9 РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ У ПРОСТОРІ

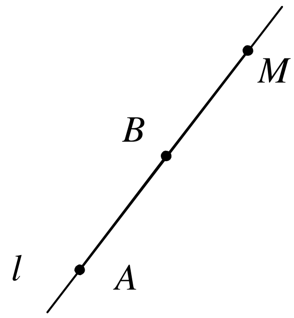

Рисунок 9.1 – Пряма l

Нехай у просторі дано пряму l, що проходить через точки $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 9.1). Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка цієї прямої. Тоді вектори $\overline{AM}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ та $\overline{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ колінеарні, отже, їх координати пропорційні, тобто

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{9.1}$$

– ***рівняння прямої, що проходить через дві точки***.

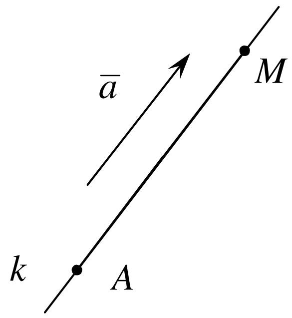

Рисунок 9.1 – Пряма l

Аналогічно, Нехай у просторі дано пряму k, що проходить через точку $A(x_1, y_1, z_1)$ паралельно вектору $\overline{a}(m, n, p)$. Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка цієї прямої. Тоді вектори $\overline{AM}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ та $\overline{a}(m, n, p)$ колінеарні, отже, їх координати пропорційні, тобто

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \tag{9.2}$$

– ***канонічне рівняння прямої*** (рвняння прямої, що проходить через точку паралельно заданому вектору). Вектор $\overline{a}$, паралельний прямій, називається ***напрямним вектором*** цієї прямої.

Розглянемо рівняння (9.2). Так як три дроби дорівнють один одному, то $\forall\ t \in R$

$$\frac{x - x_1}{m} = t,\ \frac{y - y_1}{n} = t,\ \frac{z - z_1}{p} = t.$$

Виразимо з цих рівнянь x, y, z. Отримаємо ***параметричні рівняння прямої*** у просторі:

$$\begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + nt, \\ z = z_1 + pt, \quad t \in R. \end{cases} \tag{9.3}$$

У випадку, коли пряма задається як перетин двох площин, рівняння прямої має вигляд

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

та називається ***неявним рівнянням прямої***. Для цієї прямої напрямний вектор можна знайти як векторний добуток нормальних векторів даних площин, тобто

$$m=\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix},\ n=\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix},\ p=\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}.$$

Формула відстані від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ***до прямої*** $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$:

$$d=\frac{\left|\overline{M_0M_1}\times\overline{a}\right|}{|\,\overline{a}\,|}.$$

Нехай задано дві прямі $l_1:\dfrac{x-x_1}{a_x}=\dfrac{y-y_1}{a_y}=\dfrac{z-z_1}{a_z}$ та $l_2:\dfrac{x-x_2}{b_x}=\dfrac{y-y_2}{b_y}=\dfrac{z-z_2}{b_z}$; $\overline{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\overline{b}(b_x, b_y, b_z)$ – їх напрямні вектори; точки $M_1\in l_1$, $M_2\in l_2$.

Таблиця 9.1 – Формули для обчислення відстані й кута між двома прямими, взаємного розташування двох прямих у просторі

Назва формули	**Формула**
Відстань ρ між двома прямими	$\rho=\dfrac{\left|\left(\overline{M_1M_2},\overline{a},\overline{b}\right)\right|}{\left|\,\overline{a}\times\overline{b}\,\right|}$
Кут θ між двома прямими в просторі	$cos\,\theta=\dfrac{\left|a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\right|}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$
Умова перпендикулярності прямих	$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$
Умова паралельності прямих	$\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$, $M_1\notin l_2$
Умова перетину прямих у просторі	$\begin{vmatrix}x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=0$

Нехай задано пряму її канонічним рівнянням $l:\dfrac{x-x_1}{a_x}=\dfrac{y-y_1}{a_y}=\dfrac{z-z_1}{a_z}$ та площину – загальним рівнянням $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$.

