Лекція №8 – Метод регуляризаії А.М. Тихонова для операторного рівняння

Нехай U, F – гільбертові простори, D – замкнута випукла множина апріорних обмежень задачі, $D \subseteq F$, оператори A, A_h – лінійні обмежені оператори, $A: F \to U$, A_h – апроксимуючий оператор, $h \geq 0$ – похибка апроксимації, тобто $\| A - A_h \| \leq h$. Побудуємо наближений розв’язок рівняння

$$Az = u, \tag{1.40}$$

який належить множині D, по заданому набору даних $\{A_h, u_\delta, \eta\}$, де $\eta = (\delta, h)$, $\delta > 0$ – похибка задання правої частини рівняння (1.40), тобто $\| u - u_\delta \| \leq \delta$.

Введемо сгладжуючий функціонал [21]

$$M^\alpha[z] = \| A_h z - u_\delta \|^2 + \alpha \| z \|^2, \tag{1.41}$$

де $\alpha > 0$ – параметр регуляризации. Розглянемо екстремальну задачу, знайдемо

$$\min_{z \in D} M^\alpha[z]. \tag{1.42}$$

Має місце наступний результат [21].

Для будь-яких $\alpha > 0$, $z_\delta \in F$ і лінійного обмеженого оператора A_h задача (1.42) має єдиний розв’язок $z_\eta^\alpha \in D$, причому $\| z_\eta^\alpha \| \leq \dfrac{\| z_\eta \|}{\sqrt{\alpha}}$.

Вибір параметра регуляризації виконують у відповідності до принципу узагальненої нев’язки [21], тобто α знаходять із рівняння:

$$\rho(\alpha) = \| A_h z_\eta^\alpha - u_\delta \|^2 - (\delta + h \| z_\eta^\alpha \|)^2 - \mu^2(u_\delta, A_h) = 0, \tag{1.43}$$

де $\mu(u_\delta, A_h) = \inf\limits_{z \in D} \| A_h z - u_\delta \|$ – міра невідповідності рівняння (1.40) наближеним даним.

При цьому, якщо виконується умова $\| u_\delta \|^2 \geq \delta^2 + \mu^2(u_\delta, A_h)$, то рівняння (2.3) має один додатній корінь, який вибирають в якості параметра регуляризації в методі А.М. Тихонова.

Для знаходження кореня рівняння (2.3) можна використовувати модифікацію метода хорд. Наведемо ітераційну процедуру знаходження параметра регуляризації.

Нехай $\varepsilon > 0$. Задамо початкове значення параметра регуляризації α_0 і виберемо наступне значення α_1 ($\alpha_1 < \alpha_0, |\alpha_1 - \alpha_0| > \varepsilon$), вважаємо що $\alpha_1 = \dfrac{\alpha_0}{2}$ і обчислюємо $\rho(\alpha_0), \rho(\alpha_1)$. Далі виконуємо процедуру доки виконується умова $|\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}| \geq \varepsilon$, будуємо ітераційну послідовність по наступній рекурентній формулі:

$$\alpha_n = \frac{\alpha_{n-2}}{1 - \dfrac{\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}}{\alpha_{n-1}} \dfrac{\rho(\alpha_{n-2})}{\rho(\alpha_{n-2}) - \rho(\alpha_{n-1})}},$$

причому, якщо $\rho(\alpha_{n-2})\rho(\alpha_{n-1}) > 0$, то $\alpha_{n-2} = \alpha_{n-1}$, $\alpha_{n-1} = \alpha_n$

якщо $\rho(\alpha_{n-2})\rho(\alpha_{n-1})<0$, то $\begin{cases} якщо\ \rho(\alpha_{n-2})\rho(\alpha_n)<0, то\ \alpha_{n-1}=\alpha_n, \\ якщо\ \rho(\alpha_{n-1})\rho(\alpha_n)<0, то\ \alpha_{n-2}=\alpha_n. \end{cases}$

В якості значення параметра регуляризації вибирають $\alpha=\alpha_{n-1}$.

В основі побудови стійких методів розв'язку некоректних задач лежить поняття регуляризуючого алгоритму (РА) і пов'язаного з ним поняття регуляризованого сімейства розв'язків, введеного А.М. Тихоновим. Погано обумовлені СЛАР слід розглядати як некоректно поставлені задачі і при їх наближеному розв'язанні необхідно застосовувати ідеї регуляризації.

