Лекція №10 – Некоректні екстремальні задачі

Переважну більшість математичних задач, виникнення яких обмовлене потребами практики, можна подати у вигляді таких основних форм:

а) розв'язання операторних рівнянь;

б)пошук мінімуму функціонала на деякій множині.

Поставимо у відповідність кожному елементу $u \in U$ деяке число $J(\nu)$. У таких випадках говорять, що на множині V задано функціонал $J(\nu)$. Екстремальна задача для функціонала $J(\nu)$ полягає в знаходженні такого елемента $u \in U$, для якого

$$J(u) = \inf_{\nu \in U} J(\nu)$$

Для багатьох екстремальних задач можливі формулювання як у вигляді операторного рівняння, так і у вигляді екстремальної задачі. Для прикладу розглянемо задачу Діріхле, тобто задачу знаходження розв'язку $u(x, y)$ рівняння Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в області G двомірного простору.

На межі ∂G області G функція $u(x, y)$ повинна задовольняти умову Діріхле

$$u\big|_{\partial G} = g(x, y).$$

Так форма запису є операторним рівнянням; роль оператора A відіграє оператор Лапласа Δ; за множину U можна взяти підмножину метричного простору $C^2(G)$, усі елементи якої задовольняють умову

$$u\big|_{\partial G} = g.$$

Водночас цю саму задачу можна записати як задачу мінімізації функціонала. Відомо, що формулювання цієї задачі має вигляд: знайти функцію $u \in V$, для якої функціонал

$$J(\nu) = \int_G \left[\left(\frac{\partial \nu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial y} \right)^2 \right] dG$$

набуває значення точної нижньої грані V. Множина V є підмножиною метричного простору, для всіх елементів якого значення функціонала визначене; на межі ∂G області G функції з V набувають заданих значень.

У загальному випадку перехід від задачі розв'язування операторного рівняння до задачі пошуку мінімуму функціонала можна здійснити за допомогою методу найменших квадратів. Нехай ρ_U – метрика простору, якому належать елементи множини U. Тоді задачі розв'язання операторного рівняння

$$Az = u$$

на множині U відповідає задача пошуку на множині F такого елемента z^*, для якого

$$J\left(z^*\right)=\rho_U\left(Az^*,u\right)=\inf_{v\in F}\rho_U\left(Az^*,u\right)=J(z)$$

Розглянемо тепер сутність проблеми некоректності екстремальних задач. Наведемо спочатку приклад. Розглянемо задачу пошуку функції $y(x)$, для якої функціонал

$$J[y]=\left[\int_0^\pi (x-y(x))dx\right]^2$$

досягає найменшого значення. Функцію $y(x)$ шукаємо на множині П неперервних функцій, визначених на відрізку $[0,\pi]$ і так, що $y(0)=0, y(\pi)=\pi.$

Очевидно, що $J[y]\geq 0,$ причому $J[y]=0$ при $y(x)\equiv x,$ тобто функція $y(x)=x$ – один із розв'язків варіаційної задачі.

Розглянемо послідовність $\{y_n(x)\}$ функцій вигляду $y_n(x)=x+\sin nx$. Очевидно, що при всіх натуральних n функції $y_n(x)$ належать до множини П. Тоді

$$J[y_n(x)]=\left[\int_0^\pi \sin nxdx\right]^2=$$

$$=\left[-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^\pi\right]^2=\frac{1}{n^2}\left[1-(-1)^n\right]^2.$$

Очевидно, що

$$\lim_{n\to\infty} J[y_n(x)]=0=J[x].$$

Можна було б сподіватися, що одночасно і $y_n(x)\to y(x)$. Проте, як не важко переконатися, послідовність функцій $y_n(x)=x+\sin nx$ при $n\to\infty$ є взагалі розбіжна (у метриці простору $C[0,\pi]$. Це свідчить про те, що малим змінам у значенні функціонала можуть відповідати істотні зміни функції $y(x)$.

