Лекція №5 – Узагальнене поняття розв'язку та квазірозв'язку

1.1. Псевдорозв'язок матричного рівняння

Означення 1.6. Матрицю Q^+ розмірності $m \times n$ називають *псевдооберненою* до матриці Q розмірності $m \times n$, якщо виконуються рівності:

$$QQ^+Q = Q, \quad Q^+QQ^+ = Q^+, \quad (QQ^+)^* = QQ^+, \quad (Q^+Q)^* = Q^+Q. \qquad (1.11)$$

Означення 1.7. Нехай ранг матриці Q доівнює n_1: $\mathrm{rang}\,Q = n_1$. Скелетним розкладом матриці Q називають добуток:

$$Q = RS, \qquad (1.12)$$

де $m \times n_1$-вимірна матриця R і $n_1 \times n$-вимірна матриця S повного рангу:

$$\mathrm{rang}\,Q = \mathrm{rang}\,R = \mathrm{rang}\,S = n_1.$$

Для знаходження псевдооберненої матриці застосовують формулу

$$Q^+ = S^+R^+ = S^*\left(SS^*\right)^{-1}\left(R^*R\right)^{-1}R^*. \qquad (1.13)$$

Псевдообернена матриця існує для будь-якої матриці, крім цього вона єдина.

Для того, щоб отримати розклад (1.13), достатньо в якості стовпців матриці R взяти будь-які n_1 лінійно незалежних стовпців матриці Q, або будь-які n_1 лінійно незалежних стовпців, через які лінійно виражаються стовпці матриці Q. Тоді будь-який j-ий стовпець матриці Q буде лінійною комбінацією стовпців матриці R.

Припустимо далі, що матриця Q повного рангу. В цьому випадку скелетний розклад матриці Q має вигляд $Q = QI_n$, де I_n – одинична матриця, що звичайно приводить до більш простої, ніж (1.13) формули

$$Q^+ = \left(Q^*Q\right)^{-1}Q^*. \qquad (1.14)$$

Для знаходження псевдооберненої матриці можна застосувати також формулу

$$Q^+ = \lim_{\varepsilon \to 0} Q^*\left(QQ^* + \varepsilon I_n\right)^{-1}. \qquad (1.15)$$

Приклад 1.4. Знайдемо псевдообернену матрицю Q^+ до матриці $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Для розв'язання задачі, використаємо формулу (1.15). Запишемо матриці:

$$QQ^* + \varepsilon I_2 = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \ \left(Q^+ + \varepsilon I_2\right)^{-1} = \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon)} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon \end{pmatrix},$$

$$Q^*\left(QQ^* + \varepsilon I_n\right)^{-1} = \frac{1}{1+\varepsilon} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$Q^{+}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{1+\varepsilon}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Відмітимо наступні властивості псевдооберненої матриці:

$$\left(Q^{*}\right)^{+}=\left(Q^{+}\right)^{*},\ \left(Q^{+}\right)^{+}=Q,\ \left(QQ^{+}\right)^{2}=QQ^{+},\ Q^{+}Q^{2}=Q^{+}Q.$$

Для наближеного знаходження псевдообернених матриць можна використовувати розклад псевдообернених матриць в ряди чи нескінченні добутки.

Означення 1.8. Ортопроектором P_Q для $m\times n$-вимірної матриці Q називають $n\times n$-вимірну матрицю, що задовольняє наступним умовам:

$$QP_Q=0,\ \left(P_Q\right)^{*}=P_Q,\ \left(P_Q\right)^{2}=P_Q.$$

Аналогічно вводять поняття для $m\times m$-вимірної матриці-ортопроектора P_{Q^*}:

$$Q^{*}P_{Q^*}=0,\ \left(P_{Q^*}\right)^{*}=P_{Q^*},\ \left(P_{Q^*}\right)^{2}=P_{Q^*}.$$

Ортопроектори P_Q та P_{Q^*} можна знайти, якщо відома псевдообернена до Q матриця Q^{+}, за формулами:

$$P_{Q^*}=I_m-QQ^{+}, \tag{1.16}$$

$$P_Q=I_n-Q^{+}Q. \tag{1.17}$$

Означення 1.9. Нуль-простором $N(Q)$ $m\times n$-вимірної матриці Q називають множину векторів $c_n\in R^n$ з характерною властивістю $Qc_n=0$.

