ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

1. Для матриць вигляду $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}$ знайти псевдообернену матрицю двома способами. Зробити перевірку отриманих результатів.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 0 & 7 \\ 9 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -7 & -1 \\ 5 & 0 & 3 & -2 \\ -7 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 1 & -4 & -6 \\ -2 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

7) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

10) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

11) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

12) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

13) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

14). $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 10 \\ 2 & 3 & 12 & 9 \\ 4 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 6 & 9 \\ 2 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

15) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

16) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

17) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 8 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 3 \\ 2 & 6 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

18) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 9 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

19) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

20) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

21) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

22) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 9 & 2 \\ 2 & 4 & 14 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 7 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

23) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

24) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

25) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

26) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \end{pmatrix}$.

27) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \\ -6 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

28) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 & -5 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ -4 & -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \\ -6 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -6 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

29) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 8 \\ 1 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -5 & -4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

30) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 6 & 6 \\ -1 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -8 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 9 & 9 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Знайти псевдорозв'язок $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T$ рівняння $Ax = b$, де A – матричний оператор. Знайти регуляризований розв'язок $\tilde{x} = \left(x_1^{\alpha}, x_2^{\alpha}\right)^T$, який апроксимує псевдорозв'язок $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T$ з точністю до 3-х правильних знаків методом регуляризації академіка А.М. Тихонова.

1. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 5{,}9999; \\ 3x_1 + 4x_2 = 6. \end{cases}$

2. $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 = 8{,}9999; \\ -x_1 + 4x_2 = 9. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 = 0{,}9999; \\ 5x_1 - 9x_2 = 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 8{,}9999; \\ -2x_1 + 3x_2 = 9. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 1{,}9999; \\ 7x_1 - 5x_2 = 2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 = 3{,}9999; \\ -5x_1 + 6x_2 = 4. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 9{,}9999; \\ 2x_1 + 6x_2 = 10. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - 11x_2 = 1{,}9999; \\ x_1 - 11x_2 = 2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 12x_1 + 7x_2 = 5{,}9999; \\ 12x_1 + 7x_2 = 6. \end{cases}$

10. $\begin{cases} -3x_1 + 8x_2 = 7{,}9999; \\ -3x_1 + 8x_2 = 8. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 = 9{,}9999; \\ 10x_1 + 3x_2 = 10. \end{cases}$

12. $\begin{cases} -6x_1 + x_2 = 0{,}9999; \\ -6x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} -2x_1 + 9x_2 = 3{,}9999; \\ -2x_1 + 9x_2 = 4. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 = 2{,}9999; \\ 10x_1 - 2x_2 = 3. \end{cases}$

18. $\begin{cases} -7x_1 + 5x_2 = 10{,}9999; \\ -7x_1 + 5x_2 = 11. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 4{,}9999; \\ 6x_1 + 3x_2 = 5. \end{cases}$

20. $\begin{cases} -10x_1 + 7x_2 = 7{,}9999; \\ -10x_1 + 7x_2 = 8. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 0{,}9999; \\ 3x_1 + 4x_2 = 1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} -7x_1 + 4x_2 = 2{,}9999; \\ -7x_1 + 4x_2 = 3. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 = 4{,}9999; \\ 5x_1 - 9x_2 = 5. \end{cases}$

24. $\begin{cases} -12x_1 + x_2 = 1{,}9999; \\ -12x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 = 3{,}9999; \\ 7x_1 + 6x_2 = 4. \end{cases}$

26. $\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 = 6{,}9999; \\ -5x_1 + 4x_2 = 7. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 = 2{,}9999; \\ 5x_1 + 6x_2 = 3. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5{,}9999; \\ 3x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$

14. $\begin{cases} -11x_1 + 3x_2 = 6{,}9999; \\ -11x_1 + 3x_2 = 7. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 = 7{,}9999; \\ 9x_1 + 4x_2 = 8. \end{cases}$

28. $\begin{cases} -3x_1 - 11x_2 = 8{,}9999; \\ -3x_1 - 11x_2 = 9. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 = 5{,}9999; \\ x_1 + 7x_2 = 6. \end{cases}$

