Запорізький національний університет
Міністерства освіти і науки України

Методичні матеріали
для лабораторних занять

за курсом

«ТЕОРІЯ КООПЕРАТИВНИХ ІГОР»

для здобувачів вищої освіти магістра
спеціальності 122 Комп’ютерні науки
освітньо-професійної програми «Комп’ютерні науки»

Запоріжжя
2019

План

1.1 Вступ

Кооперативною грою називають гру, де кількість гравців становить більш двох суб'єктів та існує можливість створювання коаліцій між ними [3].

В задачах теорії кооперативних ігор виникає питання про оптимальний розподіл виграшу між гравцями. Тобто, в кооперативних іграх підкреслюється можливість підписання зобов'язуючих спільних угод поведінки. У таких задачах стоїть питання про те які колективні розподіли справедливі або стійкі для кожного з гравців і як цей процес розподілу здійснити раціонально [5].

У разі наявності змови в іграх багатьох осіб велике значення має подільність (трансферабельність) або неподільність (нетрансферабельність) виграшів. У першому випадку гравці в стані порівнювати свої виграші, мають можливість ділити загальний дохід і передавати, якщо це необхідно, частину свого виграшу іншим гравцям, тобто виробляти побічні платежі. Кооперативні ігри з подільними виграшами називаються класичними кооперативними іграми або кооперативними іграми з трансферабельними виграшами. Ми будемо розглядати ігри з трансферабельною корисністю.

Розглянемо кооперативну гру в характеристичній формі представлення:

$$\Gamma = \{N, V_i\}, \qquad i \in N,$$

де $N = \{1, \dots, n\}$ - множина гравців;

V_i – функція виграшу і-го гравця.

1.2 Кооперативна гра з побічними платіжами

Розглянемо кооперативну гру з непротилежними інтересами, в якій виграші гравців трансферабельні, тобто стратегії обираються гравцями спільно так, щоб максимізувати спільний дохід. Ціль даного класу гри полягає в тому, як розділити спільний дохід між гравцями.

Кооперативну гру з побічними платіжами можна представити як відображення [18, 19]:

$$V:2^N \to \mathbf{R} \qquad (\text{або } V \in \mathbf{R}^{2^N}).$$

Характеристичною функцією (функцією виграшу) кооперативної гри з транферабельними виграшами називається функція V, яка визначена на

множині , якій ставлять у відповідність будь-якої коаліції $S \in 2^N$ її найбільший одержуваний виграш в даній грі. Тобто будь-яка коаліція $S \subset N$ (або $S < N$) та гравці з коаліції S діють спільно; стратегіями цієї коаліції є усі можливі стратегії гравців, які до неї входять.

Рішенням кооперативної гри $V \in \mathbf{R}^{2^N}$ є вектор

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^N,$$

який відповідає обов'язковій умові

$$V(N) \geq x_1, \dots, x_n.$$

1.3 С-ядро кооперативної гри

Одним із рішень кооперативних ігор являється С-ядро, яке представляє собою множину недомінуючих розподілів. Оскільки будь-який розподіл із С-ядра не домінує, то ні у кого з гравців не буде заперечень проти реалізації даного методу [14].

Теорема (умова існування С-ядра). Для того, щоб множина розподілів $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^N$, належала С-ядру, необхідно та достатньо, щоб для будь-якої коаліції $S \in 2^N$ виконувалась нерівність:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq V(S).$$

Слідство. С-ядро будь-якої кооперативної гри є замкнутим опуклим багатогранником. Із-за жорсткості умови, яке визначає С-ядро, воно часто буває порожнім.

