8 ВИДИ РІВНЯНЬ ПЛОЩИНИ

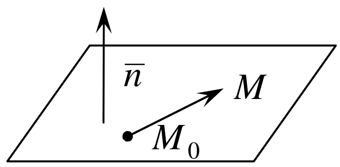

Рисунок 8.1 – Площина, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\overline{n}$

Розглянемо площину α, перпендикулярну деякому вектору $\overline{n}(A,B,C)$, та таку, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ (рис. 8.1). Нехай $M(x,y,z)$ – довільна точка площини α. Так як вектори $\overline{n}(A,B,C)$ та $\overline{M_0M}(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, отже

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \quad (8.1)$$

– ***рівняння площини за нормальним вектором та точкою***.

Розкриємо дужки у рівнянні (8.1) та прегрупуємо доданки:

$$Ax+By+Cz+(Ax_0+By_0+Cz_0)=0.$$

Введемо позначення $Ax_0+By_0+Cz_0=D$ та отримаємо ***загальне рінання площини***

$$Ax+By+Cz+D=0. \quad (8.2)$$

Розділимо загальне рівняння площини на довжину її вектора нормалі

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z+\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0. \quad (8.3)$$

Рівняння (8.3) називається ***нормальним рівнянням площини***.

У рівнянні (8.3) множники при x,y,z називаються напрямними косинусами площини (α,β,γ – кути між площиною та осями Ox,Oy,Oz відповідно)

$$cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},cos\beta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},cos\gamma=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

а модуль числа $p=\dfrac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ дорівнює ***відстані площини від початку координат.*** У цих позначеннях рівняння

$$xcos\alpha+ycos\beta+zcos\gamma+p=0 \quad (8.4)$$

називається ***рівнянням площини з напрямними косинусами***.

Розділимо загальне рівняння площини (8.2) на $-D$ та введемо позначення $-\dfrac{D}{A}=a,-\dfrac{D}{B}=b,-\dfrac{D}{C}=c$. Отримаємо рівняння

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \quad (8.5)$$

Очевидно, що точки з координатами $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$ задовольняють цьому рівнянню. Тому воно називається ***рівнянням площини у відрізках на осях*** (рис. 8.3).

Розглянемо площину α, що проходить через три точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$,

$M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ (рис. 8.2). Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка цієї площини. Так як вектори

$$\overline{M_1M}(x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$
$$\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$
$$\overline{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

компланарні, то їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (8.6)$$

Рівняння (8.6) називається ***рівняннмя площини за трьома точками*** або ***детермінантним рівнянням площини***.

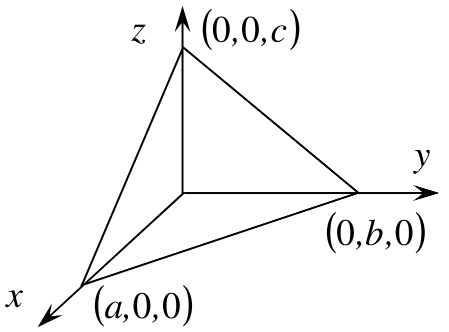

Рисунок 8.2 – Площина, що проходить через точки $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$

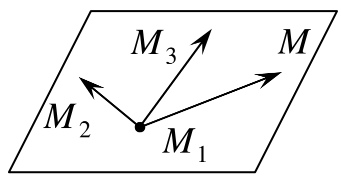

Рисунок 8.3 – Площина, що проходить через три точки M_1, M_2, M_3

Аналогічно, у випадках, коли площина паралельна вектору $\overline{q}(q_1, q_2, q_3)$ та проходить через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 8.4) або паралельна двом векторам (бівектору) $\overline{p}(p_1, p_2, p_3)$ та $\overline{q}(q_1, q_2, q_3)$ і проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (рис. 8.5), з умов компланарності векторів отримаємо рівняння (8.7) та (8.8) відповідно:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad (8.7)$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (8.8)$$

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ***до площини*** $Ax + By + Cz + D = 0$ можна обчислити за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (8.9)$$

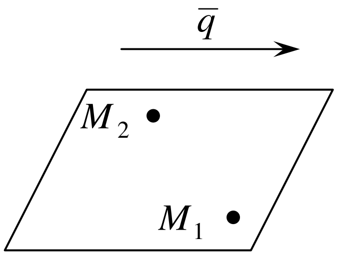

Рисунок 8.4 – Площина, що проходить через дві точки M_1, M_2 паралельно вектору $\overline{q}$

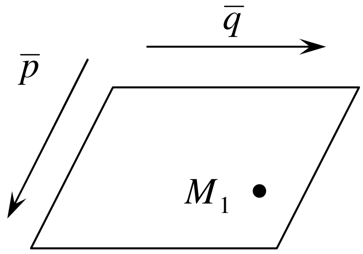

Рисунок 8.5 – Площина, що проходить через точку M_1 паралельно векторам $\overline{p}, \overline{q}$

Інакше рівняння площини, що паралельна двом векторам (бівектору) $\overline{p}(p_1, p_2, p_3)$ та $\overline{q}(q_1, q_2, q_3)$ і проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (рис. 8.5) можна представити у вигляді

$$\begin{cases} x = x_1 + p_1 t + q_1 s, \\ y = y_1 + p_2 t + q_2 s, \\ z = z_1 + p_3 t + q_3 s. \end{cases} \quad (8.10)$$

Тут $t, s \in R$ – параметри. Рівняння (8.10) називаються ***параметричними рівняннями площини.***

Нехай дано дві площини: $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ і $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$.

Таблиця 8.1 – Формули для обчислення кута між двома площинами, взаємного розташування двох площин у просторі

Назва формули (умови)	**Формула**
Величина двогранного кута θ між двома площинами	$cos\,\theta = \frac{\lvert A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 \rvert}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$
Умова перпендикулярності	$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$
Умова паралельності	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$
Умова співпадіння	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$

Жмутком площин називається множина площин, що проходять через пряму перетину основних площин $\alpha:\ A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ і $\beta:\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ (рис. 8.6). ***Рівнянням жмутка*** є рівняння:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+k(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,\ k\in R,$$

або

$$m(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+n(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,\ m,n\in R.$$

В'язкою площин називається множина площин, що проходять через точку перетину трьох основних площин: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ та $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$ (рис. 8.7). ***Рівнянням в'язки*** є рівняння:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+k(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)+$$
$$+l(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)=0,\ k,l\in R$$

або

$$m(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+n(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)+$$
$$+p(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)=0,\ m,n,p\in R.$$

В'язка площин, що проходять через точку (x_0,y_0,z_0) також може бути задана рівнянням:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,\ A,B,C\in R.$$

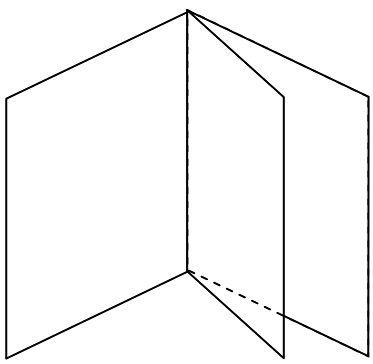

Рисунок 8.6 – Жмуток площин

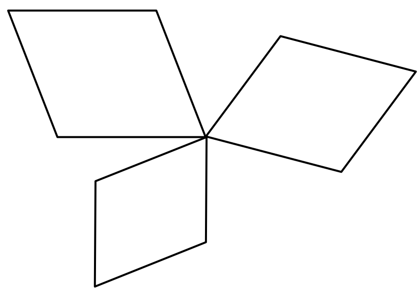

Рисунок 8.7 – В'язка площин