Таблиця 9.2 – Формули для обчислення кута між прямою і площиною в просторі, взаємного розташування прямої і площини в просторі

Назва формули	Формула
Кут θ між прямою і площиною в просторі	$sin\,\theta = \dfrac{\left\|A\cdot a_x + B\cdot a_y + C\cdot a_z\right\|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$
Умова перпендикулярності прямої і площини	$\dfrac{A}{a_x}=\dfrac{B}{a_y}=\dfrac{C}{a_z}$
Умова паралельності прямої і площини	$\begin{cases} A\cdot a_x + B\cdot a_y + C\cdot a_z = 0, \\ A\cdot x_1 + B\cdot y_1 + C\cdot z_1 \neq 0 \end{cases},$
Умова приналежності прямої площині	$\begin{cases} A\cdot a_x + B\cdot a_y + C\cdot a_z = 0, \\ A\cdot x_1 + B\cdot y_1 + C\cdot z_1 = 0 \end{cases},$

Тест для самоконтролю

1. Рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2; -3)$ і перпендикулярна до прямої $x-4y+7=0$, має вигляд

А. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{-4}$ **Б.** $\dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y+3}{1}$ **В.** $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{-4}$ **Г.** $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{-4}$

2. Рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-1; 4; -2)$ і перпендикулярна до площини $2x-y+3z-7=0$, має вигляд

А. $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$ **Б.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+4}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$

В. $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$ **Г.** $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$

3. Рівняння прямої, яка симетрична прямій $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}$ відносно точки $(3; -1)$, має вигляд

А. $\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-1}{1}$ **Б.** $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{1}$ **В.** $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+1}{1}$ **Г.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}$

4. Рівняння площини, симетричної площині $x-y+2z=1$ відносно початку координат, має вигляд

А. $x-y-2z=1$ **Б.** $x-y+2z=1$

В. $x-y+2z=-1$ **Г.** відмінне від наведених

5. Яка з наступних площин паралельна векторам $\overline{a}(-1; 0; 1)$ і $\overline{b}(0; -1; 2)$?

А. $x+3y+z-1=0$ **Б.** $x-2y+z-1=0$

В. $x+2y+z-1=0$ **Г.** $x-2y-z-1=0$

6. Як розміщені прямі *AB* та *CD*, якщо $A(1; 2; 3)$, $B(3; 2; 1)$, $C(-1; 2; -3)$, $D(-5; 2; -7)$?

А. перетинаються **Б.** паралельні **В.** збігаються **Г.** мимобіжні

7. Прямі, які задані рівняннями $\frac{x}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{0}$ та $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{0}$

А. паралельні **Б.** перетинаються **В.** мимобіжні **Г.** перпендикулярні

8. Прямі, які задані рівняннями $\frac{x}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{0}$ та $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-4}{1}$

А. перетинаються **Б.** паралельні **В.** мимобіжні **Г.** перпендикулярні

9. Встановіть взаємне розміщення площин $2x-y+3z-2=0$ і $x+y-z+2=0$.

А. паралельні **Б.** співпадають **В.** перетинаються **Г.** перпендикулярні

10. Встановіть взаємне розміщення площин $2x+3y-z+7=0$ і $4x+6y-2z+9=0$.

А. паралельні **Б.** співпадають **В.** перетинаються **Г.** перпендикулярні

11. Вкажіть усі значення параметра p, при яких прямі $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{p}=\frac{z+1}{2}$ і $\frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$ паралельні.

А. 4 **Б.** –4 **В.** 2 **Г.** –2

12. Вкажіть усі значення параметра p, при яких прямі $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{p}=\frac{z+1}{3}$ і $\frac{x+2}{-2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-1}{-6}$ перпендикулярні.

А. 4 **Б.** –4 **В.** 3 **Г.** –3

13. Вкажіть усі значення параметра a, при яких пряма $\frac{x}{1}=\frac{y}{a}=\frac{z-2}{-1}$ паралельна площині $3ax+ay+4z-4=0$.