Слідство. Кооперативна гра з трьома гравцями має не порожнє С-ядро тоді й тільки тоді, коли виконується умова:

$$\begin{cases} V(x) + V(y) + V(z) \leq V(x, y, z), \\ V(x) + V(y, z) \leq V(x, y, z), \\ V(y) + V(x, z) \leq V(x, y, z), \\ V(z) + V(x, y) \leq V(x, y, z). \end{cases}$$

1.4 Метод вектору Шеплі

Другим методом розв’язування кооперативної гри являється вектор Шеплі. Вектор Шеплі представляє собою розподіл, у якому виграш кожного гравця дорівнює його середньому вкладу у виграш тотальної коаліції при відповідному механізмі її формування. Тобто, вектор Шеплі – це математичне очікування вкладу кожного гравця, якщо велика коаліція формується в довільному порядку [4, 12].

Вектор Шеплі розподіляє витрати / прибутки, які основані на маргінальних вкладах, тобто на обслуговування гравця гри, при умові, що всі інші гравці вже обслуговані. Отже, доля виграшу гравця обчислюється як середні маргінальні витрати / прибутки, які гравець додає до кожної коаліції інших гравців.

Теорема. Вектор Шеплі завжди існує та завжди єдиний.

Для кооперативної гри вектор Шеплі Sh розподіляє виграш $V(N)$ максимальної коаліції за наступною формулою:

$$Sh_i(V) = \sum_{i \in S} p_S * \big(V(S \cup \{i\}) - V(S)\big),$$

$$p_S = (nC_{n-1}^{s})^{-1},$$

де s – розмір коаліції S,

$V(S \cup \{i\}) - V(S)$ – середній виграш гравця i по коаліціям $S \subset N \backslash i$.

Вектор Шеплі є розподілом, тоді він обчислюється за формулою:

$$\sum_{i=1}^{n} Sh_i(V) = V(N).$$

1.5 Супермодулярна кооперативна гра

Супермодулярні кооперативні ігри представляють собою важливий клас ігор, в яких С-ядро не порожнє та містить вектор Шеплі. Більш того, вектор розташован у центрі ядра супермодулярної гри [20].

Кооперативна гра $V \in \mathbb{R}^{2^N}$ називається супермодулярною, якщо вона задовольняє одній з двох еквівалентних властивостей:

а) для будь-якого гравця $i \in N$, а також для будь-якої пари вкладених одну в одну коаліцій $T \subset S \subset N$, $i \notin S$ [4, 11, 18]:

$$V(S \cup i) - V(S) \geq V(T \cup i) - V(T).$$

б) для будь-яких коаліцій $S, T \subset N$, які можуть перетинатися:

$$V(S \cup T) + V(S \cap T) \geq V(S) + V(T).$$

Теорема. Нехай гра $V \in \mathbb{R}^{2^N}$ є супермодулярною кооперативною грою, тоді для будь-якого впорядкування гравців $\delta \in S_n$, розподіл Шеплі для будь-якого впорядкування δ належить С-ядру гри. Більш того, ці розподіли породжують ядро, тобто С-ядро гри являється опуклою оболонкою $n!$ цих розподілів.

Теорема. С-ядро кооперативної супермодулярної гри є не порожнім.

Теорема. Якщо гра є супермодулярною, тоді вектор Шеплі завжди лежить у С-ядрі.

Вектор Шеплі для даного класу задач розраховується за формулою [20]:

$$Sh = \left(\frac{V(1)}{n}; Sh_1 + \frac{V(2) - V(1)}{n-1}; Sh_2 + \frac{V(3) - V(2)}{n-2}; Sh_3 + \frac{V(4) - V(3)}{n-3}; \ldots\right).$$

1.6 Найпростіша характеристична функція

$$Г_S = \{N, V_S(T)\}, S \neq \emptyset.$$

Кооперативна гра називається найпростішою з носієм S, якщо виграші коаліцій, які містять коаліцію S, дорівнюють одиниці, а виграші всіх інших коаліцій дорівнюють нулю [11].

В найпростішій грі значення характеристичної функції обчислюються за формулою:

$$V_S(T) = \begin{cases} 1, \text{при } S \subset T, \\ 0, \text{при } S \not\subset T. \end{cases}$$

Визначимо вектор Шеплі

$$Sh(V) = (Sh_1(V), Sh_2(V), \dots, Sh_n(V))$$

як лінійну функцію з простору R^N у простір R^n, яку ставлять у відповідність кожній найпростішій функції $V_S(T)$ центр ваги її ядра, тобто n-мірний вектор, ненульові компоненти якого дорівнюють , та ці компоненти відповідають елементам множини S.

