функционала $F_1[y]$ можно рассмотреть функционал

$$\Phi[y]=\frac{p(a)}{\alpha_1}[2Ay(a)-\alpha y^2(a)]-\frac{p(b)}{\beta_1}[2By(b)-\beta y^2(b)]+$$
$$+\int_a^b[p(x)y'^2-q(x)y^2+2f(x)y]\,dx. \qquad (26)$$

Таким образом, краевая задача (6), (2) с неоднородными краевыми условиями в предположении, что имеют место неравенства (12) и (14), эквивалентна вариационной задаче для функционала (26) в классе функций K_1, удовлетворяющих заданным краевым условиям.

Замечание. 1° Если $\alpha_1=0$ и $\beta_1\neq 0$, то $y(a)=z(a)=A/\alpha$. Из формулы (24) вытекает, что за $\Phi[y]$ можно принять функционал

$$\Phi[y]=-\frac{p(b)}{\beta_1}[2By(b)-\beta y^2(b)]+$$
$$+\int_a^b[p(x)y'^2-q(x)y^2+2f(x)y]\,dx.$$

2° Аналогично доказывается, что если $\alpha_1=0$ и $\beta_1=0$, то

$$\Phi[y]=\int_a^b[p(x)y'^2-q(x)y^2+2f(x)y]\,dx.$$

§ 5. Краевые задачи для уравнений Пуассона и Лапласа

Пусть дано уравнение Пуассона

$$-\Delta u=f(x,\ y), \qquad (1)$$

где

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{и} \quad f(x,\ y)\in C(G).$$

Требуется найти решение уравнения (1), непрерывное в замкнутой области $\bar G=G+\Gamma$ и удовлетворяющее на границе Γ этой области краевому условию

$$u\,|_\Gamma=\varphi(P), \qquad (2)$$

где $P=(x,\ y)$ и $\varphi(P)$ — заданная непрерывная функция. Предположим вначале, что $\varphi(P)\equiv 0$, т. е.

$$u\,|_\Gamma=0, \qquad (3)$$

и будем решать однородную краевую задачу (1), (3). Покажем, что в классе функций $K=\{u(x)\}$, непрерывных в $\bar G$ вместе со своими первыми и вторыми производными и обращающихся на контуре Γ в нуль, оператор $Lu=-\Delta u$ симметричен и положителен.

Пусть $u \in K$ и $v \in K$. Составим выражение

$$(Lu,\ v)-(Lv,\ u)=$$
$$=\iint_G \left[-v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right]dx\,dy=$$
$$=\iint_G \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dx\,dy.$$

Применяя известную формулу Грина

$$\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy=\iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

и используя нулевые граничные условия $u|_\Gamma=0$, $v|_\Gamma=0$, получим

$$(Lu,\ v)-(Lv,\ u)=$$
$$=\int_\Gamma\left[-\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx+\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy\right]=0; \qquad (4)$$

следовательно, $(Lu,\ v)=(Lv,\ u)$, и, значит, оператор L симметричен.

Далее установим положительность оператора L. Имеем

$$(Lu,\ u)=-\iint_G u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dx\,dy=$$
$$=-\iint_G\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]dx\,dy+\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy.$$

Применяя к первому интегралу формулу Грина, в силу краевых условий для функции u получим

$$(Lu,\ u)=-\int_\Gamma\left(-u\frac{\partial u}{\partial y}\,dx+u\frac{\partial u}{\partial x}\,dy\right)+$$
$$+\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=$$
$$=\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy, \qquad (5)$$

т. е.

$$(Lu,\ u)=(-\Delta u,\ u)\geqslant 0.$$

Если $(Lu,\ u)=0$, то из формулы (5) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Отсюда $u(x,\ y)=c$, и на основании краевого условия (3) имеем

$$u(x,\ y)\equiv 0.$$

Следовательно, оператор L положителен.