А. 0 **Б.** –4, 1 **В.** –4 **Г.** 1

14. Вкажіть усі значення параметра a, при яких пряма $\frac{x-1}{a}=\frac{y+1}{a^2}=\frac{z}{3}$ перпендикулярна до площини $5a^2x-2ay-z+5=0$.

А. 0 **Б.** –1, 1 **В.** –1 **Г.** 1

15. Відстань між точками перетину прямої $\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1$ з осями координат дорівнює

А. 5 **Б.** 25 **В.** 12 **Г.** $\sqrt{5}$

16. Відстань між прямими $5(x-2)-12(y-3)=0$ і $5x-12y-13=0$ дорівнює

А. 1 **Б.** 3 **В.** 4 **Г.** $\sqrt{2}$

17. Кут між прямими $5(x-2)-12(y-3)=0$ і $5x-12y-13=0$ дорівнює

А. $90°$ **Б.** $0°$ **В.** $arctg\frac{5}{12}$ **Г.** $arctg\frac{12}{5}$

18. Відстань між прямою $\frac{x}{4}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+5}{0}$ та площиною $x+3y-7z+2=0$ дорівнює

А. $\sqrt{59}$ **Б.** $\sqrt{17}$ **В.** $\frac{\sqrt{17}}{2}$ **Г.** 0

19. Кут між прямою $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+2}{2}$ та площиною $2x-y+z+3=0$ дорівнює

А. 0° **Б.** $arcsin\frac{5}{3\sqrt{6}}$ **В.** 90° **Г.** $arccos\frac{5}{3\sqrt{6}}$

20. Відстань між прямою $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{7}=\frac{z-5}{-4}$ та площиною $3x-y+2z-5=0$ дорівнює

А. $\frac{22}{\sqrt{14}}$ **Б.** $\frac{27}{\sqrt{14}}$ **В.** $\frac{22}{\sqrt{42}}$ **Г.** 0

21. Відстань між площинами $(x-1)+2(y-2)-2(z+1)=0$ і $x-2y-2z-6=0$ дорівнює

А. $\frac{1}{3}$ **Б.** 0 **В.** 13 **Г.** 1

22. Кут між площинами $(x+1)+3(y-1)-(z+5)=0$ і $x+3y-z+3=0$ дорівнює

А. $\arccos\frac{1}{\sqrt{11}}$ **Б.** 90° **В.** 0° **Г.** 60°

23. Укажіть усі значення параметра p, при яких точки $A(-2; 3; p)$ і $B(-1; -3; 2)$ розміщені на однаковій відстані від площини xOz.

А. $p=2$ **Б.** $p=-2$ **В.** $p\in R$ **Г.** не існує

Відповіді: 1. В. 2. Г. 3. В. 4. В. 5. Г. 6. Б. 7. А. 8. В. 9. В. 10. А. 11. Б. 12. А. 13. Б. 14. А. 15. А. 16. Б. 17. Б. 18. Г. 19. Б. 20. А. 21. В. 22. В.

Приклади розв'язування задач

1. Трикутна піраміда задана вершинами $A_1(-1,0,1)$, $A_2(1,-1,1)$, $A_3(-1,-2,0)$, $A_4(5,2,10)$. Знайдіть: 1) рівняння грані $A_1A_2A_3$; 2) рівняння висоти піраміди, яка проходить через вершину A_4; 3) довжину цієї висоти; 4) кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$ в градусах.

Розв'язання:

1) Складемо детермінантне рівняння грані $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-1 \\ 1+1 & -1-0 & 1-1 \\ -1+1 & -2-0 & 0-1 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

Розкриємо визначник та зведемо подібні доданки в лівій частині рівняння. Отримаємо $x+2y-4z+5=0$ – рівняння грані $A_1A_2A_3$.