Якщо V – найпростіша, тоді:

$$V(T) - V\left(\frac{T}{\{i\}}\right) = \begin{cases} 1, \text{якщо коаліція } T \text{ виграє,} \\ 0, \text{якщо коаліція } T \text{ виграє; а } T/_{\{i\}} \text{ програє.} \end{cases}$$

Отже, вектор Шеплі для найпростішої характеристичної функції обчислюється за наступною формулою, де додавання по *T* розповсюджується на всі такі коаліції *T*, які виграють, що коаліція $\frac{T}{\{i\}}$ програє [12]:

$$Sh_i(V) = \sum_T \gamma_i(T) = \sum_T \frac{(t-1)!\,(n-t)!}{n!},$$

$$Sh = \sum_{i \in N} Sh_i(V),$$

де $\gamma_i(T)$ – ймовірність того, що *i*-й гравець вступить до коаліції $\frac{T}{\{i\}}$;

$t = |T|$ – розмір коаліції T ;

$Sh_i(V)$ – середній виграш *i*-го гравця.

2 Приклади розв'язання задач

<u>Задача 1</u> Дано кооперативну гру з трьома гравцями A, B, C. Необхідно знайти оптимальну множину розподілів виграшу між ними при умові, якщо вони об'єднаються в одну велику коаліцію, то отримують спільний виграш 180, тобто виконується умова:

$$V(A,B,C) = 180.$$

Необхідно визначити:

а) перевірити виконання умови існування С-ядра гри;

б) обчислити С-ядро графічним способом;

в) обчислити вектор Шеплі;

г) перевірити чи належить вектор Шеплі до С-ядра;

при відповідних значеннях характеристичних функцій в табл. 2.1.

Таблиця 2.1 – Значення характеристичних функцій

Коаліції	Характеристичні функції
V(A)	60
V(B)	30
V(C)	12
V(A,B)	108
V(A,C)	90
V(B,C)	60

На першому етапі розв'язання задачі, перевіримо виконання умови існування С-ядра, для цього необхідно скласти наступну систему нерівностей:

$$\begin{cases} V(A)+V(B)+V(C)\le V(A,B,C), \\ V(A)+V(B,C)\le V(A,B,C), \\ V(B)+V(A,C)\le V(A,B,C), \\ V(C)+V(A,B)\le V(A,B,C), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 60+30+12\le 180, \\ 60+60\le 180, \\ 30+90\le 180, \\ 12+108\le 180, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 102\le 180, \\ 120\le 180, \\ 120\le 180, \\ 120\le 180. \end{cases}$$

Умова існування С-ядра виконується, отже об'єднання гравців з точки зору зростання виграшу доцільно, а також розв'язання гри необхідно шукати серед множини недомінуючих розподілів.

На другому етапі складемо наступну систему, використовуючи вхідні дані задачі:

$$\begin{cases} V(A)\ge 60, \\ V(B)\ge 30, \\ V(C)\ge 12, \\ V(A,B)\ge 108, \\ V(A,C)\ge 90, \\ V(B,C)\ge 60. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему представлену вище, використовуючи початкову умову задачі $V(A,B,C)=180$, маємо:

$$\begin{cases} V(A)\ge 60 \\ V(B)\ge 30 \\ V(C)\ge 12 \\ V(A,B)\ge 108 \Rightarrow V(C)\le 180-108=72 \\ V(A,C)\ge 90 \Rightarrow V(B)\le 180-90=90 \\ V(B,C)\ge 60 \Rightarrow V(A)\le 180-60=120 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 120\ge V(A)\ge 60 \\ 90\ge V(B)\ge 30 \\ 72\ge V(C)\ge 12 \end{cases}.$$

Розв'язуючи систему нерівностей графічним способом, отримаємо рис. 2.1.