30. $\begin{cases} -5x_1 + x_2 = 0{,}9999; \\ -5x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$

3. Знайти квазірозв'язок рівняння $Ax = b$, де $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -3 \\ n+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} n+2 \\ n+5 \\ n+3 \end{pmatrix}$, n – номер варіанту. У якості норми розглянути $\|x\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$; у якості компакта використовувати $M : \|x\|_3 \le 1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -3 \\ n+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} n+2 \\ n+5 \\ n+3 \end{pmatrix}, \ n \text{ – номер варіанту.}$$

Знайти псевдорозв'язок рівняння $Ax = b$. Знайти псевдорозв'язок рівняння $Ax = b$, використовуючи теорію псевдообертання. Порівняти отримані результати. Зробити висновки.

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

Приклад 1. Знайти двома способами псевдообернену матрицю для матриці:

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Для розв'язання задачі використаємо теорію з підпункту 1.4. Знайдемо псевдообернену матрицю за означенням, тобто за формулою $Q^+=S^+R^+=S^*\left(SS^*\right)^{-1}\left(R^*R\right)^{-1}R^*$, де $Q=RS$ – скелетний розклад матриці Q, а $*$ означає операцію транспонування.

Ранг матриці Q дорівнює 3, тому виберемо в якості матриці R матрицю:

$$R=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді, очевидно, що в якості матриці S треба взяти матрицю:

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишемо транспоновані матриці:

$$R^*=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ S^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемноживши матриці S і S^* та R і R^*, знайдемо матриці, обернені до добутків:

$$\left(SS^*\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \left(R^*R\right)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{12}{41} & -\frac{7}{41} & \frac{6}{41} \\ -\frac{7}{41} & \frac{15}{41} & -\frac{7}{82} \\ \frac{6}{41} & -\frac{7}{82} & \frac{59}{246} \end{pmatrix}.$$

Далі обчислимо Q^+:

$$Q^+=S^*\left(SS^*\right)^{-1}\left(R^*R\right)^{-1}R^*=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{12}{41}&-\frac{7}{41}&\frac{6}{41}\\-\frac{7}{41}&\frac{15}{41}&-\frac{7}{82}\\\frac{6}{41}&-\frac{7}{82}&\frac{59}{246}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2&1&2\\-1&1&3&1\\1&-2&1&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{13}{41}&\frac{5}{41}&-\frac{3}{41}&\frac{17}{41}\\-\frac{11}{41}&\frac{1}{82}&\frac{12}{41}&-\frac{13}{82}\\\frac{40}{123}&-\frac{67}{246}&\frac{16}{123}&\frac{17}{82}\end{pmatrix}.$$

Знайдемо псевдообернену матрицю Q^+ іншим способом, а саме за формулою $Q^+=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}Q^*\left(QQ^*+\varepsilon I_n\right)^{-1}$, $(n=4)$:

$$W=QQ^*+\varepsilon I_n=\begin{pmatrix}2+\varepsilon&-3&-2&-1\\-3&9+\varepsilon&3&5\\-2&3&11+\varepsilon&5\\-1&5&5&5+\varepsilon\end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю W^{-1}, до матриці W. Елементи матриці W^{-1} дорівнюють:

$$w_{11}=\frac{\varepsilon^3+25\varepsilon^2+140\varepsilon+100}{\varepsilon\left(\varepsilon^3+27\varepsilon^2+176\varepsilon+246\right)},\ w_{12}=\frac{3\varepsilon^2+37\varepsilon+70}{\varepsilon\left(\varepsilon^3+27\varepsilon^2+176\varepsilon+246\right)},$$

$$w_{13}=\frac{2\left(\varepsilon^2+7\varepsilon+20\right)}{\varepsilon\left(\varepsilon^3+27\varepsilon^2+176\varepsilon+246\right)},\ w_{14}=\frac{\varepsilon^2-5\varepsilon-90}{\varepsilon\left(\varepsilon^3+27\varepsilon^2+176\varepsilon+246\right)},$$