Звернемо увагу на те, що під задачею пошуку мінімуму ми фактично розуміємо задачу пошуку точної нижньої грані. Нагадаємо, у чому полягає відмінність між цими поняттями. З одного боку, мінімум функціонала $J(z)$ на множині V – це найменше з усіх значень $J(z)$ для всіх $z\in F$. З іншого боку, число J_* називається точною нижньою гранню функціонала $J(z)$ на множині F, якщо виконуються такі умови:

а) $J(z)\geq J_*, \forall z\in F;$

б) для кожного $\varepsilon>0$ можна вказати такий елемент $z_\varepsilon\in F$, що

$$J(z_\varepsilon)<J_*+\varepsilon.$$

Пояснимо різницю між мінімумом та точною нижньою гранню. Відмінність полягає в тому, що значення точної нижньої грані не обов'язково є деяке значення функціонала. Для прикладу розглянемо функцію $f(x)$, графік якої показаний на Рисунку 2.

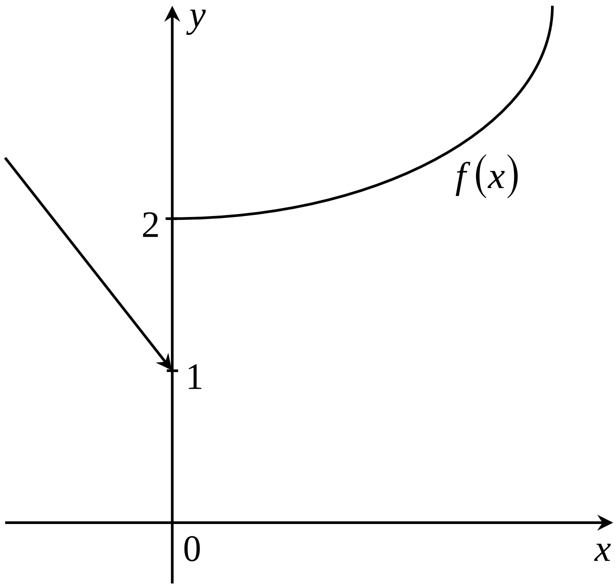

Рисунок 2.

Очевидно, що задача знаходження мінімуму цієї функції не має розв'язку. Проте точна нижня грань існує:

$$\inf_{x\in R} f(x)=1,$$

але не існує значення x^*, при якому $f(x^*)=1$. Звичайно, такий ефект цілком зрозумілий, оскільки, при $x=0$ функція має розрив. Неперервна функція, задана на замкненому відрізку, згідно з теоремою Вейєрштрасса досягає значення точної нижньої грані. Однак теорема Вейєрштрасса безпосередньо не переноситься на випадок загальних неперервних функціоналів.

Розглянемо тепер проблеми, що виникають у разі наближеної мінімізації функціоналів. Процедура більшості існуючих методів полягає фактично в побудові так званої мінімізуючої послідовності. Це поняття близько 100 років тому ввів Д. Гільберт в процесі аналізу принципових проблем існування розв'язку екстремальних задач. Послідовність $z^{(0)}, z^{(1)}, \ldots, z^{(n)}, \ldots, \quad z^{(n)} \in F$ називають мінімізуючою для функціонала $J(\nu)$, якщо:

а) $J\left(z^{(0)}\right) \geq J\left(z^{(1)}\right) \geq \ldots \geq J\left(z^{(n)}\right) \geq J\left(z^{(n+1)}\right) \geq \ldots$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} J\left(z^{(n)}\right) = J_* = \inf\limits_{z\in F} J(z)$.

Якщо точна нижня грань $J(z)$ на множині F є скінченна, то мінімізуючи послідовність завжди існує. Наприклад, задана послідовність чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ таких що

а) $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_n > \varepsilon_{n+1} > \ldots$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Згідно з означенням точної нижньої грані для кожного ε_n побудуємо відповідне $z^{(n)} \in F$ з умови

$$J\left(z^{(n)}\right) < J_* + \varepsilon .$$

Очевидно , що побудована послідовність $\left\{z^{(n)}\right\}$ буде мінімізуюча. Ця мінімізуюча послідовність не єдина; згідно з наведеною побудовою існує безліч мінімізуючих послідовностей для даної екстремальної задачі.