Домовимося розрізняти точні дані – пару $\{A,b\}$, котрі формують задачу (1.7) і нам не відомі, і наближені дані $\{A_h,b_\delta\}$, $\|A_h-A\|\le h$, $\|b_\delta-b\|\le\delta$ з рівнем похибок h,δ, якими ми володіємо. Суть методу регуляризації наближеного розв'язання стосується побудови послідовності векторів $x_{h,\delta}$, яка збігається до розв'язку або псевдорозв'язку рівняння (1.7) при $\delta\vee h\to 0$. За наближений розв'язок $x_{h,\delta}$ не можна брати точний розв'язок або квазірозв'язок рівняння з даними

$$A_h\cdot x=b_\delta \tag{1.28}$$

Нехай ми маємо спосіб (правило), який по парі $\{A_h,b_\delta\}$ і додатньому параметру α однозначно будує вектор $x^\alpha(A_h;b_\delta)$. Якщо існує залежність параметра $\alpha(\delta,h)$ від похибок δ,h вихідних даних така, що

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ h\to 0}}\left\|x^{\alpha(\delta,h)}(A_h;b_\delta)-\tilde{x}\right\|=0, \tag{1.29}$$

тоді множину $\left\{x^{\alpha(\delta,h)}(A_h;b_\delta)\right\}$ називають регуляризованим сімейством наближених розв'язків, а сам спосіб побудови $x^\alpha(A_h;b_\delta)$ – регуляризуючим алгоритмом для задачі (1.7). Тут вектор $\tilde{x}$ – розв'язок, нормальний розв'язок або псевдорозв'язок системи (1.7) залежно від того, чи розв'язується ця система однозначно, чи має множину розв'язків чи немає.

Співвідношення (1.29) засвідчує, що наближений розв'язок $x^\alpha(A_h;b_\delta)$ тим краще апроксимує точний розв'язок $\tilde{x}$, чим менша похибка вихідних даних δ,h. Таким чином, регуляризуючий алгоритм дає теоретичну базу для конструювання стійкого до збурень вихідних даних наближеного розв'язку системи (1.7) загального виду, включаючи погано обумовлені системи.

Важливо розуміти наступну обставину. Якщо A^{-1} існує, тобто A – невироджена матриця, то для достатньо малих h A_h^{-1} теж існує і розв'язок $x_{h,\delta}$ рівняння (1.28) теоретично буде збігатися до розв'язку рівняння (1.7) при $\delta,h\to 0$. Однак якщо A – погано обумовлена матриця ($\mu(A)$ – велике, $\mu(A)$ – число обумовленості [13, с.37]), то величина похибки $\|\tilde{x}-x_{\delta,h}\|$, навіть при малих δ,h, може бути недопустимо великою і задачу слід вважати практично нестійкою (некоректною). Метод регуляризації саме і направлений на те, щоб зменшити вплив похибок (вхідних даних, обчислень) і одержати практично стійкий наближений розв'язок в цих несприятливих обставинах.

Тепер перейдемо до опису конкретних процедур побудови регуляризованих наближених розв'язків $x^{\alpha}(A_h;b_{\delta})$. Далі для скорочення запису будемо опускати залежність $x^{\alpha}(A_h;b_{\delta})$ від $(A_h;b_{\delta})$ і записувати просто $x^{\alpha(\delta,h)}$.

Розглянемо спочатку частинний випадок – схему М.М. Лаврент'єва, коли A – симетрична додатня напіввизначена матриця, для якої система (1.7) при заданому векторі b може бути розв'язаною.

Перейдемо від (1.6) до регуляризованої системи

$$(A+\alpha E)x^{\alpha}=b+\alpha x^{0}, \tag{1.30}$$

де α – додатній параметр, E – одинична матриця, x^{0} – пробний розв'язок, тобто деяке наближення до шуканого розв'язку (якщо інформація про розв'язок відсутня, то можна позначити $x^{0}=0$).

При зроблених припущеннях, СЛАР (1.30) має єдиний розв'язок x^{α}, який збігається при $\alpha\to 0$ до нормального розв'язку $\tilde{x}$.

Твердження 1.1. Нехай $\{A_h,b_{\delta}\}$, $\|A_h-A\|\le h$, $\|b_{\delta}-b\|\le\delta$ – наближені дані задачі і A_h – симетрична додатна напіввизначена матриця. Тоді СЛАР

$$(A_h+\alpha E)x^{\alpha}=b_{\delta}+\alpha x^{0} \tag{1.31}$$

однозначно розв'язана і при зв'язку параметра α з похибками δ,h такими, що $\alpha(\delta,h)\to 0$, $\dfrac{h+\delta}{\alpha(\delta,h)}\to 0$, коли $\delta\to 0$, $h\to 0$, тобто $x^{\alpha(\delta,h)}$ збігається до нормального розв'язку $\tilde{x}$ рівняння (1.7). Це і є розв'язок, який найменше ухиляється від вектору x^{0}.