2) Висота піраміди, що виходить з вершин A_4, це перпендикуляр до грані $A_1A_2A_3$, тому її напрямний вектор колінеарний до нормального вектора грані $A_1A_2A_3$, тобто $\overline{a}_{A_4D}(1,2,-4)$. Складемо рівняння висоти A_4D за точкою та напрямним вектором:

$$A_4D: \ \frac{x-5}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-10}{-4}.$$

3) Довжину висоти A_4D знайдемо як відстань від вершини A_4 до грані $A_1A_2A_3$ за формулою відстані від точки до площини. Будемо мати:

$$d=\frac{\left|1\cdot 5+2\cdot 2-4\cdot 10+5\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-4)^2}}=\frac{26}{\sqrt{1+4+16}}=\frac{26}{\sqrt{21}}=\frac{26\sqrt{21}}{21}.$$

4) Знайдемо кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$ за формулою:

$$sin\angle(A_1A_4, A_1A_2A_3)=sin\angle(\overline{a}_{A_1A_4}, \overline{n}_{A_1A_2A_3})=\frac{\left|\overline{a}_{A_1A_4}\cdot\overline{n}_{A_1A_2A_3}\right|}{\left|\overline{a}_{A_1A_4}\right|\cdot\left|\overline{n}_{A_1A_2A_3}\right|}. \tag{4.1}$$

Для цього спочатку знайдемо координати напрямного вектора ребра A_1A_4: $\overline{a}_{A_1A_4}(6,2,9)$.

Підставимо відповідні значення у (4.1):

$$sin\angle(A_1A_4, A_1A_2A_3)=\frac{\left|6\cdot 1+2\cdot 2+9\cdot(-4)\right|}{\sqrt{6^2+2^2+9^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-4)^2}}=\frac{26}{11\sqrt{21}}\approx 0{,}515,$$

$$\angle(A_1A_4, A_1A_2A_3)\approx 31^\circ.$$

2. Точка $M(x;\,y;\,z)$ рухається прямолінійно і рівномірно з початкової точки $M_0(11;-21;20)$ в напрямку вектора $\overline{s}(-1;2;-2)$ зі швидкістю $v=12$. Визначте, за який час вона пройде відрізок своєї траєкторії, який міститься між площинами $2x+3y+5z-41=0$, $2x+3y+5z+31=0$.

Розв'язання:

Рівняння траєкторії руху має вигляд

$$\frac{x-11}{-1}=\frac{y+21}{2}=\frac{z-20}{-2} \ \text{або} \ \begin{cases} x=-t+11, \\ y=2t-21, \\ z=-2t+20. \end{cases}$$

Знайдемо координати точок перетину траєкторії з площинами. Для цього розв'яжемо системи (а та б):

$$\text{а)} \ \begin{cases} 2x+3y+5z-41=0, \\ x=-t+11, \\ y=2t-21, \\ z=-2t+20. \end{cases}$$

Підставляючи вирази для $x,\ y,\ z$ у перше рівняння, маємо:

$$-2t+22+6t-63-10t+100-41=0 \ \text{або} \ 6t=18,\ t=3.$$

Отже, $x_1=8$, $y_1=-15$, $z_1=14$.

$$б)\ \begin{cases} 2x+3y+5z+31=0, \\ x=-t+11, \\ y=2t-21, \\ z=-2t+20. \end{cases}$$

Аналогічно знаходимо $t=15$, $x_2=4$, $y_2=9$, $z_2=-10$. Отже, точками перетину паралельних площин траєкторією будуть $A(8;-15;14)$, $B(-4;9;-10)$. Довжина відрізка

$$AB=\sqrt{(8+4)^2+(-15-9)^2+(14+10)^2}=36.$$

Оскільки час $t=\dfrac{AB}{v}$, то $t=\dfrac{36}{12}=3$.

3. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $M(3;-1;-5)$ і перпендикулярна площинам $3x-2y+7=0$ і $5x-4y+3z+1=0$.

Розв'язання:

Оскільки шукана площина перпендикулярна даним площинам, то її нормальний вектор $\overline{n}$ перпендикулярний до нормальних векторів $\overline{n}_1(3;-2;2)$ і $\overline{n}_2(5;-4;3)$ площин, отже можна покласти:

$$\overline{n}=\overline{n}_1\times\overline{n}_2=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix}=2\overline{i}+\overline{j}-2\overline{k}.$$

Скористаємося рівнянням площини, що проходить через задану точку $M(3;-1;-5)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}(2,1,-2)$. Отримаємо

$$2(x-3)+(y+1)-2(z+5)=0 \text{ або } 2x+y-2z-15=0.$$

4. Складіть рівняння площини, що проходить через початок координат і перпендикулярна до площин $2x-y+3z-1=0$ та $x+2y+z=0$.