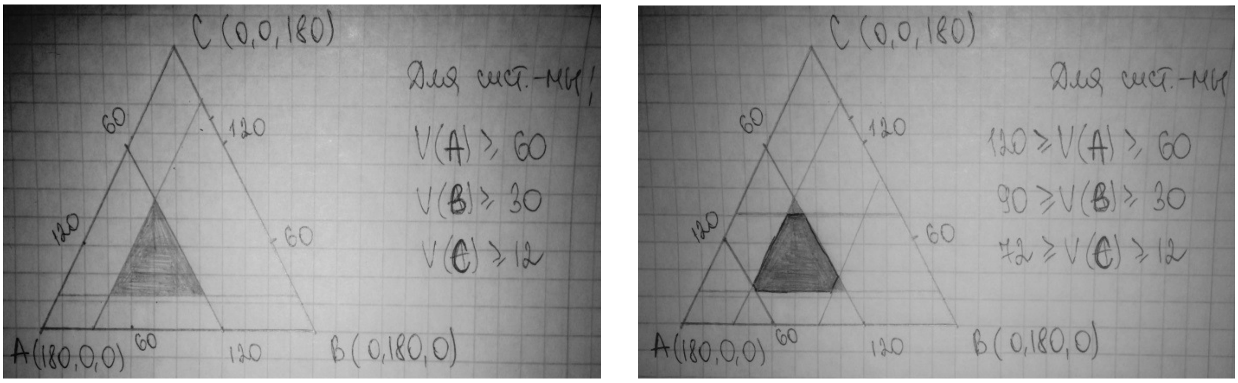

Рисунок 2.1 – Графічний метод пошуку С-ядра

Заштрихована частина є С-ядром гри, а також розв'язанням даної гри. С-ядро – це опуклий шестикутник; будь-яка точка С-ядра являється оптимальним розподілом, тобто розв'язком гри.

На третьому етапі обчислимо вектор Шеплі в табл. 2.2.

Таблиця 2.2 – Обчислення вектору Шеплі

	V(A)	V(B)	V(C)
V(A,B,C)	60/6	(108/6)-(60/6)	180/6-108/6
V(B,A,C)	(108/6)-(30/6)	30/6	180/6-108/6
V(A,C,B)	60/6	180/6-90/6	(90/6)-(60/6)
V(B,C,A)	180/6-60/6	30/6	60/6-30/6
V(C,A,B)	90/6-12/6	180/6-90/6	12/6
V(C,B,A)	180/6-60/6	60/6-12/6	12/6
$\sum$	86	56	38

Якщо всі гравці погоджуються з даним розподілом спільного виграшу, тоді вектор Шеплі

$$S_h = (86; 56; 38)$$

являється розв'язком даної кооперативної гри.

На четвертому етапі перевіримо вектор Шеплі належить С-ядру:

$$\begin{cases} V(A) < Sh_1, \\ V(B) < Sh_2, \\ V(C) < Sh_3, \\ V(A,B) < Sh_1 + Sh_2, \\ V(A,C) < Sh_1 + Sh_3, \\ V(B,C) < Sh_2 + Sh_3, \\ V(A,B,C) = Sh_1 + Sh_2 + Sh_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 60 < 86, \\ 30 < 56, \\ 12 < 38, \\ 108 < 142, \\ 90 < 124, \\ 60 < 94, \\ 180 = 180. \end{cases}$$

Оскільки система виконується, вектор Шеплі належить С-ядру та являється одним із можливих рішень гри.

<u>Задача 2</u> Житловий будинок потребує ремонту водопровідних труб. Відомо, що за 1 тис. грн. можливо замінити 1 м водопровідної труби. Необхідно розподілити затрати на ремонт труб між жильцями будинку, при врахуванні, що метраж водопровідних труб для кожної квартири різний, який представлено в наступній табл. 2.3.