$$w_{21}=\frac{3\varepsilon^2+37\varepsilon+70}{\varepsilon\left(\varepsilon^3+27\varepsilon^2+176\varepsilon+246\right)},\ w_{22}=\frac{\varepsilon^3+18\varepsilon^2+57\varepsilon+49}{\varepsilon\left(\varepsilon^3+27\varepsilon^2+176\varepsilon+246\right)},$$

$$w_{23}=-\frac{3\varepsilon^2-10\varepsilon-28}{\varepsilon\left(\varepsilon^3+27\varepsilon^2+176\varepsilon+246\right)},\ w_{24}=-\frac{5\varepsilon^2+47\varepsilon+63}{\varepsilon\left(\varepsilon^3+27\varepsilon^2+176\varepsilon+246\right)},$$

$$w_{31}=\frac{2\left(\varepsilon^2+7\varepsilon+20\right)}{\varepsilon\left(\varepsilon^3+27\varepsilon^2+176\varepsilon+246\right)},\ w_{32}=-\frac{3\varepsilon^2-10\varepsilon-28}{\varepsilon\left(\varepsilon^3+27\varepsilon^2+176\varepsilon+246\right)},$$

$$w_{33}=\frac{\varepsilon^3+16\varepsilon^2+38\varepsilon+16}{\varepsilon\left(\varepsilon^3+27\varepsilon^2+176\varepsilon+246\right)},\ w_{34}=-\frac{5\varepsilon^2+38\varepsilon+36}{\varepsilon\left(\varepsilon^3+27\varepsilon^2+176\varepsilon+246\right)},$$

$$w_{41}=\frac{\varepsilon^2-5\varepsilon-90}{\varepsilon\left(\varepsilon^3+27\varepsilon^2+176\varepsilon+246\right)},\ w_{42}=-\frac{5\varepsilon^2+47\varepsilon+63}{\varepsilon\left(\varepsilon^3+27\varepsilon^2+176\varepsilon+246\right)},$$

$$w_{43}=-\frac{5\varepsilon^2+38\varepsilon+36}{\varepsilon\left(\varepsilon^3+27\varepsilon^2+176\varepsilon+246\right)},\ w_{44}=-\frac{\varepsilon^3+22\varepsilon^2+117\varepsilon+81}{\varepsilon\left(\varepsilon^3+27\varepsilon^2+176\varepsilon+246\right)}.$$

Знайдемо матрицю $V = Q^*\left(QQ^* + \varepsilon I_n\right)^{-1}$. Елементи матриці V дорівнюють:

$$v_{11} = \frac{2(5\varepsilon + 39)}{\varepsilon^3 + 27\varepsilon^2 + 176\varepsilon + 246},\ v_{12} = \frac{2\varepsilon^2 + 23\varepsilon + 30}{\varepsilon^3 + 27\varepsilon^2 + 176\varepsilon + 246},$$

$$v_{13} = \frac{\varepsilon^2 - 18}{\varepsilon^3 + 27\varepsilon^2 + 176\varepsilon + 246},\ v_{14} = \frac{2\varepsilon^2 + 29\varepsilon + 102}{\varepsilon^3 + 27\varepsilon^2 + 176\varepsilon + 246},$$

$$v_{21} = -\frac{\varepsilon^2 + 156\varepsilon + 66}{\varepsilon^3 + 27\varepsilon^2 + 176\varepsilon + 246},\ v_{22} = \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon + 3}{\varepsilon^3 + 27\varepsilon^2 + 176\varepsilon + 246},$$

$$v_{23} = \frac{3\varepsilon^2 + 38\varepsilon + 72}{\varepsilon^3 + 27\varepsilon^2 + 176\varepsilon + 246},\ v_{24} = \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon - 39}{\varepsilon^3 + 27\varepsilon^2 + 176\varepsilon + 246},$$

$$v_{31} = -\frac{\varepsilon^2 + 21\varepsilon + 80}{\varepsilon^3 + 27\varepsilon^2 + 176\varepsilon + 246},\ v_{32} = -\frac{2\varepsilon^2 + 36\varepsilon + 67}{\varepsilon^3 + 27\varepsilon^2 + 176\varepsilon + 246},$$

$$v_{33} = \frac{\varepsilon^2 + 24\varepsilon + 32}{\varepsilon^3 + 27\varepsilon^2 + 176\varepsilon + 246},\ v_{34} = \frac{3(2\varepsilon + 17)}{\varepsilon^3 + 27\varepsilon^2 + 176\varepsilon + 246}.$$