Як бачимо, знаходження значення точної нижньої грані функціонала не супроводжується принциповими проблемами. Інша справа – знаходження елемента $u^* \in V$, на якому функціонал $J(\nu)$ досягає значення точної нижньої грані, тобто такого елемента u^*, для якого

$$J\left(z^*\right) = J_* = \inf_{z \in F} J(z). \tag{1.56}$$

Фактично проблема містить 2 питання:

а) чи буде мінімізуюча послідовність збіжною в метриці відповідного метричного простору;

б) якщо мінімізуюча послідовність збіжна, то чи буде її границя задовольняти умову (1.56).

Розглянемо приклади, на яких проаналізуємо можливі варіанти поведінки мінімізуючої послідовності.

Дослідимо екстремальну задачу для функції

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^4} .$$

Під множиною F будемо розуміти множину R дійсних чисел із відповідною метрикою.

Неважко переконатися, що точна нижня грань $f(x)$ дорівнює $J_* = 0$ і досягає при $x_* = 0$. Побудуємо приклади мінімізуючи послідовностей.

Очевидно, що послідовність

$$\{x_n\},\ x_n = \frac{1}{n},\ n = 1,2,\ldots$$

буде мінімізуюча:

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = 0 = J_*.$$

Розглянемо тепер послідовність

$$\{x_n\},\ x_n = n,\ n = 1,2,\ldots$$

Ця послідовність також є мінімізуюча:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n^4} = 0 = J_*,$$

однак її границі не існує (мінімізуюча послідовність є розбіжна).

Отже, серед мінімізуючи послідовностей можуть бути і збіжні, і розбіжні. Цікаво, що одна й та ж мінімізуюча послідовність може бути як збіжною, так розбіжною залежно від вибору метрики.

Як приклад, розглянемо задачу мінімізації функціонала

$$J(\nu) = \int_0^1 \nu^2(x)dx .$$

Під множиною V будемо розуміти множину всіх функцій $\nu(x)$, визначених на неперервних на відрізку $[0;1]$. Зрозуміло, що екстремальна задача має єдиний розв'язок $u_* \equiv 0$, причому $J(u_*) = 0$. Надамо множині V властивостей метричного простору, вводячи спосіб вимірювання віддалей. Відомо, що такий спосіб буде не єдиний. Розглянемо такі метрики:

а) метрику гільбертового простору $L_2[0;1]$;

б) метрику простору $C[0;1]$.

У гільбертовому просторі $L_2[0;1]$ віддаль між елементами $u^{(n)}$ мінімізуючої послідовності та розв'язком u_* екстремальної задачі дорівнює

$$\rho^2\left(u^{(n)}, u_*\right) = \int_0^1 \left[u^{(n)}(x) - u_*(x)\right]^2 dx = \int_0^1 \left[u^{(n)}(x)\right]^2 dx = J\left(u^{(n)}\right).$$

Згідно з означенням мінімізуючої послідовності

$$\lim_{n\to\infty} \rho^2\left(u^{(n)}, u_0\right) = \lim_{n\to\infty} J\left(u^{(n)}\right) = J_* = 0,$$

тобто будь-яка мінімізуюча послідовність буде збіжною в метриці простору $L_2[0;1]$.

У просторі $C[0;1]$ метрика визначається співвідношенням

$$\|\nu\|_{C[0,1]} = \max_{x\in[0,1]} |\nu(x)|.$$

Розглянемо послідовність $\left\{u^{(n)}(x)\right\}$, де

$$u^{(n)}(x) = \begin{cases} 1 - |2nx - 1|, & 0 \le x \le \dfrac{1}{n}, \\ 0, & x > \dfrac{1}{n}. \end{cases} \tag{1.57}$$

Обчислимо значення функціонала на елементах мінімізуючої послідовності:

$$J\left(u^{(n)}\right) = \int_0^1 \left[u^{(n)}(x)\right]^2 dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \left(1 - |2nx - 1|\right)^2 dx.$$