Таблиця 2.3 – Початкові дані задачі

Номер квартири $(N_1 i)$	Метраж водопровідних труб (l_i), м	Вартість виконання робот
1	200	200000
2	500	500000
3	700	700000
4	1000	1000000

де l_1, l_2, l_3, l_4 - вимоги на длину труби (м);

$V[S] = -c_i\left(\max_{i \in S} l_i\right)$ – затрати коаліції *S*;

$c_i = c(l_i)$ – вартість ремонту труби для l_i.

Вектор Шеплі даного класу задач буде обчислюватися за принципом [20]:

$$\frac{C_1}{n}+\frac{C_2-C_1}{n-1}+\frac{C_3-C_2}{n-2}+\cdots+\frac{C_{n-1}-C_{n-2}}{2}+(C_n-C_{n-1}),$$

де $Sh_1=\frac{C_1}{n}$ – вектор Шеплі для 1-го гравця;

$Sh_2=\frac{C_1}{n}+\frac{C_2-C_1}{n-1}$ – вектор Шеплі для 2-го гравця;

$Sh_3=\frac{C_1}{n}+\frac{C_2-C_1}{n-1}+\frac{C_3-C_2}{n-2}$ – вектор Шеплі для 3-го гравця;

$Sh_4=\frac{C_1}{n}+\frac{C_2-C_1}{n-1}+\frac{C_3-C_2}{n-2}+\frac{C_4-C_3}{n-1}$ – вектор Шеплі для 4-го гравця.

Розв’язанням даної задачі є вектор Шеплі виду:

$$Sh=(50\,000;\ 150\,000;\ 250\,000;\ 550\,000).$$

Спільні витрати на ремонт водопровідних труб складають:

$$\sum_{i=1}^{4} Sh_i = 50\,000 + 150\,000 + 250\,000 + 550\,000 = 1\,000\,000 \text{ грн.}$$

В результаті розв’язання даної кооперативної супермодулярної гри, вектор Шеплі має вид $Sh=(50\,000;\ 150\,000;\ 250\,000;\ 550\,000)$, за яким можливо визначити, як раціонально розподілити витрати на ремонт водопровідної труби відповідно до квартир в житловому будинку. Так, квартира 1 повинна заплатити на ремонт труби 50 тис. грн., квартира 2 - 150 тис. грн., квартира 3 - 250 тис. грн., квартира 4 - 550 тис. грн. Загальна вартість для всіх жильців ремонт труби обійдеться в 1 млн. грн.

<u>Задача 3</u> Маємо корпорацію з чотирьох акціонерів, які мають відповідні значення акцій, заданих в табл. 2.4.

Таблиця 2.4 – Значення характеристичних функцій

Акціонер				
Кількість акцій	10	20	30	40

Будь-яке рішення затверджується акціонерами, які мають в сумі більшість акцій. Це рішення вважається виграшом, що дорівнює 1 [4].

На першому етапі проаналізуємо коаліції, які виграють:

$$\{2;4\}, \{3;4\}, \{1;2;3\}, \{1;2;4\}, \{2;3;4\}, \{1;3;4\}, \{1;2;3$$

На другому етапі знайдемо вектор Шеплі для даної гри. Для цього необхідно обчислити ймовірності φ_i. При обчислені φ_i необхідно враховувати, що нам потрібні тільки ті коаліції, які виграють з гравцем *i*, але програють без його участі.

Обчислимо всі коаліції які виграють, але програють без 1-го гравця. У даному випадку існує тільки одна коаліція $T = \{1;2;3\}$, яка виграє, а коаліція $T/_{\{1\}} = \{2;3\}$ програє. В коаліції *T* знаходяться 3 гравця, тому розмір цієї коаліції дорівнює $t = 3$, отримуємо:

$$\varphi_1 = \frac{(t-1)!\,(n-t)!}{n!} = \frac{(3-1)!\cdot(4-3)!}{4!} = \frac{1}{12}.$$

Обчислимо всі коаліції які виграють, але програють без 2-го гравця: $\{2;4\}, \{1;2;3\}, \{1;2;4\}$.