Знайдемо Q^+, обчисливши границю:

$$Q^+ = \lim_{\varepsilon \to 0} V = \lim_{\varepsilon \to 0} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{41} & \frac{5}{41} & -\frac{3}{41} & \frac{17}{41} \\ -\frac{11}{41} & \frac{1}{82} & \frac{12}{41} & -\frac{13}{82} \\ \frac{40}{123} & -\frac{67}{246} & \frac{16}{123} & \frac{17}{82} \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Знайти псевдорозв'язок $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^*$ рівняння $Ax = b$. Знайти регуляризований розв'язок $\tilde{x} = \left(x_1^\alpha, x_2^\alpha\right)^*$, який апроксимує псевдорозв'язок $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^*$ з точністю до 3-х правильних знаків методом регуляризації академіка А.М. Тихонова.

Розв'язання. Нехай $Ax = b$ має вигляд:

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 = 0{,}9999; \\ 3x_1 - 7x_2 = 1. \end{cases}$$

Знайдемо ранг матриці A і ранг розширеної матриці:

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} = 1; \quad \operatorname{rang}(A \mid B) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 3 & -7 & 0{,}9999 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

отже, система $Ax = b$ несумісна, тобто розв'язку в звичайному сенсі не існує. Знайдемо псевдорозв'язок цього рівняння.

Для цього знайдемо розв'язок системи:

$$A^* A x = A^* b,$$

де $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -7 & -7 \end{pmatrix}$. Обчислимо елементи відповідних матриць:

$$A^* \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -7 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -42 \\ -42 & 98 \end{pmatrix},$$

$$A^* \cdot b = \begin{pmatrix} 5{,}9997 \\ -13{,}9993 \end{pmatrix}.$$

Система $A^* Ax = A^* b$ приймає вигляд:

$$\begin{cases} 18x_1 - 42x_2 = 5{,}9997; \\ -42x_1 + 98x_2 = -13{,}9993, \end{cases} \text{ або}$$

$$\begin{cases} -42x_1 + 98x_2 = -13{,}9993; \\ -42x_1 + 98x_2 = -13{,}9993. \end{cases}$$

Нехай x_1 – довільна змінна, тоді маємо що:

$$x_2 = \frac{18x_1 - 5{,}9997}{42}.$$

Псевдорозв’язок задачі знаходимо на основі розв’язку задачі мінімізації квадрата норми $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$, тобто знайдемо:

$$\min\left\{ x_1^2 + \left(\frac{18x_1 - 5{,}9997}{42} \right)^2 \right\}.$$

Позначимо $\varphi(x_1) = x_1^2 + \left(\frac{18x_1 - 5{,}9997}{42} \right)^2$ і використовуючи необхідну умову екстремуму $\varphi'(x_1) = 0$, зайдемо x_1. Спростимо $\varphi(x_1)$:

$$\varphi(x_1) = x_1^2 + \left(\frac{18x_1 - 5{,}9997}{42} \right)^2 =$$

$$= 1{,}183673469x_1^2 - 0{,}1224428571x_1 + 0{,}020406122250.$$

Обчислимо похідну:

$$\varphi'(x_1) = 2{,}367346938x_1 - 0{,}1224428571,$$

$$2{,}367346938x_1 - 0{,}1224428571 = 0,$$

тоді маємо:

$$x_1 = 0{,}05172155172$$

Позначимо $\tilde{x}_1 \approx 0{,}05172$, тоді $\tilde{x}_2 = \frac{18 \cdot 0{,}05172 - 5{,}9997}{42} \approx -0{,}12068$.