Розв'язання:

Нехай рівняння шуканої площини має вигляд $Ax+By+Cz=0$, тоді нормальні вектори площин $\overline{n}_1(2;-1;3)$ і $\overline{n}_2(1;2;1)$ за умовою задачі будуть перпендикулярні до вектора $\overline{n}(A,B,C)$, тобто справедливі рівності

$$\begin{cases} 2A-B+3C=0, \\ A+2B+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-7/5C, \\ B=1/5C. \end{cases}$$

Нехай $C=-5$. Тоді шукане рівняння площини матиме вигляд $7x-y-5z=0$.

5. З початку координат опустіть перпендикуляр на пряму

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

Розв'язання:

Оскільки напрямний вектор прямої $\overline{a}(2;3;1)$ буде нормальним до площини, що проходить через початок координат, то рівняння такої площини має вигляд

$$2x+3y+z=0.$$

Знайдемо точку перетину прямої та площини. Для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{1}, \\ 2x+3y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2t+2, \\ y=3t+1, \\ z=t+3, \\ 2x+3y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-5/7, \\ x=4/7, \\ y=6/7, \\ z=16/7. \end{cases}$$

Складемо рівняння шуканої прямої. Вона проходить через точки $O(0, 0, 0)$ і $M(4/7; 6/7; 16/7)$:

$$\frac{x}{4/7}=\frac{y}{6/7}=\frac{z}{16/7} \text{ або } \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{8}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Знайдіть довжину перпендикуляра, опущеного з точки $M_0(2; 3; -5)$ на площину $4x-2y+5z-12=0$.

2. Перевірте, які з точок $A(-1; 2; 3)$, $B(1; -2; 1)$, $C(0; 1; 2)$, $D(3; 0; 3)$ та $E(5; -7; 11)$ належать площині $2x-3y+z-9=0$.

3. Визначте координати нормального вектора площини, яка проходить через точки $A(2; -1; 1)$, $B(3; 1; 0)$ і $C(1; 5; -2)$.

4. Площина проходить через точки $A(1; 2; 1)$ та $B(0; 3; -1)$ паралельно до осі Oz. Напишіть її рівняння.

5. Чи проходить площина $4x-y+3z+1=0$ через точки: $A(-1;6;3)$; $B(3;-2;-5)$; $C(0;4;1)$; $D(2;0;5)$; $E(2;7;0)$; $F(0;1;0)$?

6. Укажіть особливості розміщення площин у просторі:

1) $3x-5z+1=0$; 2) $9y-2=0$;

3) $x+y-5=0$; 4) $2x+3y-7z=0$;

5) $8y-3z=0$.

7. Запишіть загальне рівняння площини, що проходить через точки $A(-1;6;3)$; $B(3;-2;-5)$; $C(0;4;3)$. Зведіть його до нормального виду. Запишіть рівняння площини у відрізках на осях.

8. Чи можна провести площину через наступні чотири точки: (3;1;0), (0;7;2), (–1;0;–5), (4;1;5)?

9. Обчисліть відстань від точки до площини:

а) $A(3;1;-1)$, $22x+4y-20z-45=0$;

б) $B(4;3;-2)$, $3x-y+5z+1=0$.

10. Знайдіть відстань між паралельними площинами: $3x-y+5z+1=0$ та $3x-y+5z+12=0$.

11. Обчисліть висоту піраміди h_S з вершинами $S(0;6;4)$, $A(3;5;3)$, $B(-2;11;-5)$, $C(1;-1;4)$.

12. Обчисліть кути між площинами:

а) $4x-5y+3z-1=0$ і $x-4y-z+9=0$;

б) $3x-y+2z+15=0$ і $5x+9y-3z-1=0$.