Отримуємо

$$\varphi_2 = \frac{(2-1)!\,(4-2)!}{4!} + 2 * \frac{(3-1)!\,(4-3)!}{4!} = \frac{1}{4}.$$

Обчислимо всі коаліції які виграють, але програють без 3-го гравця: $\{3;4\}, \{1;2;3\}, \{1;$

. Отримуємо

$$\varphi_3 = \frac{(2-1)!\,(4-2)!}{4!} + 2 * \frac{(3-1)!\,(4-3)!}{4!} = \frac{1}{4}.$$

Обчислимо всі коаліції які виграють, але програють без 4-го гравця: $\{2;4\}, \{3;4\}, \{1;2;4\}, \{2;3;4\}, \{1;$

. Отримуємо

$$\varphi_4 = 2 * \frac{(2-1)!\,(4-2)!}{4!} + 3 * \frac{(3-1)!\,(4-3)!}{4!} = \frac{5}{12}.$$

В результаті отримуємо, що вектор Шеплі дорівнює

$$Sh = \left(\frac{1}{\frac{12,1}{\frac{4,1}{\frac{4,5}{12}}}} \right).$$

Якщо враховувати, що вага голосу акціонера пропорційна кількості існуючих у нього акцій, то отримаємо вектор голосувань

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 10,2 \\ \hline 10,3 \\ \hline 10,4 \\ \hline 10 \end{array}\right)$$

який відрізняється від вектору Шеплі.

Аналіз показує, що компоненти 2-го та 3-го гравця рівні, хоча третій гравець має більше акцій. Це виходить в наслідок того, що можливості створювання коаліцій у 2-го та 3-го гравця однакові. Для 1-го та 4-го гравця ситуація логічна, та відповідає силі їх капіталу.

3 Завдання до лабораторних робіт

3.1 Лабораторна робота №1
Дослідження та розв’язання кооперативних ігор. Визначення та дослідження С-ядра гри

Завдання:

а) перевірити виконання умови існування С-ядра гри;

б) визначити С-ядро графічним способом;

в) обчислити вектор Шеплі;

г) перевірити вектор Шеплі належить до С-ядра;

д) провести аналіз отриманих результатів;

за відповідними характеристичними функціями в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Початкові дані для виконання завдання

Варіант	V(1)	V(2)	V(3)	V(1,2)	V(1,3)	V(2,3)	V(1,2,3)
1	164	146	140	328	320	300	520
2	150	120	100	300	270	240	440
3	110	160	130	300	260	320	500
4	120	60	24	216	180	120	360
5	130	140	170	300	340	360	560
6	200	180	150	420	400	370	640
7	96	120	230	240	360	390	580
8	240	200	180	480	450	420	700
9	80	130	180	240	280	350	480
10	100	180	120	300	250	340	480
11	96	74	80	180	190	170	280
12	160	140	150	330	340	310	550
13	108	112	130	230	250	260	420
14	150	120	144	216	180	150	360
15	150	60	48	216	180	120	360

3.2 Лабораторна робота №2
Дослідження та розв’язання кооперативних ігор. Визначення вектору Шеплі

Завдання:

а) обчислити вартість виконання робіт для кожного l_i;

б) обчислити вектор Шеплі для кожного гравця;

в) обчислити спільні витрати на виконання роботи;

г) провести аналіз отриманих результатів;

за відповідними значеннями в табл. 3.2.

Таблиця 3.2– Початкові дані для виконання завдання

Варіант	k	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
1	500	20	35	65	80	-
2	200	10	20	32	45	55
3	1000	5	25	34	45	55
4	30	30	60	80	120	150
5	600	35	40	60	65	80
6	100	23	52	64	70	85
7	100	12	24	30	40	50
8	50	13	25	40	84	104
9	100	12	30	45	70	90
10	1000	15	32	44	88	100
11	500	13	25	44	100	-
12	500	17	25	40	84	104
13	30	15	25	35	45	55
14	500	26	50	88	200	-
15	120	9	13	28	32	38

3.3 Лабораторна робота №3
Дослідження та розв’язання кооперативних ігор. Визначення та аналіз векторів Шеплі та голосувань

Завдання:

а) обчислити вектор Шеплі;

б) обчислити вектор голосувань;

в) провести аналіз отриманих результатів;

за відповідними значеннями в табл. 3.3.