Таким образом, для краевой задачи (1) с однородными краевыми условиями (3) выполнены условия теоремы 2 из § 3. Следовательно, эта задача эквивалентна вариационной задаче для функционала

$$F[u]=(Lu,\ u)-2(u,\ f) \tag{6}$$

в классе функций u, принадлежащих множеству K. В силу формулы (5) получаем

$$F[u]=\iint\limits_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2fu\right]dx\,dy. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь краевую задачу (1) с неоднородными краевыми условиями (2), и пусть $K_1=\{u(x,\ y)\}$ — класс функций $u\in C^{(2)}(G+\Gamma)$, удовлетворяющих условиям (2).

Следуя идее предыдущего параграфа, построим функцию $z=z(x,\ y)\in C^{(2)}(G+\Gamma)$, для которой выполнены краевые условия (2).

Введем функцию

$$v(x,\ y)=u(x,\ y)-z(x,\ y), \tag{8}$$

где $u(x,\ y)$ — решение нашей неоднородной краевой задачи. Тогда функция $v=v(x,\ y)$ удовлетворяет на контуре Γ однородному краевому условию

$$v|_\Gamma=0 \tag{9}$$

и является решением уравнения

$$Lv=Lu-Lz=f(P)-Lz, \tag{10}$$

где $Lz=-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$ — известная функция. Функция $v=v(x,\ y)$, являясь решением однородной краевой задачи (10)—(9), на основании формулы (6) дает наименьшее значение функционалу

$$F[v]=(Lv,\ v)-2(v,\ f(P)-Lz). \tag{11}$$

Возвращаясь в последнем равенстве к функции u (см. (8)) и используя свойства скалярного произведения и линейного оператора L, получим

$$\begin{aligned}F[u-z]\equiv F_1[u]&=(L(u-z),\ u-z)-2(u-z,\ f(P)-Lz)=\\&=(Lu,\ u)-2(u,\ f)+(u,\ Lz)-(z,\ Lu)+2(z,\ f)-(Lz,\ z).\end{aligned} \tag{12}$$

Так как последние два члена формулы (12) не зависят от искомой функции $u=u(x,\ y)$, то функция $\bar{u}=\bar{u}(x,\ y)$, дающая наименьшее значение функционалу (12), будет минимизировать функционал

$$F_2[u]=(Lu,\ u)-2(u,\ f)+[(Lz,\ u)-(Lu,\ z)]. \tag{13}$$

Покажем, что функционал (13) можно заменить функционалом, не содержащим функцию z. Используя преобразование, примененное в формуле (4), имеем

$$(Lz,\ u)-(Lu,\ z)=\iint\limits_G (z\,\Delta u-u\,\Delta z)\,dz=$$
$$=\int\limits_\Gamma\left[-\left(z\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx+\left(z\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial z}{\partial x}\right)dy\right]=\int\limits_\Gamma\left(z\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial z}{\partial n}\right)ds,$$

где n — внешняя нормаль к Γ и

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dx}{ds},\qquad \frac{\partial z}{\partial n}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dy}{ds}-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dx}{ds}.$$

Отсюда, так как $z|_\Gamma=u|_\Gamma=\varphi(x,\ y)$, получаем

$$(Lz,\ u)-(Lu,\ z)=\int\limits_\Gamma \varphi(x,\ y)\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\frac{\partial z}{\partial n}\right)ds. \tag{14}$$

С другой стороны, на основании формулы (5) находим

$$(Lu,\ u)=-\int\limits_\Gamma u\frac{\partial u}{\partial n}ds+\iint\limits_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=$$
$$=-\int\limits_\Gamma \varphi(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial n}ds+\iint\limits_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy. \tag{15}$$

Подставляя (14) и (15) в формулу (13), будем иметь

$$F_2[u]=\iint\limits_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2fu\right]dx\,dy-\int\limits_\Gamma \varphi(x,\ y)\frac{\partial z}{\partial n}ds. \tag{16}$$

Так как последнее слагаемое в формуле (16) не зависит от функции u, то краевая задача (1)—(2) эквивалентна вариационной задаче для функционала

$$\Phi[u]=\iint\limits_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2fu\right]dx\,dy \tag{17}$$

в классе функций K_1.