Згідно з теоремою про середнє значення

$$J\left(u^{(n)}\right) = \left(1 - |2n\xi - 1|\right)^2 \frac{1}{n},\ \xi \in \left(0, \frac{1}{n}\right).$$

Оскільки функція $1 - |2nx - 1|$ обмежена на $\left[0, \dfrac{1}{n}\right]$, то

$$\lim_{n\to\infty} J\left(u^{(n)}\right) = 0 = \inf_{\nu\in V} \left(J(\nu)\right).$$

Отже, послідовність (1.57) є мінімізуюча. Дослідимо збіжність цієї послідовності в метриці простору $C[0;1]$:

$$\rho\left(u^{(n)}, u_*\right) = \max_{x\in[0,1]} \left|u^{(n)}(x)\right| = 1 \ne 0.$$

Доходимо висновку, що послідовність (1.57) є розбіжною в $C[0;1]$. Нагадаємо, що в простору $L_2[0;1]$ будь-яка мінімізуюча послідовність є збіжна, зокрема послідовність (1.57). Як бачимо, проблема розв'язання екстремальних задач тісно пов'язана з вибором метрики та простору.

Ми з'ясували проблеми, які виникають під час мінімізації функціоналів. Сформулюємо тепер поняття коректності екстремальної задачі. Нехай задача

$$J(u) = \inf_{\nu \in V} J(\nu). \tag{1.58}$$

має розв'язок, можливо, не єдиний. Позначимо через U_* множину розв'язків цієї екстремальної задачі:

$$U_* = \left\{ u \in V \middle| J(u) = J_* = \inf_{\nu \in V} J(\nu) \right\}.$$

Позначимо через ρ метрику в метричному просторі, якому належить множина V.

Означення 1.13. Задача (1.58) називається ρ-коректною або коректно сформульованою в метриці ρ, якщо виконуються умови:

а) точна нижня грань функціонала $J(\nu)$ є скінченною;

б) множина U_* розв'язків не порожня;

в) будь-яка мінімізуюча послідовність $\{u_n\}$ збігається в метриці ρ до одного з елементів множини U_*:

$$\lim_{n \to \infty} \rho\left(u^n, u_*\right) = 0 .$$

Підкреслимо, що за такого визначення ми передбачаємо можливість існування не єдиного розв'язку. Зрозуміло, що ключовою в цьому визначенні є умова в). Надалі некоректність екстремальної задачі будемо розуміти саме як порушення умови в).

Означення 1.14. Задачу (1.58) будемо називати ρ-некоректною, якщо:

а) точна нижня грань $J(\nu)$ скінченна;

б) множина U_* не порожня;

в) існує принаймні одна мінімізуюча послідовність $\{u_n\}$, яка не збігається до жодного з елементів множини U_*.

З'ясуємо, яким чином зроблені визначення узгоджуються з класичним поняттям коректності за Адамаром.

Якщо врахувати зроблене раніше зауваження відносно єдності розв'язку, то мова фактично йде про зв'язок між третьою умовою Адамара та умовою в) в визначенні коректності екстремальної задачі.

Нехай значення J_* відоме з деякою похибкою $\varepsilon > 0$. Тоді екстремальна задача (1.58) – це фактично задача знаходження такого u_*, для якого

$$J(u_*) < J_* + \varepsilon .$$

Зрозуміло, що тоді формально кожен елемент $u^{(n)}$ будь-якої мінімізуючої послідовності, починається з деякого $n > N(\varepsilon)$, може вважатися наближеним розв'язком екстремальної задачі (1.58). Але насправді наближеним розв'язком можуть бути лише елементи мінімізуючої послідовності, яка збігається до точного розв'язку задачі (1.58). Отже, вимога в) фактично означає, що малим відхиленням від значення точної нижньої грані функціонала, тобто малим похибкам в умові задачі, повинні відповідати малі відхилення наближеного розв'язку від точного.