Аналогічно можна ввести нуль-простір $N(Q^*)$ матриці Q^*:

$$N\left(Q^{*}\right)=\left\{c_m\in R^m : Q^{*}c_m=0\right\}.$$

Для знаходження векторів із нуль-просторів матриць Q та Q^* можна використовувати ортопроектори. Дійсно, для будь-якого вектору $c_n\in R^n$ вектор $P_Qc_n\in N(Q)$; таким чином, ортопроектор P_Q проектує евклідовий простір R^n в нуль-простір матриці Q:

$$P_Q : R^n\to N(Q).$$

Аналогічно будь-який вектор $c_m\in R^m$ ортопроектор P_{Q^*} проектує в нуль-простір матриці Q^*: $P_{Q^*}c_m\in N\left(Q^{*}\right)$, отже

$$P_{Q^*} : R^m\to N\left(Q^{*}\right).$$

Дослідимо задачу про знаходження умов існування і побудови розв’язку системи

$$Qc=b$$

з постійною $m \times n$-вимірною матрицею Q, невідомим вектором $c \in R^n$ та даним вектором $b \in R^m$. Умови існування розв'язку цієї системи визначає наступна теорема [13].

Теорема 1.1. (*Кронекера-Капеллі*) Система лінійних рівнянь

$$Qc = b \tag{1.18}$$

сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг $n \times n$-вимірної матриці Q співпадає з рангом розширеної $n \times (n+1)$-вимірної матриці $[Q, b]$.

Якщо лінійна алгебраїчна система задовольняє умовам теореми Кронекера-Капеллі, для побудови її розв'язку можна використовувати різні модифікації методу Гауса та матричний метод (існує обернена матриця).

Лінійні алгебраїчні системи з квадратною матрицею Q будемо називати фредгольмовими.

Теорема 1.2. (*Альтернатива Фредгольма*). Або неоднорідна система (1.18) має єдиний розв'язок при будь-яких правих частинах $(b \neq 0)$, або однорідна система $(b = 0)$, яка відповідає системі (1.18), має нетривіальний розв'язок.

Теорема 1.3. Алгебраїчна система (1.18) з $m \times n$-вимірною матрицею Q має розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$P_{Q^*} \cdot b = 0. \tag{1.19}$$

Якщо умова (1.19) виконується, то розв'язок системи (1.18) має вигляд

$$c = Q^+ b + P_Q \bar{c}, \ \bar{c} \in R^n. \tag{1.20}$$

Нехай умова (1.19) не виконана: $P_Q \cdot b \neq 0$. При цьому система (1.18) немає розв'язку, однак вона завжди має псевдорозв'язок $c^+ \in R^n$, який мінімізує нев'язку

$$\|Qc - b\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{n} q_{ik} c_k - b_i \right|^2}$$

для системи (1.18). Вектор $c^+ \in R^n$ має найменшу довжину

$$\|c\| = c^* c = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2}\,.$$

Система (1.18) завжди має один і тільки один псевдорозв'язок $c^+ \in R^n$, який визначають формулою $c^+ = Q^+ b$. При цьому норма нев'язки дорівнює нормі виразу, що входить в ліву частину рівняння (1.19):

$$\left\| Qc^+ - b \right\| = \left\| P_{Q^*} \cdot b \right\|.$$

Не дивлячись на те, що псевдорозв'язок єдиний, розв'язок несумісної системи

$$c = Q^+ b + P_Q \bar{c}, \ \bar{c} \in R^n$$

не єдиний. Це пояснюється тим, що нев'язка будь-якого з цих розв'язків

$$\left\| Q\left(Q^{+}b + P_{Q}\overline{c}\right) - b \right\| = \left\| P_{Q^{*}} \cdot b \right\|$$

така ж, як і для псевдорозв'язку.