения задач математической физики. М., 2003.

Поступила в редакцию 26 марта 2009 г.

Zhulikov S.E. Mathematical modeling of short-term weather forecast. The problem of a climate prediction, i. e. the description of the future conditions of climatic system and variability of various characteristics of its components, is central among the numerous problems connected with research both climatic system of the Earth as a whole, and separate components. In the work the short review of mathematical models now being used for weather forecasts is presented. The mathematical model of hydrothermodynamics of atmospheric processes, algorithms of its realization and results of calculative experiments is resulted.

Key words: mathematical modeling; weather forecast; algorithm of computation of the equations of model; computing experiment.