Далі будемо вважати систему $\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 = 0{,}9999; \\ 3x_1 - 7x_2 = 1, \end{cases}$ – точною, а систему $\begin{cases} 3x_1 - 7{,}0001x_2 = 1; \\ 3x_1 - 7x_2 = 1, \end{cases}$ наближеною. Запишемо матриці (згідно з теорією підрозділу 1.5):

$$A_h = \begin{pmatrix} 3 & -7{,}0001 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \; b_\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді маємо:

$$\|b_\delta - b\| = 0{,}0001,\ \delta = 0{,}0001,\ h = 0{,}0001.$$

Застосуємо метод регуляризації. Виберемо $\alpha = \sqrt{\delta} = \sqrt{h} = 0{,}01$. Запишемо систему:

$$\left(A_h^* \cdot A_h + \alpha E\right)x^\alpha = A_h^* \cdot b_\delta$$

$$\begin{cases} 18{,}01x_1 - 42{,}0003x_2 = 6; \\ -42{,}0003x_1 + 98{,}0114x_2 = -14{,}0001. \end{cases}$$

Розв'яжемо її:

$$\begin{cases} x_1^\alpha = 0{,}05171903335; \\ x_2^\alpha = -0{,}1206786668. \end{cases}$$

Тоді розв'язок $\left(x_1^\alpha; x_2^\alpha\right)^*$ – апроксимує псевдорозв'язок $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^*$ з точністю до чотирьох знаків після коми.

Приклад 3. Знайти квазірозв'язок рівняння $Ax = b$, де $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. У якості норми розглянути $\|x\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$; у якості компакта використовувати $M : \|x\|_3 \le 1$. Знайти псевдорозв'язок рівняння $Ax = b$. Знайти псевдорозв'язок рівняння $Ax = b$, використовуючи теорію псевдообертання.

Розв'язання. Очевидно, що $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$. Задача є некоректно поставленою, знайдемо її квазірозв'язок. Складемо функціонал:

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = \|Ax - b\|_3^2,$$

$$\|Ax - b\|_3^2 = (2x_1 - 2)^2 + (7x_1 - 2)^2 + (x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 2)^2,$$

де потрібно знайти $\min f(x)$ при $\|x\|_3 \le 1$, тобто маємо задачу на умовний екстремум. Складемо допоміжну функцію Лагранжа ($\varphi(x_1, x_2, x_3) = \|x\|_3^2 - 1$ – рівняння зв'язку):

$$F(x_1, x_2, x_3, \lambda) = \|Ax - b\|_3^2 + \lambda\left(\|x\|_3^2 - 1\right),$$

$$F(x_1, x_2, x_3, \lambda) = (2x_1 - 2)^2 + (7x_1 - 2)^2 + (x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 2)^2 + \lambda\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1\right).$$

Знайдемо екстремум функції $F(x_1, x_2, x_3, \lambda)$. Використаємо необхідну умову екстремуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 108x_1 + 10x_2 + 12x_3 - 40 + 2\lambda x_1 = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 10x_1 + 50x_2 + 60x_3 - 20 + 2\lambda x_2 = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = 12x_1 + 60x_2 + 72x_3 - 24 + 2\lambda x_3 = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Розглянемо перші три рівняння системи (3.1), та розв'яжемо отриману систему відносно параметра λ.

$$\begin{cases} x_1(54+\lambda) + 5x_2 + 6x_3 = 20; \\ 5x_1 + x_2(25+\lambda) + 30x_3 = 10; \\ 6x_1 + 30x_2 + x_3(36+\lambda) = 12. \end{cases} \tag{3.2}$$

Розв'яжемо цю систему методом Крамера, тобто: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $i = 1,2,3$, де

$$\Delta = \begin{vmatrix} 54+\lambda & 5 & 6 \\ 5 & 25+\lambda & 30 \\ 6 & 30 & 36+\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 115\lambda^2 + 3233\lambda,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 20 & 5 & 6 \\ 10 & 25+\lambda & 30 \\ 12 & 30 & 36+\lambda \end{vmatrix} = 20\lambda^2 + 1098\lambda,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 54+\lambda & 20 & 6 \\ 5 & 10 & 30 \\ 6 & 12 & 36+\lambda \end{vmatrix} = 10\lambda^2 + 440\lambda,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 54+\lambda & 5 & 20 \\ 5 & 25+\lambda & 10 \\ 6 & 30 & 12 \end{vmatrix} = 12\lambda^2 + 528\lambda.$$