Таблиця 3.3 – Початкові дані для виконання завдання

Варіант	a1	a2	a3	a4	a5
1	5	15	25	27	28
2	2	10	20	33	35
3	6	10	15	20	49
4	10	18	21	25	26
5	15	20	10	15	40
6	10	15	15	25	35
7	30	12	15	14	29
8	24	26	12	25	13
9	15	19	20	21	25
10	10	14	16	25	35
11	10	20	25	30	15
12	30	10	20	15	25
13	10	15	18	25	32
14	5	15	20	25	35
15	15	17	20	23	25

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Волкова В. Н. Теория систем и системный анализ: учебник для академического бакалавриата. Москва : Юрайт, 2016. 462 с.

2. Воробьёв Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. 272 с.

3. Горелик В. А., Фомина Т. П. Элементы теории игр. Липецк : ЛГТУ, 1999. 128 с.

4. Демешев Б. Кооперативная теория игр. Москва : Азбука, 2010. 36 с.

5. Дюбин Г. Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр. – Москва : Наука, 1981. 336 с.

6. Карпов Е. А., Мусаев А. А., Шерстюк Ю. М. Многоцелевая аналитическая информационная система. Методология создания и основные проектные решения. Санкт-Петербург : ВУС, 2000. 143 с.

7. Клименко О. А. Аппарат теории кооперативных игр в моделировании социально-экономических процессов // Молодой ученый. 2010. №3. С. 53–55.

8. Котеров Д. В., Костарев А. Ф. PHP 5. Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2008. 1104 с.

9. Кубланов М. С. Математическое моделирование. Методология и методы разработки математических моделей механических систем и процессов. Москва : МГТУ ГА, 2014. 108 с.

10. Кузнецов М. В., Симдянов И. В. Самоучитель PHP 5/6. Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2008. 672 с.

11. Луценко М. М. Теоретико-игровой подход к оценке точности тестирования // Математическая теория игр и ее приложения. 2009. Т. 1. Вып. 4. С. 63–77.

12. Луценко М. М., Шадринцева Н. В. Веса Шепли для заданий педагогического теста // Вестник Санкт-Петербургского университета.

Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 3. С. 300–312.

13. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. Москва : Мир, 1991. 454 с.

14. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. Москва : Мир, 1985. 200 с.

15. Орлов А. И. Теория принятия решений. Учебное пособие. Москва : Март, 2004. 656 с.

16. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. Теория игр : учеб. пособие для ун-тов. Москва : Высшая школа, Книжный дом «Университет», 1998. 304 с.

17. Печерский С. Л., Яновская Е. Б. Кооперативные игры : решения и аксиомы. Санкт-Петербург: Изд-во Европейского ун-та в Санкт-Петербурге, 2004, 459 с.

18. Савватеев А. В. Теория игр. Лекторий. URL: http://lectoriy.mipt.ru/lecturer/SavvateevAV/lectures (дата звернення: 19.10.2018).

19. Смагин Б. И. Кооперативные игры : учебное пособие для студентов экономических специальностей. Мичуринск : МичГАУ, 2008. 28 с.

20. Стрижак К. О., Кондрат’єва Н. О., Леонтьєва В. В. Кооперативні ігри як інструмент розв’язання окремих задач системного аналізу. Актуальні проблеми математики та інформатики : Збірка тез доповідей Дев’ятої Всеукраїнської, шістнадцятої регіональної наукової конференції молодих дослідників (Запоріжжя, 26-27 квітня 2018). Запоріжжя : ЗНУ, 2018. С. 136–138.