13. Складіть рівняння площини, що проходить:

а) через точку (–2;7;3) паралельно площині $x-4y+5z-1=0$;

б) через початок координат і перпендикулярної площинам $2x-y+5z+3=0$ та $x+3y-z-7=0$;

в) через точки E(0;0;1) і K(3;0;0) та утворює кут 60° з площиною Oxy.

14. Складіть рівняння площини, що проходить через точку P(–1; 2; 3) і відтинає від осей Ox та Oy відрізки $a=2$, $b=-1$.

15. Через точку P(1; 2; –1) проведіть площину, що відтинає від осей координат рівні відрізки.

16. Знайдіть відстань між площинами $2x+2y-z-15=0$ і $4x+4y-2z+11=0$.

17. Дано точки A(1; –1; 1), B(1; 3; 1), C(4; 3; 1), D(4; –1; 1). Складіть рівняння:

1) площини, що проходить через точки A, B, C;
2) прямої, яка проходить через точку A й паралельна прямій BC;
3) прямої, яка проходить через точки C і D.

18. Дано площини $\alpha: \ 2x-y+z+3=0$, $\beta: \ 3x-2y-z-1=0$, $\gamma: \ -4x+2y-2z+1=0$ і прямі $l_1: \ \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{-1}$, $l_2: \ \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

1) Знайдіть відстань від точки A(2; –1; 1) до площини α;
2) встановіть взаємне розташування площин α і β, α і γ, β і γ; прямої l_2 і площини β; прямих l_1 і l_2;
3) знайдіть відстань між площинами α і γ;
4) при яких значеннях параметра m площина α паралельна площині $2x-my+z=0$;
5) знайдіть кути між площинами α і β, прямими l_1 і l_2;
6) при яких значеннях параметра p площини γ і $px-2y+pz-1=0$ перпендикулярні.
7) знайдіть відстань між прямими l_1 і l_2.

19. Знайдіть координати центру та радіус шару, вписаного в тетраедр, обмежений координатними площинами та площиною $11x-10y-2z-57=0$.

20. Чи мають точку перетину дані площини:

а) $5x+8y-z-7=0$, $x+2y+3z-1=0$, $2x-3y+2z-9=0$;

б) $5x-y+3=0$, $2x-y-4z+5=0$, $3y+2z-1=0$, $3x+4y+5z-3=0$?

21. Через лінію перетину площин $4x-y+3z-1=0$ та $x+5y-z+2=0$ проведіть площину:

а) що проходить через початок координат;

б) що проходить через точку (1;1;1);

в) паралельну осі Oy;

г) перпендикулярну площині $2x-y+5z-3=0$.

22. У жмутку, що визначається площинами $3x+y-2z-6=0$ та $x-2y+5z-1=0$, знайдіть площини, перпендикулярні цим основним площинам.

23. У жмутку, що визначається площинами $2x+y-3z+2=0$ та $5x+5y-4z+3=0$, знайдіть дві перпендикулярні одна одній площини, одна з яких проходить через точку (4;–3;1).

24. У жмутку $\alpha(x+3y-5)+\beta(x-y-2z+4)=0$ знайдіть площину, що відтинає рівні відрізки від осей Ox та Oy.

25. Через лінію перетину площин $x+5y+z=0$ і $x-z+4=0$ проведіть площину, що утворює кут $\frac{\pi}{4}$ з площиною $x-4y-8z+12=0$.

26. Перевірте, що площини $3x-4y+5=0$, $x-2z+1=0$ і $2y-3z-1=0$ належать одному і тому ж жмутку площин.

27. При яких значеннях параметрів A та D площини $2x+y-z+3=0$, $x-3y+5=0$ і $Ax+y-2z+D=0$ належать одному і тому ж жмутку?

28. У в'язці, що визначається площинами $x+y-z+2=0$, $4x-3y+z-1=0$ та $2x+y-5=0$, знайдіть площину:

а) що проходить через вісь абсцис;

б) паралельну площині Oxz;

в) що проходить через початок координат і через точку (1;3;2).