Одержимо розв'язки у вигляді:

$$x_1 = \frac{20\lambda^2 + 1098\lambda}{\lambda^3 + 115\lambda^2 + 3233\lambda} = \frac{20\lambda + 1098}{\lambda^2 + 115\lambda + 3233}, \tag{3.3}$$

$$x_2 = \frac{10\lambda^2 + 440\lambda}{\lambda^3 + 115\lambda^2 + 3233\lambda} = \frac{10\lambda + 440}{\lambda^2 + 115\lambda + 3233}, \tag{3.4}$$

$$x_3 = \frac{12\lambda^2 + 528\lambda}{\lambda^3 + 115\lambda^2 + 3233\lambda} = \frac{12\lambda + 528}{\lambda^2 + 115\lambda + 3233}. \tag{3.5}$$

Підставимо (3.3)-(3.5) в четверте рівняння системи (3.1), отримаємо рівняння відносно параметра λ:

$$\left(\frac{20\lambda+1098}{\lambda^2+115\lambda+3233}\right)^2+\left(\frac{10\lambda+440}{\lambda^2+115\lambda+3233}\right)^2+\left(\frac{12\lambda+528}{\lambda^2+115\lambda+3233}\right)^2-1=0,$$

$$(20\lambda+1098)^2+(10\lambda+440)^2+(12\lambda+528)^2-\left(\lambda^2+115\lambda+3233\right)^2=0,$$

$$\lambda^4+230\lambda^3+19047\lambda^2+678198\lambda+8774301=0. \qquad (3.6)$$

Застосуємо програмний пакет СКА *Maple* для знаходження коренів рівняння (3.6), а саме функцію *fsolve*:

$$fsolve\left(\lambda^4+230\lambda^3+19047\lambda^2+678198\lambda+8774301=0,\ \lambda\right).$$

Маємо два корні: $\lambda_1=-90{,}53351324$ та $\lambda_2=-35{,}53306653$. Знайдені корені λ_1 та λ_2 підставляємо у формули (3.3)-(3.5).

Для λ_1:

$$x_1=-0{,}700094468; \qquad (3.7)$$

$$x_2=-0{,}4571238173; \qquad (3.8)$$

$$x_3=-0{,}5485485809. \qquad (3.9)$$

Для λ_2:

$$x_1=0{,}946353036; \qquad (3.10)$$

$$x_2=0{,}20686656923; \qquad (3.11)$$

$$x_3=0{,}248238830. \qquad (3.12)$$

Підставимо знайдені значення (3.7)-(3.12) у функцію $\|Ax-b\|_3^2$:

$$f(x)=\|Ax-b\|_3^2=(2x_1-2)^2+(7x_1-2)^2+(x_1+5x_2+6x_3-2)^2,$$

$$f_1(x)=f_1(x_1,x_2,x_3)=127{,}6892233, \qquad (3.13)$$

$$f_2(x)=f_1(x_1,x_2,x_3)=23{,}55848293. \qquad (3.14)$$

Серед знайдених значень (3.13)-(3.14) вибираємо найменше. В даному випадку — це $f_2(x)=23{,}55848293$, тобто значення (3.10)-(3.12) утворюють квазірозв'язок операторного рівняння $Ax=b$:

$$x=\begin{pmatrix}0{,}946353036\\0{,}20686656923\\0{,}248238830\end{pmatrix}.$$

Знайдемо псевдорозв'язок рівняння $Ax=b$. Для цього необхідно знайти розв'язок системи $A^*Ax=A^*b$ з найменшою нормою. Запишемо необхідні матриці:

$$A^*=\begin{pmatrix}2&7&1\\0&0&5\\0&0&6\end{pmatrix},$$

$$A^*A=\begin{pmatrix}2&7&1\\0&0&5\\0&0&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0\\7&0&0\\1&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}54&5&6\\5&25&30\\6&30&36\end{pmatrix},$$

$$A^*b=\begin{pmatrix}2&7&1\\0&0&5\\0&0&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\10\\12\end{pmatrix}.$$