В частном случае, если $f=f(x,\ y)\equiv 0$, то получаем уравнение Лапласа $\Delta u=0$, причем краевая задача (1)—(2) есть известная *задача Дирихле*. Решением этой задачи, как вытекает из формулы (17), является функция u из класса K_1, минимизирующая *интеграл Дирихле*

$$\Phi[u]=\iint\limits_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy.$$

§ 9. Метод Ритца для задачи Дирихле

Будем искать решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0 \text{ при } (x, y) \in G \tag{1}$$

и

$$u|_{\Gamma} = f(x, y), \tag{2}$$

где Γ — простой замкнутый контур, ограничивающий конечную область G, а функция $f(x, y)$ непрерывна на Γ. Согласно § 6 эта краевая задача эквивалентна вариационной задаче для функционала

$$F[y] = \iint\limits_G \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy \tag{3}$$

в классе функций, имеющих непрерывные частные производные до второго порядка включительно в замкнутой области $G+\Gamma$ и удовлетворяющих на границе Γ краевому условию (2). Построим конечную систему линейно независимых функций (координатные функции)

$$u_0(x, y),\ u_1(x, y),\ \ldots,\ u_n(x, y) \in C^{(2)}(G+\Gamma)$$

таких, что

$$u_0(x, y)|_{\Gamma} = f(x, y),\quad u_i(x, y)|_{\Gamma} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда линейная комбинация

$$\varphi(x, y) = u_0(x, y) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x, y) \tag{4}$$

принадлежит классу допустимых функций при любых постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Формулу (4) можно записать короче:

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=0}^{n} c_i u_i(x, y), \tag{4'}$$

где $c_0 = 1$. Подставляя выражение (4′) в функционал (3), получим

$$F[\varphi] = \iint\limits_G \left[\left(\sum_{i=0}^{n} c_i \frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{n} c_i \frac{\partial u_i}{\partial y}\right)^2 \right] dx\,dy. \tag{5}$$

Подберем коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$ так, чтобы функция $F[\varphi]$ имела минимум. Для этого необходимо выполнение условий

$$\frac{\partial}{\partial c_j} F[\varphi] = 2\iint\limits_G \left[\left(\sum_{i=0}^{n} c_i \frac{\partial u_i}{\partial x}\right)\frac{\partial u_j}{\partial x} + \left(\sum_{i=0}^{n} c_i \frac{\partial u_i}{\partial y}\right)\frac{\partial u_j}{\partial y}\right] dx\,dy = 0 \quad (6)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

или

$$\left.\begin{aligned} &[u_0, u_1] + c_1[u_1, u_1] + \ldots + c_n[u_n, u_1] = 0, \\ &[u_0, u_2] + c_1[u_1, u_2] + \ldots + c_n[u_n, u_2] = 0, \\ &[u_0, u_n] + c_1[u_1, u_n] + \ldots + c_n[u_n, u_n] = 0, \end{aligned}\right\} \quad (6')$$

где

$$[u_i, u_j] = \iint\limits_G \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial u_j}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

причем

$$[u_i, u_j] = [u_j, u_i]. \quad (7)$$

Из линейной системы (6′) определяются коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Функция $\varphi(x, y)$ с коэффициентами, определенными из системы (6′), представляет собой приближенное решение задачи Дирихле. Точность приближения зависит от выбора координатных функций $u_k(x, y)$ и от числа этих функций [3].

Для ознакомления с применением метода Ритца к более общим краевым задачам для уравнений с частными производными следует обратиться к более подробным руководствам [1], [3].

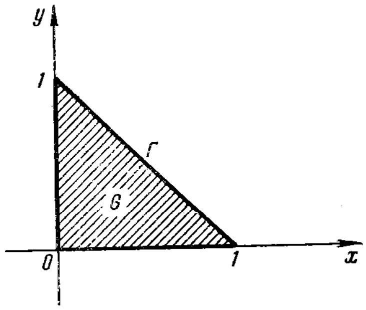

Рис. 82.