29. Складіть параметричні та канонічне рівняння прямої $\begin{cases} 5x+y+z=0, \\ 2x+3y-2z+5=0. \end{cases}$

30. Доведіть, що прямі перетинаються та знайдіть координати їх точки перетину: $x=-3t,\quad y=2+3t,\quad z=1$ й $x=1+5t',\quad y=1+13t',\quad z=1+10t'$.

31. Знайдіть відстань між мимобіжними прямими $x=2-3t,\ y=-1+t,\ z=-2t$ та $x=1+5t',\quad y=3+4t',\quad z=4+2t'$.

32. Встановіть взаємне розміщення прямої та площини; у випадку перетину знайдіть їх спільну точку:

а) $x=2+4t,\quad y=-1+t,\quad z=2-t$ й $4x+y-z+13=0$;

б) $x=2-3t,\quad y=-1+t,\quad z=-2t$ й $x+y-z+3=0$;

в) $x=t,\quad y=-8-4t,\quad z=-3-3t$ й $x+y-z+5=0$;

г) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$ й $4x+3y-z+3=0$;

д) $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$ й $3x-y+2z-5=0$;

е) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{5}$ й $3x-3y+2z-5=0$;

ж) $\begin{cases} 2x-y+3z+4=0, \\ x-2y-2z+2=0 \end{cases}$ й $4x-5y-z+8=0$;

з) $\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0 \end{cases}$ й $x-2y+z-1=0$;

і) $\begin{cases} 3x+5y-7z+16=0, \\ 2x-y+z-6=0 \end{cases}$ й $5x-z-4=0$.

33. Знайдіть кут між прямою $\begin{cases} x+4y-2z+7=0, \\ 3x+7y-2z=0. \end{cases}$ та площиною $3x+y-z+1=0$.

34. Знайдіть точку, симетричну точці $P(6;-5;5)$ відносно площини $2x-3y+z-4=0$.

35. Знайдіть проекцію прямої $x=1+2t,\quad y=3+t,\quad z=2+t$ на площину $3x-2y-z+15=0$.

36. Переконайтеся, що прямі $x=8+5t,\quad y=1+2t,\quad z=6+4t$ та $x=11+3t',\quad y=2+t',\quad z=4-2t'$ перетинаються і знайдіть рівняння площини, якій вони належать.

37. Напишіть рівняння площини, що проходить через точку $A(4;-1;3)$, паралельно прямим $x=t,\quad y=2t,\quad z=-3t$ та $x=1+5t',\quad y=3+4t',\quad z=4+2t'$.

38. Напишіть рівняння площини, що проходить через пряму $x=-5+4t,\quad y=2+7t,\quad z=1+2t$ паралельно до прямої $x=t',\quad y=1-2t',\quad z=-3t'$.

39. Напишіть рівняння площини, паралельної площині $x+y+z-2=0$ та такої, що містить пряму $x=2t,\quad y=5-t,\quad z=-1-t$.

40. Чи можна через пряму $x=1-t,\quad y=-3+t,\quad z=5-4t$ провести площину, паралельну площині $2x+3y-4z+2=0$?

41. Через точку $A(1;0;7)$ паралельно площині $6x-2y+4z-11=0$ проведіть пряму так, щоб вона перетнула пряму $x=5+4t,\quad y=5+2t,\quad z=1+t$.

42. На прямій $x=2t,\quad y=4t,\quad z=3+5t$ знайдіть точку, рівновіддалену від точок $A(3;1;-2)$ та $B(5;3;-2)$.

43. Знайдіть точку, симетричну точці $P(-3;1;-1)$ відносно прямої $\begin{cases} 4x-3y-13=0, \\ y-2z+5=0. \end{cases}$

44. Напишіть рівняння прямої, що проходить через точку перетину площини $x+y+z-1=0$ з прямою $x=t,\quad y=1,\quad z=-1$, що належить цій площині та перпендикулярна даній прямій.

45. Напишіть рівняння спільного перпендикуляру до прямих $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{2}$ й $x=-1+3t,\quad y=2+2t,\quad z=1$.