В результаті одержимо систему $A^*Ax=A^*b$ у вигляді:

$$\begin{cases}54x_1+5x_2+6x_3=20;\\5x_1+25x_2+30x_3=10;\\6x_1+30x_2+36x_3=12.\end{cases}\tag{3.15}$$

Знайдемо ранг матриці системи, а потім ранг розширеної матриці системи. Для цього виконаємо такі перетворення:

$$\begin{pmatrix}54&5&6\\5&25&30\\6&30&36\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&-1325&-1590\\5&25&30\\6&30&36\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}0&-1325&-1590\\0&0&0\\6&30&36\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}6&30&36\\0&-1325&-1590\\0&0&0\end{pmatrix},$$

тобто $rang\left(A^*A\right)=rang\begin{pmatrix}6&30&36\\0&-1325&-1590\\0&0&0\end{pmatrix}=2$.

У системи (3.15) визначник дорівнює нулю, тому приведемо розширену матрицю системи (3.15) до трикутного вигляду і одну з змінних, наприклад x_3, позначимо через λ:

$$\begin{pmatrix}54&5&6&20\\2&25&30&10\\6&30&36&12\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&5&6&2\\0&265&318&88\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Враховуючи позначення $x_3=\lambda$, маємо таку систему:

$$\begin{cases}x_1+5x_2+6\lambda=2;\\265x_2+318\lambda=88.\end{cases}\tag{3.16}$$

Остаточно маємо:

$$x_1=\frac{18}{53},\quad x_2=\frac{88}{265}-\frac{6}{5}\lambda,\quad x_3=\lambda.\tag{3.17}$$

Оскільки норма розв’язку повинна бути мінімальною, то псевдорозв’язок знаходимо на основі розв’язку задачі $\min\left\{x_1^2+x_2^2+x_3^2\right\}$:

$$\min\left\{x_1^2+x_2^2+x_3^2\right\}=\min\left\{\left(\frac{18}{53}\right)^2+\left(\frac{88}{265}-\frac{6}{5}\lambda\right)^2+\lambda^2\right\}.$$

Позначивши мінімізуючу функцію через $\varphi(\lambda)$ і використовуючи необхідну умову екстремуму $\varphi'(\lambda)=0$, знаходимо

$$\varphi(\lambda)=\frac{61}{25}\lambda^2-\frac{1056}{1325}\lambda+\frac{15844}{70225},$$

$$\varphi'(\lambda)=\frac{122}{25}\lambda-\frac{1056}{1325}=0\Rightarrow\lambda=\frac{528}{3233}.$$

Враховуючи (3.17), псевдорозв'язок системи дорівнює:

$$x=\begin{pmatrix}0{,}3396226415\\0{,}1360965048\\0{,}1633158058\end{pmatrix}.$$

Знайдемо псевдорозв'язок рівняння $Ax=b$, використовуючи теорію псевдообертання.

Система завжди має єдиний псевдорозв'язок, який визначається формулою $x^+=A^+b$, де A^+ можна знайти за наступною формулою:

$$A^+=\lim_{\varepsilon\to 0}A^*\left(AA^*+\varepsilon I_n\right)^{-1},$$

де I_n – одинична матриця. Запишемо необхідні матриці:

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\7&0&0\\1&5&6\end{pmatrix},\quad A^*=\begin{pmatrix}2&7&1\\0&0&5\\0&0&6\end{pmatrix},$$

$$AA^*+\varepsilon I_n=\begin{pmatrix}4&14&2\\14&49&7\\2&7&62\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\varepsilon&0&0\\0&\varepsilon&0\\0&0&\varepsilon\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+\varepsilon&14&2\\14&49+\varepsilon&7\\2&7&62+\varepsilon\end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю $\left(AA^*+\varepsilon I_n\right)^{-1}$. Для цього обчислимо визначник і відповідні алгебраїчні доповнення до елементів матриці. Маємо наступне:

$$\det\left(AA^*+\varepsilon I_n\right)=\begin{vmatrix}4+\varepsilon&14&2\\14&49+\varepsilon&7\\2&7&62+\varepsilon\end{vmatrix}=\varepsilon\left(\varepsilon^2+115\varepsilon+3233\right),$$

$$(AA^*+\varepsilon I_n)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\varepsilon^2+111\varepsilon+2989}{\varepsilon\left(\varepsilon^2+115\varepsilon+3233\right)}&-\frac{14(\varepsilon+61)}{\varepsilon\left(\varepsilon^2+115\varepsilon+3233\right)}&-\frac{2}{\varepsilon^2+115\varepsilon+3233}\\-\frac{14(\varepsilon+61)}{\varepsilon\left(\varepsilon^2+115\varepsilon+3233\right)}&\frac{\varepsilon^2+66\varepsilon+244}{\varepsilon\left(\varepsilon^2+115\varepsilon+3233\right)}&-\frac{7}{\varepsilon^2+115\varepsilon+3233}\\-\frac{2}{\varepsilon^2+115\varepsilon+3233}&-\frac{7}{\varepsilon^2+115\varepsilon+3233}&\frac{\varepsilon+53}{\varepsilon^2+115\varepsilon+3233}\end{pmatrix}.$$

Далі обчислимо маттрицю

$$A^*(AA^*+\varepsilon I_n)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{2(\varepsilon+61)}{\varepsilon^2+115\varepsilon+3233} & \frac{7(\varepsilon+61)}{\varepsilon^2+115\varepsilon+3233} & \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+115\varepsilon+3233} \\ -\frac{10}{\varepsilon^2+115\varepsilon+3233} & -\frac{35}{\varepsilon^2+115\varepsilon+3233} & \frac{5(\varepsilon+53)}{\varepsilon^2+115\varepsilon+3233} \\ -\frac{12}{\varepsilon^2+115\varepsilon+3233} & -\frac{42}{\varepsilon^2+115\varepsilon+3233} & \frac{6(\varepsilon+53)}{\varepsilon^2+115\varepsilon+3233} \end{pmatrix}$$

і перейдемо до границі:

$$A^+=\lim_{\varepsilon\to 0}A^*\left(AA^*+\varepsilon I_n\right)^{-1}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\begin{pmatrix} \frac{2(\varepsilon+61)}{\varepsilon^2+115\varepsilon+3233} & \frac{7(\varepsilon+61)}{\varepsilon^2+115\varepsilon+3233} & \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+115\varepsilon+3233} \\ -\frac{10}{\varepsilon^2+115\varepsilon+3233} & -\frac{35}{\varepsilon^2+115\varepsilon+3233} & \frac{5(\varepsilon+53)}{\varepsilon^2+115\varepsilon+3233} \\ -\frac{12}{\varepsilon^2+115\varepsilon+3233} & -\frac{42}{\varepsilon^2+115\varepsilon+3233} & \frac{6(\varepsilon+53)}{\varepsilon^2+115\varepsilon+3233} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{2}{53} & \frac{7}{53} & 0 \\ -\frac{10}{3233} & -\frac{35}{3233} & \frac{5}{61} \\ -\frac{12}{3233} & -\frac{42}{3233} & \frac{6}{61} \end{pmatrix}.$$

Тоді псевдорозв’язок задачі має вигляд:

$$x^+=\begin{pmatrix} \frac{2}{53} & \frac{7}{53} & 0 \\ -\frac{10}{3233} & -\frac{35}{3233} & \frac{5}{61} \\ -\frac{12}{3233} & -\frac{42}{3233} & \frac{6}{61} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{18}{53} \\ \frac{440}{3233} \\ \frac{528}{3233} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}3396226415 \\ 0{,}1360965048 \\ 0{,}1633158058 \end{pmatrix}.$$