Пример 1. Найти функцию $u = u(x, y)$, гармоническую в области G: $x > 0$, $y > 0$, $x + y < 1$ и удовлетворяющую на границе Γ: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ (рис. 82) условию

$$u|_\Gamma = x^2 + y^2. \quad (8)$$

Решение. Выберем следующую систему координатных функций:

$$u_0(x, y) = x^2 + y^2, \quad u_1(x, y) = xy(1 - x - y),$$
$$u_2(x, y) = x^2y(1 - x - y), \quad u_3(x, y) = xy^2(1 - x - y), \ldots$$

и составим линейную комбинацию

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + c_1xy(1 - x - y) + c_2x^2y(1 - x - y) + c_3xy^2(1 - x - y). \quad (9)$$

Легко проверить, что функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет краевому условию (8) при любых значениях постоянных c_1, c_2, c_3.

Для составления системы (6′) подсчитываем коэффициенты при неизвестных c_1, c_2, c_3 и свободные члены.

$$[u_0, u_1] = [u_1, u_0] = \iint\limits_G [2x(y-2xy-y^2)+2y(x-x^2-2xy)]\,dx\,dy,$$

$$[u_0, u_2] = [u_2, u_0] = \iint\limits_G [2x(2xy-3x^2y-2xy^2)+2y(x^2-x^3-2x^2y)]\,dx\,dy,$$

$$[u_0, u_3] = [u_3, u_0] = \iint\limits_G [2x(y^2-2xy^2-y^3)+2y(2xy-2x^2y-3xy^2)]\,dx\,dy,$$

$$[u_1, u_1] = \iint\limits_G [(y-2xy-y^2)^2+(x-x^2-2xy)^2]\,dx\,dy,$$

$$[u_1, u_2] = [u_2, u_1] = \iint\limits_G [(y-2xy-y^2)(2xy-3x^2y-2xy^2)+ \\ +(x-x^2-2xy)(x^2-x^3-2x^2y)]\,dx\,dy,$$

$$[u_1, u_3] = [u_3, u_1] = \iint\limits_G [(y-2xy-y^2)(y^2-2xy^2-y^3)+ \\ +(x-x^2-2xy)(2xy-2x^2y-3xy^2)]\,dx\,dy,$$

$$[u_2, u_2] = \iint\limits_G (2xy-3x^2y-2xy^2)^2+(x^2-x^3-2x^2y)^2]dx\,dy,$$

$$[u_2, u_3] = [u_3, u_2] = \iint\limits_G [(2xy-3x^2y-2xy^2)(y^2-2xy^2-y^3)+ \\ +(x^2-x^3-2x^2y)(2xy-2x^2y-3xy^2)]\,dx\,dy,$$

$$[u_3, u_3] = \iint\limits_G [(y^2-2xy^2-y^3)^2+(2xy-2x^2y-3xy^2)^2]\,dx\,dy.$$

Результаты вычислений приведены в таблице 74.

Таблица 74

Значения коэффициентов при неизвестных

i	$[u_0, u_j]$	$[u_1, u_j]$	$[u_2, u_j]$	$[u_3, u_j]$
1	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{252}$
2	$-\frac{1}{90}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{3}{1120}$	$\frac{1}{70}$
3	$-\frac{1}{90}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{3}{1120}$

Отсюда линейная система для определения коэффициентов запишется в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{90}c_1+\frac{1}{252}c_2+\frac{1}{252}c_3&=\frac{1}{30},\\ \frac{1}{252}c_1+\frac{3}{1120}c_2+\frac{1}{70}c_3&=\frac{1}{90},\\ \frac{1}{252}c_1+\frac{1}{70}c_2+\frac{3}{1120}c_3&=\frac{1}{90}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Решив систему (10), находим

$$c_1=\frac{3031}{997}\approx 3{,}0401; \qquad c_2=c_3=-\frac{56}{997}=-0{,}0562.$$

Подставляя найденные значения величин c_1, c_2, c_3 в формулу (9), получаем приближенное решение нашей задачи:

$$\varphi(x,\ y)=x^2+y^2+xy(1-x-y)\,[3{,}0401-0{,}0562\,(x+y)].$$

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ VI

[1] Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953, гл. III и IV.

[2] Березин И. А. и Жидков Н. П., Методы вычислений, т. 2, Физматгиз, 1959, гл. X.

[3] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, 1957, гл. III.